<u>第十八讲</u>

上次课：

- 真空中平面电磁波 $\begin{pmatrix}\vec{E}(\vec{r},t)\\ \vec{B}(\vec{r},t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{E}_0\\ \vec{B}_0\end{pmatrix}e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$

  复场表示只是为了计算方便（只要运算是线性的）；

  物理的场是复场的实部；非线性运算是应先取实部再计算！

- 色散关系

  $k=n\dfrac{\omega}{c},\quad n=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$ 为折射率（Refraction Index）

- 阻抗

  $\left|E_0\right|=Z\left|H_0\right|\qquad Z=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$ 叫做阻抗 （Impedance）

- 横波性

  $\vec{k}\cdot\vec{E}_0=0,\quad \vec{k}\cdot\vec{B}_0=0$

---

§8.2 波的偏振和偏振矢量

电磁波是矢量波，<u>传播和偏振</u>是其最重要的两个特征。上一节我们主要学习了波在线性无色散均匀媒质中的传播特性，本节中我们将重点学习波的偏振特性。让我们仔细研究横波条件（8.1.16）。对确定的传播方向 $\vec{k}$，（8.1.16）式告诉我们电矢量 $\vec{E}_0$ 必须在与其垂直的平面内。为确定起见，假设传播方向 $\vec{k}\parallel\hat{z}$，则这个平面为 xy-平面，有 2 个相互垂直的单位矢量 $\vec{e}_x,\vec{e}_y$（其它 $\vec{k}$ 方向克类似处理）。**注意，当我们取了复数场的表达式之后，原则上 $\vec{E}_0$ 可以是一个复矢量 – 其每个分量均可取复数且可以由不同的相位**。因此，$\vec{E}_0$ 的最一般形式为

$$\vec{E}_0=\vec{e}_xE_{x,0}+\vec{e}_yE_{y,0}=\vec{e}_x\left|E_{x,0}\right|e^{i\phi_x}+\vec{e}_y\left|E_{y,0}\right|e^{i\phi_y}\tag{8.2.1}$$

将其带入复场表达式 $\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$，再取实部，我们得到

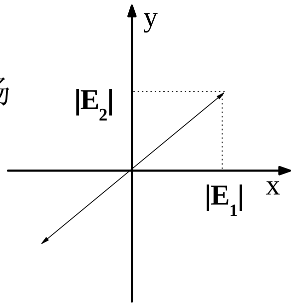
$$\begin{aligned}E_x(z,t)&=\left|E_{x,0}\right|\cos\left(kz-\omega t+\phi_x\right)\\ E_y(z,t)&=\left|E_{y,0}\right|\cos\left(kz-\omega t+\phi_y\right)\end{aligned}\tag{8.2.2}$$

显然，场随时间的振荡行为由四个参量：$E_{x,0}$ $E_{y,0}$ ϕ_x ϕ_y 确定。由（8.2.2）出发，在四个参量满足不同条件时，可以得到几种典型的偏振状态。

（A）线偏振

线偏振是最简单的情形。当 $\phi_x=\phi_y=\phi$ 时，电场随时间演化为

$$\begin{aligned} E_x(z,t)&=\left|E_{x,0}\right|\cos\left(kz-\omega t+\phi\right)\\ E_y(z,t)&=\left|E_{y,0}\right|\cos\left(kz-\omega t+\phi\right)\end{aligned}\qquad（8.2.3）$$

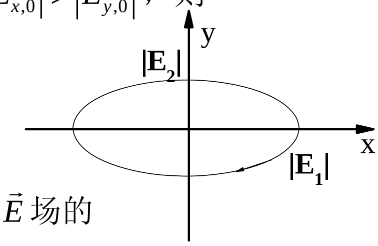


在任意一个确定的波阵面上（如取 z=0 的 xy 平面），电场只在一个方向上随时间来回振动，因此这种偏振状态称为线偏振。

（B） 椭圆偏振

在最一般情况下，即不对四个参量施加任何限制，则波的偏振状态都是椭圆偏振。考虑一个具体的例子：$\phi_x-\phi_y=\pi/2,\ \left|E_{x,0}\right|>\left|E_{y,0}\right|$，则

$$\begin{aligned} E_x(z,t)&=\left|E_{x,0}\right|\cos\left(kz-\omega t+\phi_x\right)\\ E_y(z,t)&=\left|E_{y,0}\right|\sin\left(kz-\omega t+\phi_x\right)\end{aligned}\qquad（8.2.4）$$



