

第二十一讲

上次课:

- **Snell' Law:** $\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{n_2}{n_1}$, $n = \sqrt{\epsilon_r} \sqrt{\mu_r}$, 折射率;

能量守恒、动量守恒、因果关系

- **Fresnel's Law: S 波:** $E'_0 = \frac{Z_2 \cos \theta - Z_1 \cos \theta''}{Z_2 \cos \theta + Z_1 \cos \theta''} E_0$, $Z = \sqrt{\mu} / \sqrt{\epsilon}$, 阻抗

P 波: H 场表示 (Z_2, Z_1 互换)

说明: 当 ϵ, μ 其中之一为负数甚至为虚数时, θ'' 失去几何意义, 应该为 $\cos \theta'' = k''_z / k''$; 但 Z 的形式不必改, 因为 $\vec{E} = Z(\hat{k} \times \vec{H})$ 仍然成立, 尽管此处 Z 为复数

3. 反射率及透射率

反射波平均能流与入射波平均能流 在法线方向的分量之比称为反射率 (Reflectance), 物理意义是多少入射的能量被界面反射回来。无论对 S 波还是 P 波, 反射波和入射波处于同一媒质中, 阻抗值相同, 入射角与反射角也相等。因此, 反射率就是反射场与入射场振幅比例的模的平方:

$$\gamma = \frac{\langle \vec{S}_r \rangle \cdot \hat{z}}{\langle \vec{S}_i \rangle \cdot \hat{z}} = \frac{|E'_0|^2 \cos \theta' / Z_1}{|E_0|^2 \cos \theta / Z_1} = \left| \frac{E'_0}{E_0} \right|^2 = \left| \frac{H'_0}{H_0} \right|^2 \quad (8.6.17)$$

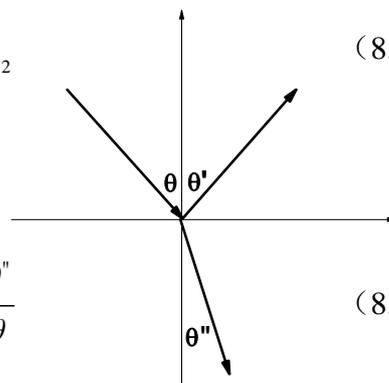
将 (8.6.13), (8.6.16) 分别带入 (8.6.17) 式即得 S, P 两种偏振情况的反射率:

$$\gamma_S = \left| \frac{Z_2 \cos \theta - Z_1 \cos \theta''}{Z_2 \cos \theta + Z_1 \cos \theta''} \right|^2 \quad (8.6.18)$$

$$\gamma_P = \left| \frac{Z_2 \cos \theta'' - Z_1 \cos \theta}{Z_2 \cos \theta'' + Z_1 \cos \theta} \right|^2$$

同样道理, 透射率定义为

$$T = \frac{\langle \vec{S}_t \rangle \cdot \hat{z}}{\langle \vec{S}_i \rangle \cdot \hat{z}} = \frac{|E_0''|^2 \cos \theta'' / Z_2}{|E_0|^2 \cos \theta / Z_1} = \frac{Z_2 |H_0''|^2 \cos \theta''}{Z_1 |H_0|^2 \cos \theta} \quad (8.6.19)$$



注意: 定义反射/透射率的时候, 我们都不是直接对入(反、透)射波的能量操作, 而是将其投影到界面的法向方向。这是因为对一个界面来讲, 只有投影到其法向方向的能量分量

才是“真正通过”这个界面的能流。

4. 正入射条件下反射的几点讨论

(1) 正入射条件下，无论 S 波还是 P 波，反射率均为

$$\gamma_s = \left| \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right|^2$$

在光学中，我们经常利用 $\gamma_s = \left| \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right|^2$ 来计算反射率，其实这不完全正确，只在介质没有磁性时成立。正确的表达式应当由阻抗来描述。折射率完全决定了波的传播方向，然而阻抗却是决定波振幅的核心。两个物理量加在一起完全描述了一个电磁介质的所有电磁波行为。

(3) 假设 $Z_1 = Z_0$ ，则定义**相对阻抗**为 $Z = Z_2 / Z_0 = \frac{\sqrt{\mu_r}}{\sqrt{\epsilon_r}}$ 对 S 波我们可以定义反射系数

$$r_s = \frac{Z - 1}{Z + 1} = \frac{E'_0}{E_0} \quad (\text{P 波有同样结果})$$
，它刻画了反射波与入射波的振幅（带相位）的比值。

