第十四讲

上次课：

- 静磁场的唯一性定理（边条 $\vec{n}\times\vec{A}$ or $\vec{n}\times\vec{H}$ 确定，解唯一确定）
- 静磁场的矢势解法 **– 2D** 问题，与电场类比

---

§ 5.4　磁场的标量势解法

1．磁标势

上节课我们介绍了磁场的矢势解法。尽管物理图像直接，但因 $\vec{A}$ 是矢量场，运算极其繁复，实用性（特别是解析计算）不强。对比静电场，如果能引入标量势就容易多了。带着这个目的，让我们考察静磁场满足的方程

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{B}=0, \\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f \end{cases} \tag{5.4.1}$$

如果所考察的空间区域没有传导电流，则有

$$\nabla\times\vec{H}=0 \tag{5.4.2}$$

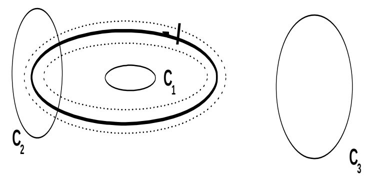
上式提醒我们似乎可以据此引入标势 φ_m（称为磁标势）

$$\vec{H}=-\nabla\varphi_m \tag{5.4.3}$$

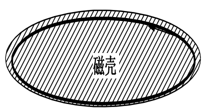
但是，只有这个条件还不够，原因是能引入 φ_m 的前提条件 $\vec{H}$ 是保守场，亦即

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l}=0 \tag{5.4.4}$$

其中 *C* 为空间中的任意闭合回路。只有 H 场对任意环路的积分都为 0，才能对一个点唯一确定标势。在很多情况下，（5.4.2）已经可以导致保守场，但有些情况下，即使考虑的空间的局域点处没有电流，（5.4.4）仍不成立。比如对一个载流线圈，若我们做一个轮胎状的东西将空间有电流的部分完全清除（如右图所示），选择 C1，C2，C3 等 3 个环路，对 C1，C3 来说，（5.4.4）均成立，对 C2 来讲不成立。$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}\Big|_{C_2}=I$，意味着是空间同一点的标势值不唯一。



因此，仅有“无传导电流”这一条件还不能



保证φ_m的单值性。

为了解决这个问题，我们引入以电流环为边界的任意曲面，并规定积分路径不允许穿过此曲面。直观地看，这个以电流环为边界的任意曲面对积分路径来说是个刚性的屏障，使得任何闭合积分路径都穿不过去，这样，φ_m不再是多值的了。为此，从曲面的一侧穿过曲面到另一测，磁标势φ_m是不连续的，存在着大小为I的跃变，即

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = -\int_{+}^{-} \nabla\varphi_m \cdot d\vec{l} = \varphi_m^{+} - \varphi_m^{-} = I \qquad (5.4.5)$$

所以有时称此曲面为“磁壳”，而（5.4.5）作为磁标势在磁壳上的边界条件。因此，为了引入“磁标势”，我们必须，

- 构造合适的“磁壳”已使得空间变成“无源”且“单连通”的空间；
- 设置合适的边界条件。

2．线性磁介质中磁场问题

对于顺磁、抗磁两种线性磁介质，本构关系$\vec{B}=\mu\vec{H}$成立。因此在定义了合适的磁壳之后的区域内，有$\vec{B}=-\mu\nabla\varphi_m$。将其带入（5.4.1）式可得$\nabla\cdot\left(\mu\nabla\varphi_m\right)=0$。在分块均匀的每一块磁介质内部，$\mu$是常数，因此有

$$\nabla^2\varphi_m = 0 \qquad (5.4.6)$$

我们发现此时磁标势φ_m满足和电标势φ完全一样的 Laplace 方程，事实上，在这种条件下，电和磁有着完美的对称

$$\begin{array}{lcl}
\nabla\cdot\vec{D}=0 & \Leftrightarrow & \nabla\cdot\vec{B}=0 \\
\nabla\times\vec{E}=0 & \Leftrightarrow & \nabla\times\vec{H}=0 \\
\vec{D}=\varepsilon\vec{E} & \Leftrightarrow & \vec{B}=\mu\vec{H} \\
\varepsilon & \Leftrightarrow & \mu \\
\varphi & \Leftrightarrow & \varphi_m \\
\vec{E}=-\nabla\varphi & \Leftrightarrow & \vec{H}=-\nabla\varphi_m
\end{array} \qquad (5.4.7)$$