在任意一个确定的波阵面上，随着时间的演化，$\vec{E}$ 场的端点描出一个半长轴为 $\left|E_{x,0}\right|$，半短轴为 $\left|E_{y,0}\right|$ 的椭圆，故这种偏振状态称为椭圆偏振。 若 $\phi_x-\phi_y\neq\pi/2$，则椭圆的对称轴（长短轴）产生了一个转动，但偏振状态仍然是椭圆偏振。

（C） 圆偏振

进一步，当 $\left|E_{x,0}\right|=\left|E_{y,0}\right|=A,\ \ \phi_x-\phi_y=\pm\pi/2$ 时，电场分量为

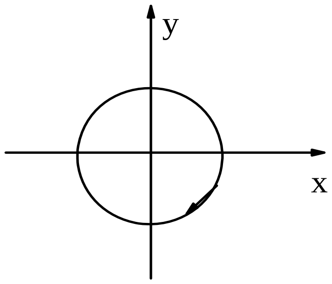
$$\begin{aligned} E_x(z,t)&=A\cos\left(kz-\omega t+\phi_x\right)\\ E_y(z,t)&=\pm A\sin\left(kz-\omega t+\phi_x\right)\end{aligned}\qquad（8.2.5）$$

对这种波，在任一波阵面上，$\vec{E}$ 的端点随时间的演化描出一个半径为 A 的圆，故称为圆偏振。进一步考虑两种情况，

（C.1）右旋圆偏振 $\phi_x-\phi_y=\pi/2$ 时，（8.2.5）式描述的是电场矢量顺时针旋转，称为右旋圆偏振。此时（8.2.5）可以重写为

$$\vec{E}_0=\sqrt{2}Ae^{i\phi_x}\vec{e}_{right}$$

其中



$$\boxed{\vec{e}_{right}=(\vec{e}_x-i\vec{e}_y)/\sqrt{2}} \qquad (8.2.6)$$

就是右旋偏振的单位矢量.

（C.2）左旋圆偏振　同理，$\phi_x-\phi_y=-\pi/2$ 时为左旋圆偏振。偏振态的单位矢量为

$$\boxed{\vec{e}_{left}=(\vec{e}_x+i\vec{e}_y)/\sqrt{2}} \qquad (8.2.7)$$

讨论：

（1）　看上去左右旋光的定义和我们的常识正好相反，似乎以“k 的方向与 E 的旋转方向成左/右手螺旋”来定义左右旋光会更容易使人习惯。这里的原因比较复杂，一个可能的解释是历史人们根据在某一个给定的时刻看到的电场由远及近在空间（z）传播而来时的旋转来定义的　（参考课堂上演示的偏振光动画）。

（2）　在目前 Metamaterial 的研究中，一个热门的课题就是如何利用 Metamaterial 来调控光波的偏振状态，比如实现由线偏振到圆偏振、椭圆偏振的转化，或者是两个垂直方向的线偏振光的相互转化。有兴趣的同学参考“**J. M. Hao, et. al., Phys. Rev. Lett. 99, 063908 (2007)**”.

§8.3 金属的等效介电常数 - Drude 模型

下面我们将开始研究导电介质中的电磁波特性。对任何一种新的电磁介质，在研究其电磁波传播特性之前，都要首先知道这种电磁介质的“本构关系”，不然，**Maxwell** 方程无法求解。事实上，这个世界之所以如此“色彩缤纷”，正是因为我们有各种具有不同的“本构关系”的电磁介质！本节中，我们将仔细探讨导电介质的本构关系 – 你们会发现导电介质与一般电介质非常的不同。

1. 色散介质的本构关系

上次课我们学习了电磁波在真空以及均匀各向同性非色散的电磁介质中的

行为，这两类介质的特点是ε_r,μ_r均大于 0，且不依赖于频率。从物理上讲，这种介质对电磁场的响应是“局域”以及“即时”的

$$D(\vec{r},t)=\varepsilon\vec{E}(\vec{r},t)\quad \vec{H}(\vec{r},t)=\mu^{-1}B(\vec{r},t) \tag{8.3.1}$$