我们注意到，无论对 $Z \rightarrow 0$ 的介质还是对 $Z \rightarrow \infty$ 的介质，都可以对电磁波进行强烈反射，但反射的位相却不相同。 $Z \rightarrow 0$ 的介质其实就是理想电导体（因为金属 $|\epsilon_r| \rightarrow \infty$ ，简称 Perfect electric conductor (PEC)），而 $Z \rightarrow \infty$ 的介质对应的是 $|\mu_r| \rightarrow \infty$ 的理想“磁导体” (PMC) 自然界不存在，可以通过 Metamaterial 的概念实现。通过调控电磁波介质的阻抗特性，我们可以实现对电磁波反射位相的有效调控，从而实现一系列难以置信的新的电磁波现象。

5. Brewster 角

对常规介质，磁导率接近于 μ_0 。令 $\mu_1 = \mu_2 \approx \mu_0$ ，再利用折射定律

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1}} = \frac{Z_1}{Z_2} \quad (8.6.20)$$

可以得到，对这种情况下，两种极化波的反射率分别为

$$\begin{aligned} \gamma_s &= \frac{\sin^2(\theta - \theta'')}{\sin^2(\theta + \theta'')} \\ \gamma_p &= \frac{\tan^2(\theta - \theta'')}{\tan^2(\theta + \theta'')} \end{aligned} \quad (8.6.21)$$

对 P 波反射率，注意到当

$$\theta + \theta'' = \pi/2 \quad (8.6.22)$$

条件满足时，

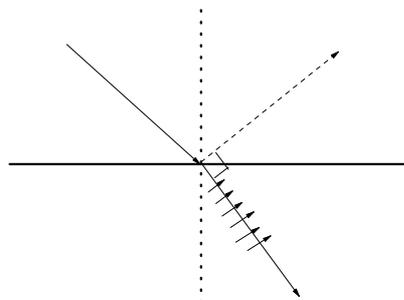
$$\gamma_p = 0 \quad (8.6.23)$$

亦即：当反射波与折射波相互垂直时，P 极化电磁波完全不被反射！满足 (8.6.22)

式条件的入射角称为布鲁斯特角 (Brewster Angle)，其在光学中有着重要的理论和实际的意义 – 如当一支没有启偏的自然光已以这个角度入射到介质表面时，反射波完全没有 P 波，完全具有 S 偏振，

这样反射波就变成了完全的线偏振波。

可以利用下面的 Argument 从物理上理解 Brewster Angle:



当 P 偏振电磁波入射到介质表面上时，在介质内部驱动介质分子来回振荡，这产生了如图所示的电偶极子振荡。它们的重新辐射效应产生了折射波和反射波。当入射角等于 Brewster Angle 时，反射波垂直于折射波，因为要满足横波条件，故在与反射波矢垂直方向运动的介质分子不可能辐射出反射波，故，此时介质对电磁波完全透明。注意，此结论以及几何解释只在非磁性材料中适用！对磁性介质（相对介电常数=1），结论恰恰相反！

§ 8.7 全反射

在实际应用中，人们希望能有效控制电磁波的传播方向，因此，一个好的反射镜就变得必不可少。电磁波在金属表面被近乎全反射，但在金属表面仍有**少量能量耗散**（特别是在光波段）。可是，当频率到达**紫外**时，金属都变成透明材料，这时如何有效地反射电磁波呢？

人们发现当电磁波以特定角度从光密介质入射到光疏介质中时 ($n_1 > n_2$)，在界面上会发生**无损耗的全反射**。这种现象有许多实际应用，新兴的纤维光学就是由此发展出来的。

1. 全反射临界角

由折射定律 $\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{n_2}{n_1}$ ，可得

$$\sin \theta'' = \sin \theta \frac{n_1}{n_2} \quad (8.7.1)$$

当入射角从 $0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $\sin \theta$ 从 0 变到 1。因为 $\frac{n_1}{n_2} > 1$, $\sin \theta''$ 从 0 变到一个比 1 大的数。因此当

$$\theta = \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (8.7.2)$$

时, $\sin \theta'' = 1$ 。而当入射角 $\theta > \theta_c$ 时, 显然会出现 $\sin \theta'' > 1$ 的情况, 这时折射角将为一虚数, 它已失去几何上作为角度的直观解释, **下面我们将证明, 此时电磁波完全被反射回入射介质中**。我们将 θ_c 称为**全反射临界角**。当 $\theta > \theta_c$ 时, θ'' 失去作为角度的意义, 不能直接将其带入 Fresnel 公式求解。然而, 我们可以将其写回原始的波矢之间的关系。利用 (8.6.12) 得

$$\cos \theta'' \rightarrow \frac{k_z''}{k''} = \frac{\sqrt{k''^2 - k_x^2}}{k''} = \frac{\sqrt{(k_0 n_2)^2 - (k_0 n_1 \sin \theta)^2}}{k_0 n_2} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_c}\right)^2} \quad (8.7.3)$$

当 $\theta > \theta_c$ 时, 上式为纯虚数, $i\alpha$, 其中

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_c}\right)^2 - 1} \quad (8.7.4)$$