因此，无须推导我们就可以直接两块磁介质界面上的标势的边界条件

$$\varphi_{m1}=\varphi_{m2};$$
$$\mu_1\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}\right)_1=\mu_2\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}\right)_2 \qquad (5.4.8)$$

所以，对无源的线性磁介质中磁场问题，需在边条(5.4.8)条件下求解方程(5.4.6)。解法技巧可借鉴电场的标势问题---唯一应当注意的是此时 E 与 H 对应，尽管物理上讲 H 不是真实的磁场！

[例 1] 真空中将一个半径为 R 的磁介质球（μ）放置于均匀磁场（$\vec{B}=B_0\hat{e}_z$）中，求空间的 B 场分布。

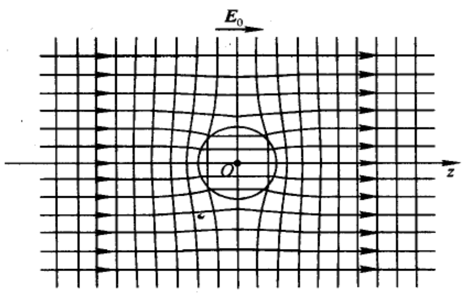


图 4.6

解：这个问题和第十一讲中的例 5 一样，只要把那里的 $E_0\to H_0,\varepsilon\to\mu$，即可求出空间的磁标势

$$\varphi_{m1}=-H_0 r\cos\theta+\frac{\mu-\mu_0}{2\mu_0+\mu}R^3H_0\frac{1}{r^2}\cos\theta$$

$$\varphi_{m2}=-\frac{3\mu_0}{2\mu_0+\mu}H_0 r\cos\theta$$

定义 $$\boxed{\vec{m}=\frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}4\pi R^3H_0\hat{z}},$$

空间的 H 场可因此求出

$$\vec{H}_1=-\nabla\varphi_{m1}=H_0\hat{z}-\frac{1}{4\pi}\frac{\vec{m}-3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}}{r^3}$$
$$\vec{H}_2=-\nabla\varphi_{m2}=\frac{3\mu_0}{2\mu_0+\mu}H_0$$

进一步可以求出 B 场，

$$\vec{B}_1=\mu_0\vec{H}_1=B_0\hat{z}-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}-3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}}{r^3}$$
$$\vec{B}_2=\mu\vec{H}_1==\frac{3\mu}{2\mu_0+\mu}B_0$$

注意到 $\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{m}}{r^3}$ 正是真空中放置于原点的一个磁矩为 $\vec{m}$ 的磁偶极子产生的磁感应场，因此磁介质球被磁化后对外界表现为一个磁偶极子。磁偶极子的磁标势和电偶极子的电标势之间有着很好的对称性：

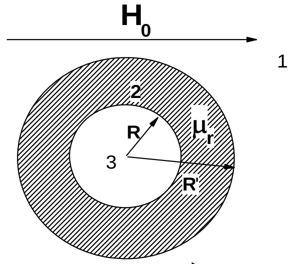
$$\boxed{\varphi_m = \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{m}\cdot\hat{r}}{r^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}}$$

与静电场问题类似，磁介质球内部也是均匀磁场，大小小于外场（因为有退磁场的原因）

[例 2] 均匀磁介质球壳放在均匀外磁场 $\vec{H}_0$ 中，求场分布。

解 设介质球壳的内外半径分别为 R 、R'，球壳的磁导率为 μ 。取 $\vec{H}_0$ 方向为极轴方向的球坐标系，把空间分成三个区域：$r > R',\ R' > r > R,\ r < R$ 。三个区域都没有传导电流，因此可使用磁标势，

$$\nabla^2\varphi_{m1} = 0 \quad r > R',$$
$$\nabla^2\varphi_{m2} = 0 \quad R' > r > R,$$
$$\nabla^2\varphi_{m3} = 0 \quad r < R.$$



相应的边界条件为

$$\varphi_{m1} \to -H_0 r\cos\theta \qquad r \to \infty \text{时}$$

$$\varphi_{m1} = \varphi_{m2},\quad \frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial r} = \mu_r\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial r}, \qquad r = R'$$

$$\varphi_{m2} = \varphi_{m3},\quad \mu_r\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial r} = \frac{\partial\varphi_{m3}}{\partial r}, \qquad r = R$$

$$\varphi_{m3}\text{有限} \qquad r \to 0\text{时}$$

原则上，我们仍应将 $\varphi_{m1},\varphi_{m2},\varphi_{m3}$ 展开成本征函数的叠加。但此时激发外场为均匀场，只有 l=1 项非 0，因此我们可以引入如下试解：

$$\varphi_{m1} = \left(c_1 r + \frac{d_1}{r^2}\right)\cos\theta,$$
$$\varphi_{m2} = \left(c_2 r + \frac{d_2}{r^2}\right)\cos\theta,$$
$$\varphi_{m3} = \left(c_3 r + \frac{d_3}{r^2}\right)\cos\theta,$$