亦即，此处、此时的电磁扰动（由$\vec{E}(\vec{r},t),\vec{B}(\vec{r},t)$决定）只会引发此处、此时的电磁相响应$\vec{P}(\vec{r},t),\vec{M}(\vec{r},t)$（进一步，$\vec{D}(\vec{r},t),\vec{H}(\vec{r},t)$）。然而一般来讲，材料中的电荷运动行为非常复杂，因此最后本构关系也非常复杂，“局域+即时”仅仅是一种理想情形，通常只是材料的真实响应在长波和低频下的近似。在第 1 章中我们已经指出，一般情况下材料的响应为（最一般的线性响应的形式）：

$$\begin{aligned}D(\vec{r},t)&=\int\varepsilon(\vec{r}-\vec{r}',t-t')\vec{E}(\vec{r}',t')d\vec{r}'dt'\\ B(\vec{r},t)&=\int\mu(\vec{r}-\vec{r}',t-t')\vec{H}(\vec{r}',t')d\vec{r}'dt'\end{aligned} \tag{8.3.2}$$

这当然使得我们求解 Maxwell 方程变得非常复杂。通常我们忽略“空间非局域效应”，即假设体系的响应在空间上为局域的。进一步，如果我们只考虑频率确定为ω的一支电磁波在此介质中运动，则 $\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$，代入（8.3.1）式可得

$$D(\vec{r},t)=\int\varepsilon(t-t')\vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t'}dt'=\varepsilon(\omega)\vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t} \tag{8.3.3}$$

其中，

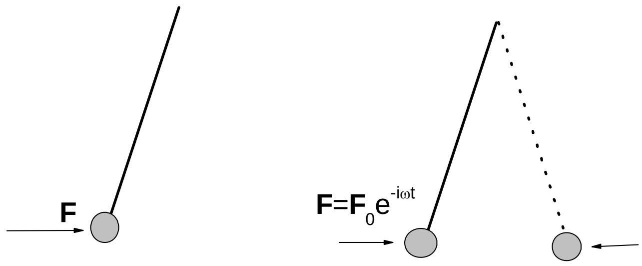
$$\varepsilon(\omega)=\int\varepsilon(t-t')e^{-i\omega(t'-t)}dt'=\int\varepsilon(\tilde{t})e^{i\omega\tilde{t}}d\tilde{t} \tag{8.3.4}$$

是时域响应函数的 Fourier 变换形式。因此本构关系此时变成（假设所有物理量均携带$e^{-i\omega t}$的时间变化因子）

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{D}(\vec{r})&=\varepsilon(\omega)\vec{E}(\vec{r})\\ \vec{B}(\vec{r})&=\mu(\omega)\vec{H}(\vec{r})\end{aligned}} \tag{8.3.5}$$

因此，无论再复杂的电磁介质，当其中的电磁波为单频时，其本构关系变成与常规电介质一样的（当然是在线性响应的前提下）。只不过，此种情形下ε μ的数值依赖于频率值，这种行为我们称为“色散”，ε μ依赖于频率的电磁介质我们称为“色散”介质。

我们可以把这个情况类比于一个秋千。当我们对一个秋千在 t 时刻给它一个推动力，它未必立即产生反应。但是，当我们对秋千施加一个随时间谐变的力，最终，这个秋千一定会以这个频率跟随外力振动，无论最初多么不情愿。



金属（更广义讲是导电介质）是非常重要的一类电磁介质。静态时金属的本构关系就是欧姆定律 $\vec{j}=\sigma_c\vec{E}$。当外电场随时间谐变时，即 $\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$，类似受迫振动，电流和电位移矢量 $\vec{j},\vec{D}$ 也带有时间因子 $e^{-i\omega t}$，即 $\vec{j}(\vec{r},t)=\vec{j}(\vec{r})e^{-i\omega t}$，$\vec{D}(\vec{r},t)=\vec{D}(\vec{r})e^{-i\omega t}$。此时，可定义频域的电导率 $\sigma(\omega)$ 和介电函数 $\varepsilon(\omega)$

$$\boxed{\vec{j}(\vec{r})=\sigma(\omega)\vec{E}(\vec{r}),\quad \vec{D}(\vec{r})=\varepsilon(\omega)\vec{E}(\vec{r})} \tag{8.3.6}$$

原则上讲，$\sigma(\omega),\varepsilon(\omega)$ 的严格求解应当借助于量子力学。对良导体，通常可以把体系看作电子自由地在晶格正离子组成的背景中运动 – 此既是自由电子气模型，也就是高能物理中所言的等离子体模型。在常温下，我们可以用经典理论来求解 $\sigma(\omega),\varepsilon(\omega)$。