将其代入公式(8.6.13)和 (8.3.16), 便有

$$\begin{aligned} E'_{0S} &= \frac{Z_2 \cos \theta - i\alpha Z_1}{Z_2 \cos \theta + i\alpha Z_1} E_{0S} \\ H'_{0P} &= \frac{Z_1 \cos \theta - i\alpha Z_2}{Z_1 \cos \theta + i\alpha Z_2} H_{0P} \end{aligned} \quad (8.7.5)$$

可见, $\gamma_S = \gamma_P = 1$ (参考 (8.6.17)), 亦即全反射。但是, 很显然发现对 S, P 两种偏振的反射波的相位未必相同。因此一只沿任意方向线偏振的电磁波以大于临界角的入射角被介质全反射时, 其偏振图案原则上是椭圆偏振。

2. 折射波

在发生全反射时, 介质 2 中的电磁波并不为零。因为, 如果介质 2 中的电磁波完全为零, 就不可能满足边值关系。考虑 S 波, 因 $k_z'' = i n_2 k_0 \alpha = i\beta$, $k_x'' = k_x$, 故折射波电场为

$$\vec{E}_t = \hat{y} E_0'' \exp[-\beta z] e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (8.7.6)$$

上式表示折射波将沿 z 方向衰减，沿 x 方向传播。因此，离界面几个波长处，场强振幅已变得很小，可以忽略不计；换句话说，电场不仅沿着界面方向传播，而且被限制在表面附近的一个区域内，所以称这种全反射的折射波为**表面波**。

3. 折射波能流

既然存在折射波，那么在第二种介质中就有能流。考虑 S 波，则我们可以根据 (8.7.6) 式求出介质中的磁场

$$\vec{H}_t = \frac{\vec{k}''}{\mu\omega} \times \vec{E}'' = \frac{E_0''}{\mu\omega} (k_x \hat{z} - i\beta \hat{x}) \exp[-\beta z] e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (8.7.7)$$

假设 E_0'' 为实数，可分别求得能流 $\vec{S}_p = \vec{E} \times \vec{H}$ 的法向分量 S_{pz} 和切向分量 S_{px} ：

$$S_x = \frac{(E_0'')^2 k_x}{\mu\omega} e^{-2\beta z} \cos^2(k_x x - \omega t)$$

$$S_z = -\frac{(E_0'')^2 \beta}{\mu\omega} e^{-2\beta z} \sin(k_x x - \omega t) \cos(k_x x - \omega t)$$

由此可见：

- (1) 在界面的法线方向上能流以频率 2ω 作振动，在第二种介质中， S_{pz} 对时间的平均值为零，即平均来说没有能量流入介质 2 中。
- (2) 界面切线方向的能流 S_{px} 对时间的平均值不为零，而是等于常数，它表示在 x 方向仍有能流。
- (3) 根据 S_{px} 和 S_{pz} 的表达式知道能流的大致走向如图 8.8。可见，在半个周期内电磁能量进入第二种介质，在另半个周期内能量重新释放出来变成反射波能量。



图 8.8

第九章 波导和谐振腔

上面我们研究了电磁波在体材料内以及界面上的反/折射行为，其中电磁波全都是以前面波的形式存在的。然而要将电磁波的信号传递到远方，用平面波的

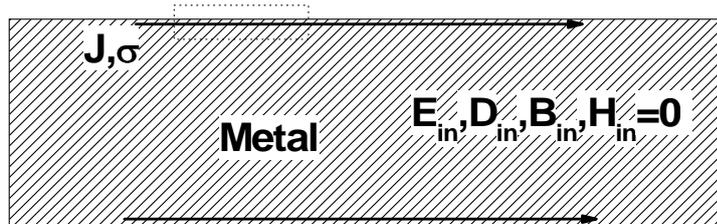
方法并不经济 – 因为平面波有着无限大的波前。实际生活中我们利用波导管来有效传递电磁波，将波导管的两端密封，得到了谐振腔。本章我们研究波导管中的电磁波的传播行为，以及谐振腔内的电磁振荡。

§ 9.1 波导管中的场方程和边界条件

波导管是一无限长的中空金属管，其截面可以是任意形状。电磁场在波导管中只能在管内且沿着管的轴线方向传播，这就使它与自由空间内传播的电磁波在性质上有很大的差别。

1. 边界条件

因为电磁波完全封闭在波导管内，我们首先应当解决的问题是电磁波在波导管壁（亦即导体）上满足的边界条件。上两章中我们已经学到金属在通讯波段，



对电磁波有很好的屏蔽作用，电磁波、感应电流、感应电荷都局域在金属表面的一个厚度为“趋肤深度 $\delta = \sqrt{2/\mu\omega\sigma_c}$ ”的一个薄层内，金属体内没有波、电流、电荷。因为良导体的 σ_c 非常大，事实上我们可以将真实导体简化为一个“理想导体” – 即金属体内没有电磁波，但在表面上有面电荷 σ 、面电流分布 \vec{J} 。将 Maxwell 方程的积分形式应用到理想金属的表面，我们得到理想金属的边界条件

$$\vec{n} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{n} \times \vec{E} = 0 \quad (9.1.1)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{D} = \sigma, \quad \vec{n} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (9.1.2)$$