根据边条（1），（4）我们得知

$$c_1 = -H_0,\quad d_3 = 0$$

利用边值关系（2）-（3）可以确定系数 d_1, c_2, d_2, c_3（过程从略）。我们比较关心其中的 2 项

$$d_1=\frac{H_0(\mu_r-1)(1+2\mu_r)(R'^3-R^3)}{(2+\mu_r)(1+2\mu_r)-2(\mu_r-1)^2(\frac{R}{R'})^3},$$

$$c_3=\frac{-9\mu_r H_0}{(2+\mu_r)(1+2\mu_r)-2(\mu_r-1)^2(\frac{R}{R'})^3}.$$

下面分析一下结果。从磁标势的结果中可以看出，球壳外的场是均匀场和偶极子场的叠加。与磁偶极子的标势对比发现整个球壳磁化后对外场表现为一个磁偶极矩$4\pi d_1$的磁偶极子。分析几个极限行为：

1） $R\to R'$时， $m=4\pi d_1\to 0$，磁矩消失

2）当μ_r很大时，磁偶极矩

$$m=4\pi d_1\approx 4\pi H_0 R'^3$$

它与R的大小无关，与一个金属球（或者是金属球壳）在外场的响应类似。

3）球壳内的场是均匀场，其大小为c_3。当$\mu_r\to\infty$时，球壳内的磁场

$$\vec{H}=\frac{9\vec{H}_0}{2\mu_r\left[1-(\frac{R}{R'})^3\right]}\to 0$$

这就是所谓的磁屏蔽。选择的材料μ_r越大，壳层越厚（即$\frac{R}{R'}<<1$），则屏蔽效果越好。

注：

（1）　在电的世界中，我们有自由电荷，而由自由电荷组成的介质就是金属导体，其对电场完全屏蔽，相当于$\varepsilon_r\to-\infty$　的电介质；前面我们讲到当$\varepsilon_r\to\infty$时，在静电学的范畴内也可以完全等效于一个导体。在磁的世界中，由于没有磁单极子的存在，我们没有类似金属导体的“磁导体”。然而要实现类似一个“磁导体”一样对磁场的响应，我们可以利用$\mu_r\to\infty$的磁介质 – 在静磁学的范畴内，其响应与“磁导体”一致。然而要实现高的ε_r,μ_r并不容易，目前的一个前沿课题就是基于“Metamaterial”的理念来实现任意的ε_r,μ_r。

（2）　计算多层介质膜对外场的响应时，由于直接计算边值关系比较复杂，有时常采用“转移矩阵”的方法。其理念是根据 l 层和 l+1 层之间的边值关系确定$\{c_l,\ d_l\}$与$\{c_{l+1},\ d_{l+1}\}$之间的关系：

$$\begin{pmatrix} c_{l+1} \\ d_{l+1} \end{pmatrix} = T_{l+1,l} \begin{pmatrix} c_l \\ d_l \end{pmatrix}$$，*以此类推可以推知最外层和最内层的转开系数之间的关系*

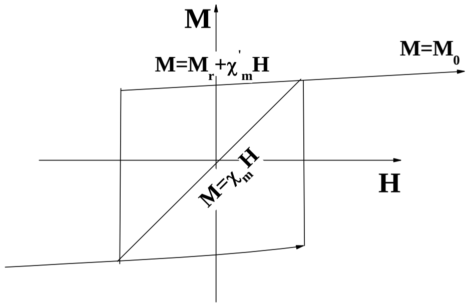
$$\begin{pmatrix} c_N \\ d_N \end{pmatrix} = \prod T_{l+1,l} \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}$$，*最后根据最外层和最内层的边值条件确定相应系数。*

3．铁磁介质问题

铁磁介质中 $\vec{B} \neq \mu \vec{H}$ ，因此之前对线性介质推出的方法不再成立。但 $\vec{B}/\mu_0 = \vec{H} + \vec{M}$ 总是成立的，因此（5.4.1）式中第一式变为

$$\nabla \cdot \vec{H}(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{M}(\vec{r}) \qquad (5.4.9)$$