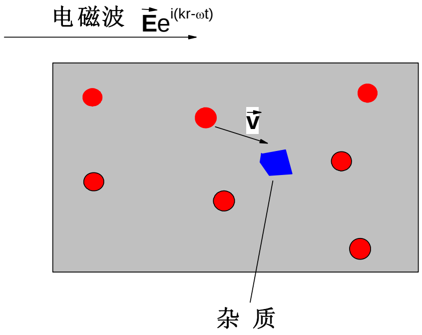
2．金属的有效电导率

当有一束单频的电磁波在等离子体中传播时，空间将有电场 $\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ 存在，则电子将受到电场力 $e\vec{E}$。同时，电子运动时将受到其他粒子（晶格亦即声子，杂质等）的散射而丢失能量及动量。描述这种散射力的最简单的模型是“迟逾时间近似”，即散射力可写成

$$\vec{F}_{sca}=-\frac{m\vec{v}}{\tau} \tag{8.3.7}$$

这个式子的物理意义是：电子平均 τ 时间受到一次“异种粒子”的散射而丢失其所有动量。因此，电子的运动方程为

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}=e\vec{E}-\frac{m\vec{v}}{\tau} \tag{8.3.8}$$



在长波近似下，在电子来回运动的区间内可以近似认为电场不发生显著变化：$\vec{E}(\vec{r}) \sim \vec{E}_0$。显然电子将在单频外场力的作用下做“受迫振动”。将电子运动的试解 $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-i\omega t}$ 代入（8.3.8）可得

$$\vec{v}_0 = \frac{-e\vec{E}_0}{im(\omega + i/\tau)} \tag{8.3.9}$$

因此，电子的运动速度为

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-i\omega t} = \frac{-e\vec{E}_0 e^{-i\omega t}}{im\left(\omega + i/\tau\right)} \tag{8.3.10}$$

与之前一样，以上复数形式的表达式只是为计算方便使用（基础是方程是线性方程!），真正有物理意义的是其实部。根据电流密度的定义，我们发现

$$\vec{j}(\vec{r},t) = n_e e\vec{v}(\vec{r},t) = -\frac{n_e e^2}{im(\omega + i/\tau)}\vec{E}(\vec{r},t) \tag{8.3.11}$$

式中 n_e 为单位体积内的电子数目。将（8.3.11）与（8.3.6）对比，可得电导率为

$$\boxed{\sigma(\omega) = -\frac{n_e e^2}{im(\omega + i/\tau)}} \tag{8.3.12}$$

对此做如下讨论：

（1） 当 $\omega \to 0$ 时，上式应当回到直流情况下金属的电导率 σ_c。将（8.3.12）取 $\omega \to 0$ 的极限，有 $\sigma_c = \frac{n_e e^2}{m}\tau$。的确，这就是迟逾时间近似下金属直流电导率的结果，故人们常用金属的直流电导率的实验值来确定参数 τ。

（2） 复数形式电导率不能只取实部！其实部、虚部都有明确的物理意义！对场量（如 $\vec{E}, \vec{j}, \vec{v}$）我们才取其实部讨论，对电导率这个中间产物我们不可以这样做。可以写成 $\sigma(\omega) = \mathrm{Re}(\sigma(\omega)) + i\,\mathrm{Im}(\sigma(\omega))$，可以证明实部对应着

实际的能量耗散，但虚部并不对应能量耗散 - 这与直流电导率有着本质的不同！

（3） 对良导体$\tau \sim 10^{-14} s$，因此

（A）在 GHz 以下的频段（微波），$1/\tau >> \omega$，此时$\sigma(\omega) \approx \sigma_c$，即有效电导率就是静态时的电导率。这里的原因是电子碰到一次散射的平均时间τ远小于电场发生变化的时间间隔$T \sim 1/\omega$，电场还没有发生显著变化电子已经与杂质碰撞了成千上万次。因此这种条件下电导率与直流时相比并没有什么明显不同。

（B）在可见光频段，$1/\tau << \omega \sim 10^{15} s^{-1}$，此时$\sigma(\omega) \approx i\dfrac{n_e e^2}{m\omega}$，亦即，复数电导率的实部（对应耗散部分）远小于虚部（非能量耗散部分）。这里的物理图像是，电子在高频电场的作用下来回运动，还没有碰到散射（需要费时$\sim\tau$）就已经折返。因此，此时电子的行为与静态时极不相同，其主要行为是与电场相互交换能量（表现为电导率呈现虚部，电场不对电流做功），而不是与杂质碰撞耗散能量。