其中 $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}$ 等场量是在金属表面上（介质一侧）测到的，而且已经用了金属内部所有场量为 0 的条件。事实上 σ, \vec{J} 均是未知量，故“理想导体”表面的场的边界条件就是 (9.1.1)，而 σ, \vec{J} 要利用 (9.1.2) 式根据求得的场来决定。

2. 场方程

我们现在来研究截面为任意形状的、单连通的、且沿长度方向都是一样的直波导管的情形。若波导管中无源，且是真空，则波导中的电磁场满足波动方程

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = 0 \quad (9.1.3)$$

选择波导管的长度方向为 z 轴，我们感兴趣的是沿着 z 方向传播的解。**但此时沿 z 方向传播的平面波一定不是波导管中的解，因为常矢量 \vec{E}_0 不可能满足理想导体边界条件 (9.1.1)**。所以，我们设解为：

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0(x, y) \\ \vec{B}_0(x, y) \end{pmatrix} e^{i(k_g z - \omega t)} \quad (9.1.4)$$

代入方程(9.1.3)得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2\right) \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (9.1.5)$$

式中

$$k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (9.1.6)$$

$$k_c^2 = k_0^2 - k_g^2 \quad (9.1.7)$$

(9.1.5)式显示电磁场的 6 个分量全部满足 Helmholtz 方程，但 (9.1.5) 式显示我们应当分别计算电场、磁场的 6 个分量，非常复杂。然而其实 (9.1.5) 是从 Maxwell 方程推出的，推导它的过程中丢了很多东西。当我们重新检查麦克斯韦方程组时，我们发现不同的场分量之间并不独立（就像平面波中电场与磁场的比值是阻抗）。

由 $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 的 x, y 两个方向上分量公式可得

$$\partial_y E_{0z} - ik_g E_{0y} = ik_0 c B_{0x}$$

$$ik_g E_{0x} - \partial_x E_{0z} = ik_0 c B_{0y}$$

由方程 $\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ 在 x, y 两个方向上的投影可得

$$\partial_y B_{0z} - ik_g B_{0y} = -i \frac{k_0}{c} E_{0x}$$

$$ik_g B_{0x} - \partial_x B_{0z} = -i \frac{k_0}{c} E_{0y}$$

利用上面四个方程可以将场的横向分量用纵向分量来表示的表达式为

$$\begin{cases} E_{0x} = \frac{i}{k_c^2} (ck_0 \partial_y B_{0z} + k_g \partial_x E_{0z}) \\ E_{0y} = -\frac{i}{k_c^2} (ck_0 \partial_x B_{0z} - k_g \partial_y E_{0z}) \\ B_{0x} = -\frac{i}{ck_c^2} (k_0 \partial_y E_{0z} - ck_g \partial_x B_{0z}) \\ B_{0y} = \frac{i}{ck_c^2} (k_0 \partial_x E_{0z} + ck_g \partial_y B_{0z}) \end{cases} \quad (9.1.8)$$

(9.1.8)式告诉我们：一旦场的纵向分量 B_{0z} 、 E_{0z} 知道了，则整个场的分布就可以确定下来。另外，我们注意到 E_{0y} 和 B_{0x} 有很好的对称性，而 E_{0x} 和 B_{0y} 也有很好的对称性。这样我们只需要在边界条件 (9.1.1) 下计算 B_{0z} 、 E_{0z} 所满足的方程，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) \begin{pmatrix} E_{0z}(x, y) \\ B_{0z}(x, y) \end{pmatrix} = 0 \quad (9.1.9)$$

然后利用 (9.1.8) 式推出所有的场量形式。

习题

P. 205, 8.9

补充题：

- 1) 对 P 波入射，在发生全发射情况下推导出折射波的能量表达式。
- 2) 当电磁波从空气中入射到一个磁性介质（相对磁导率为 $\mu_r = 4$ ，相对介电常数为 1）表面上时，对 S、P 两种偏振情况下计算入射角为 θ 条件下的反射率的表达式。试问，S、P 哪一种偏振波有 Brewster 角效应？对应的 Brewster 角是多少？发生 Brewster 效应时对应的物理解释是什么？

数值计算小课题

仔细讨论发生全反射时对应的偏振问题，用数值计算+图形的方法讨论一个线偏振的光经全反射后偏振图案如何变化。