若空间为无传导电流并且是单连通的，则取磁标势 $\vec{H} = -\nabla \varphi_m$ 。在铁磁介质的问题中，$\vec{M}$ 是 H 的函数，由磁滞回路决定，换言之，$\vec{M}$ 是 φ_m 的隐函数，这使得（5.4.9）成为 φ_m 的一个非常复杂的方程，很难处理。必须明确知道 M 和 H 的关系才可以求解。右图是个非常典型的铁磁介质的磁化曲线，从中我们发现在不同的过程对应不同的物理。



A 初始磁化过程

铁磁介质一开始处于无磁性状态，加上磁场后磁矩出现。在这个过程中 $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ ，与顺磁介质一样（见上图），相应的方程为（5.4.6）。

B 饱和磁化

当 $H \to \infty$ 时，铁磁介质达到饱和磁化，$\vec{M} = \vec{M}_0$，再加外场都不会增加磁矩的大小。因此 $\nabla \cdot \vec{M} = \nabla \cdot \vec{M}_0(\vec{r})$ 就变成了一个决定磁标势的有效的“源”，因此可定义

$$\rho_m = -\nabla \cdot \vec{M}_0 \qquad (5.4.10)$$

这里 ρ_m 称为**磁荷密度**，而磁标势满足的方程为标准的 Poisson 方程

$$\boxed{\nabla^2 \varphi_m = -\rho_m} \qquad (5.4.11)$$

在这里，磁荷对磁标势起的作用于电荷对电标势的作用类似。

****** 以下为选读内容

C 靠近剩余磁矩点时的行为

当体系被饱和磁化后再逐渐撤掉外磁场，在一般情况下，这个过程中 H 与 M 的关系可近似为

$$\vec{M} = \vec{M}_r + \chi_m^{'} \vec{H} \qquad (5.4.12)$$

其中 $\vec{M}_r$ 为剩余磁矩。将（5.4.12）代入（5.4.10），并整理可得

$$(1+\chi_m^{'})\nabla^2\varphi_m = \nabla\cdot\vec{M}_r(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \nabla^2\varphi_m = -\rho_m/\mu_r^{'} \\ \nabla\cdot\vec{M}_r(\vec{r}) = -\rho_m \end{cases} \qquad (5.4.13)$$

此时的物理行为仍然是有“磁荷”作为源的 Possion 方程，只是处于一个顺磁介质的背景中。可以说是将体系的顺磁性与饱和磁矩两样贡献分开。

******

下面求 φ_m 在两个磁介质交界面上的关系。

根据 $\int H\cdot dl = -\Delta\varphi_m$，只要 H 在边界处不发散，边条

$$\boxed{\varphi_{1m} = \varphi_{2m}} \qquad (5.4.14)$$

始终成立。考虑（5.4.9）对应的边界条件，显然有 $\vec{e}_n\cdot\left(\vec{H}_1-\vec{H}_2\right) = -\vec{e}_n\cdot\left(\vec{M}_1-\vec{M}_2\right)$，对情况 B 有

$$\boxed{\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}\right)_1 - \left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}\right)_2 = \vec{e}_n\cdot(\vec{M}_0^1-\vec{M}_0^2)} \qquad (5.4.15)$$

************* 以下为选读内容

对情况 C 有：

$$\mu_{r1}^{'}\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}\right)_1 - \mu_{r2}^{'}\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}\right)_2 = \vec{e}_n\cdot(\vec{M}_r^1-\vec{M}_r^2) \qquad (5.4.15')$$

****

可见，交界面上的关系和静电介质完全类似。因此，引入磁荷和磁标势的好处在于我们可以借用静电学中的方法，第四章中讨论的许多方法都可运用。这在处理永久磁石所激发的磁场等问题时特别方便 ---- 因为对此类问题，体系本来就不

存在“传导电流”有是单连同的，因此磁标势方法天然适用。

[例 5] 求半径为 R 的球形永久磁铁（假设被饱和磁化 $\vec{M}=M_0\hat{z}$）所激发的磁场。

解 把空间分成球内和球外两部分，整个空间不存在传导电流，因此球内外均可用磁标势。球外空间，没有磁矩因此磁荷 $\rho_m=0$，球内区域有磁矩，但其为常数因此仍然没有磁荷。所以 $\varphi_{m1},\varphi_{m2}$ 均满足 Laplace 方程：

$$\nabla^2\varphi_{m1}=0,\quad \nabla^2\varphi_{m2}=0 \qquad (5.4.16)$$

体系的边值关系：$r=R$（为球半径）时

$$\begin{cases}\varphi_{m1}=\varphi_{m2}\\ \dfrac{\partial\varphi_{m2}}{\partial r}-\dfrac{\partial\varphi_{m1}}{\partial r}=\vec{e}_n\cdot\vec{M}_0=M_0\cos\theta\end{cases} \qquad (5.4.17)$$