3．金属有效介电函数

有了金属的有效电导率，我们可以进一步导出其**有效介电函数**。根据 Maxwell 方程组的第 4 条方程，在单频条件下，

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{H} = \left[\sigma(\omega) - i\omega\varepsilon_0\right]\vec{E} \tag{8.3.13}$$

一般在静电、静磁条件下，我们把金属中的电流作为独立于金属的“自由电流”来处理，也就是说，在 Maxwell 方程中明显地写出$\vec{j}$这一项，而把去除了“传导电流”的金属的介电响应认为和真空无异（$\varepsilon = \varepsilon_0$），当然有时也会把金属中的“价带”电子（束缚电荷）的影响考虑进去，此时，可取$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$。

然而在交变条件下，电流和电场一样随着时间协变，某种意义上讲，传导电流也变成了束缚在金属中响应电流。因此，通常此时将金属也看成一种电介质，把传导电流作为金属的束缚电流来考虑。对一个电介质，（8.3.13）应当写成

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega\varepsilon(\omega)\vec{E} \tag{8.3.14}$$

两式比较可得金属的有效介电常数为

$$\boxed{\varepsilon(\omega)=\varepsilon_0+i\frac{\sigma(\omega)}{\omega} \quad\Rightarrow\quad \varepsilon_r(\omega)=1+i\frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0\omega}} \tag{8.3.15}$$

将（8.3.11）代入上式，即得金属的有效介电常数

$$\boxed{\varepsilon_r(\omega)=1-\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+i/\tau)}} \tag{8.3.12}$$

其中，

$$\omega_p=\sqrt{\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m}} \tag{8.3.13}$$

是个只与金属性质有关的常量，叫做等离子共振频率。（8.3.12）即是著名的 Drude 模型，它非常好地描述了良导体从直流（$\omega=0$）到紫外（$\omega>10^{16}Hz$）的整个频谱的介电行为。ω_p 描述的是自由电子气在外场下的一个共振行为 – 显然密度越大，质量越小，这个集体振动的频率就越大。良导体的 ω_p 大都在紫外频区。

我们讨论两种典型情况下的金属的介电行为：

（A） GHz 及以下 -

$$\varepsilon_r(\omega)\approx -const.+\frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega}\approx\frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega}, \tag{8.3.14}$$

此时金属的 ε_r 具有一个极大的正的虚部。

（B） 光波段：

$$\varepsilon_r(\omega)\approx 1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \text{（对金、银等良导体），} \tag{8.3.15}$$

（C） 从光波段到 GHz，$\varepsilon_r(\omega)$ 有一个由负实部主导到正的虚部主导的一个转变。

习题

补充题：

1）Ag 的电子密度为 $n_e=5.88\times10^{28}m^{-3}$，静态电导率为 $\sigma_c=6.17\times10^{7}(\Omega\cdot m)^{-1}$，计算迟逾时间 τ 和等离子共振频率 ω_p；分别在 $f=1GHz$，$\lambda=1.5\mu m$，$\lambda=550\mu m$ 三个条件下计算其相对介电常数。

2）将线偏振的光波 $\vec{E}(\vec{r},t)=E_0(\vec{e}_x+\vec{e}_y)e^{i(kz-\omega t)}$ 分解成左旋光和右旋光的叠加。

3）在交变条件下，计算电场对金属中的电流的做功的瞬时值及时间平均值，证明复电导率 $\sigma(\omega)$ 的虚部不对应体系的能量耗散，而只有 $\sigma(\omega)$ 的实部才对应能量耗散。

思考、阅读文献，并整理成 Note

1）课件上推导的是金属的“局域”的介电函数的行为。然而实际情况下，一束电磁波照过来，电磁场应当是 $\vec{E}_0 e^{i(kr-\omega t)}$，电场并非均匀场。为什么我们可以设电场为均匀场来计算 ε？这样做有什么后果？另外，我们并没有考虑磁场带来的 Lorentz 力？你预期考虑了 Lorentz 力之后结论会有何不同？

2）仔细讨论复电导率的实部和虚部的物理涵义。若 $\sigma(\omega)$ 的虚部不对应能量的耗散，那么它的作用到底是什么？

3）查阅参考书，计算在可见光照射下，金属中电子的典型“活动范围”。由此理解为什么高频下“自由电子”其实不在自由，而我们通常把自由电子作为金属的束缚电子来处理。