边界条件：$r\to\infty$ 时 $\varphi_{m1}\to 0$；$r\to 0$ 时 φ_{m2} 为有限值。 （5.4.18）

将 $\varphi_{m1},\varphi_{m2}$ 展开成本征函数的叠加，根据（5.4.17）中边界条件的对称性，可以预期只有 l=1 项非 0（因为只有 l=1 项带有 $\cos\theta$ 的角度依赖关系）。只保留 l=1 项，再考虑了（5.4.18）对解的限制，则试解为

$$\varphi_{m1}=\frac{A}{r^2}\cos\theta,\quad \varphi_{m2}=Br\cos\theta, \qquad (5.4.19)$$

代入（5.4.17）得

$$\begin{cases}\dfrac{A}{R^2}=BR\\ B+2\dfrac{A}{R^3}=M_0\end{cases} \qquad (5.4.20)$$

解之可得

$$A=\frac{M_0R^3}{3},\qquad B=\frac{M_0}{3} \qquad (5.4.21)$$

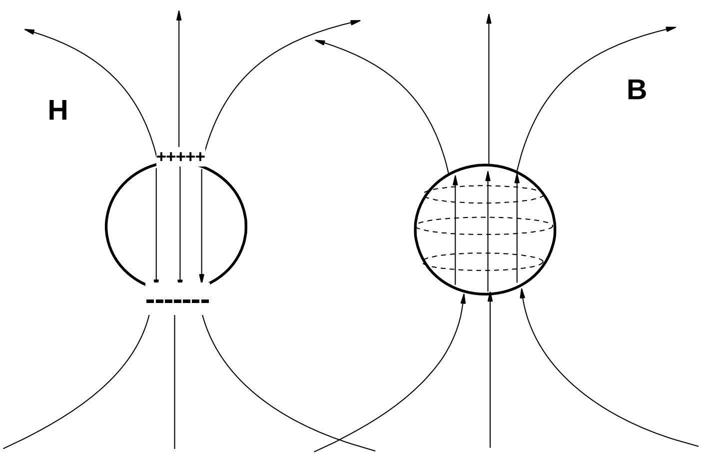
所以 $$\varphi_{m1}=\frac{M_0R^3}{3}\frac{1}{r^2}\cos\theta,\quad \varphi_{m2}=\frac{M_0}{3}r\cos\theta. \qquad (5.4.22)$$

可见，球外空间的磁场是偶极场，其磁偶极矩为 $\vec{m}=\dfrac{4\pi}{3}R^3\vec{M}_0$

球内的磁场强度 $\vec{H}=-\vec{M}_0/3$

球内的磁感应强度为 $\vec{B}/\mu_0=\vec{H}+\vec{M}=\dfrac{2}{3}\vec{M}_0$

这时候比较 B 场与 H 场的行为很有意思。B 场线的法向是连续的，（因为 $\nabla\cdot\vec{B}=0$），但其在球的表面切向分量不连续（因 $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}_M=\mu_0\nabla\times\vec{M}\neq 0$，有磁化电流面密度）。H 场与电场的行为类似，与 B 恰恰相反 – 其法向不连续，因为 $\nabla\cdot\vec{H}=\rho_M$，但其切向却连续。***B 场看到的是磁化"电流"，看不到"磁荷"，H 场恰恰相反，看到的是"磁荷"，看不到"电流"。***



习题：

5.11

补充题

利用磁标势方法重新求解第十三讲中的例题 3，体会标势与矢势法的异同。

整理下面的问题写成 Note（供学有余力的同学选作）：

（1） 根据上课的提示，建立多重球壳结构的磁标势解法的转移矩阵方法；

（2） 求解下图所示的问题-半径为 R 的磁介质球（磁导率为 μ_2）外面包一层另外的磁介质（磁导率为 μ_1），总的双层球的半径为 R'，将这样一个体系放置于第三种磁介质（磁导率为 μ）中，施加均匀磁场，问体系的有效偶极子大小等于多少？调整 μ 的大小，问什么条件下体系的有效偶极矩消失？