第十七讲

上次课

- 似稳场（准静场，Quasi-static field）

  忽略“位移电流项”== 忽略“辐射项”;

  很多物理问题可以在这个近似下简化处理

- 似稳条件

  场的时域变化足够慢： $\omega << \omega_\sigma = \dfrac{\sigma_c}{\varepsilon}$ （金属中）

  场的空间变化足够慢： $R << \dfrac{\lambda}{2\pi}$ （介质中）

- 场的扩散

  准静极限下，导电介质中的场满足扩散方程 --- $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\vec{H},\vec{E}\right)=\dfrac{1}{\mu\sigma_c}\nabla^2\left(\vec{H},\vec{E}\right)$

  扩散系数反比于电导率。物理：自由电荷对电场有屏蔽效应，因而导电性能越好，越会阻碍电场的扩散。

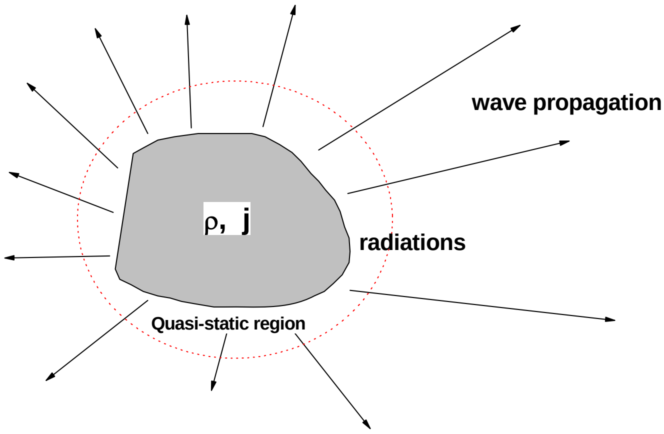
- 趋肤效应

  高频下电流分布在导线的表面，趋肤深度 $\delta=\sqrt{\dfrac{2}{\mu\omega\sigma_c}}$

第八章 电磁波的传播

上一讲我们指出，当“准静条件”满足时，可以将“位移电流”项弃掉，亦即将“辐射”项弃除，此时电磁能量完全被束缚在电荷、电流的附近。然而一般情况下位移电流项不能忽略。当“位移电流”加上之后，电场、磁场就不再束缚在电荷、电流的附近，在没有电荷、电流的自由空间也可以因为电磁场之间的相互转化而存在 --- 这种场存在的形式就是“电磁波”，Maxwell 方程最伟大的预言！ 从这一章开始，我们将进入电磁波这一神奇的世界。虽然电磁波原则上是由电荷、电流“辐射”出来的，但我们将“电磁辐射”这部分内容推迟到第十二章讨论。 在本章及下一章中，我们将假设电磁场已经从“辐射源”中辐射出来了，在这个基础上我们先研究在电磁波在不同介质中是如何传播的。 这些电磁

媒介包括电介质、金属中以及下一章介绍的波导等。



§8.1 电磁波在非导电介质中的传播

考虑最简单的情形 --- 在无限大的无源非导电的介质中的电磁波的传播行为。 此时麦克斯韦方程组为

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D}=0 \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\times\vec{H}=\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{D} \end{cases} \tag{8.1.1}$$

其中 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E};\ \vec{B}=\mu\vec{H}$。假定介质均匀且暂时不考虑色散特性，则 ε,μ 均为常数（色散介质指的是 ε,μ 随频率变化的材料，我们随后讲述）。（8.1.1）是电磁场耦合在一起的方程，不好求解，下面我们试图得到关于电场的方程。将第二条方程两边作用 $\nabla\times$，则有

$$-\nabla^2\vec{E}+\nabla\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)=\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{B}=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right) \tag{8.1.2}$$

根据第一条方程，有 $\nabla\cdot\vec{E}=0$，则电场满足的方程为

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E}=0 \tag{8.1.3}$$

式中

$$v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu} \tag{8.1.4}$$

基于同样的数学，我们发现磁场满足一样的方程

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{B} = 0 \tag{8.1.5}$$

(8.1.3)和（8.1.5）式是标准的波动方程。与大家在力学中学到的绳波所满足的方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)U(x) = 0 \tag{8.1.6}$$

相比，这里不同是：（1）场量是矢量，（2）传播方向不仅仅是向 x 方向。这给我们计算带来了一些麻烦，但设定传播方向后，每一个场的分量来讲都是满足与绳波一样的标量方程。考虑到（8.1.6）的解为 $U(x) = A\cos\left(kx - \omega t + \varphi\right)$，推广到电磁波的情形，则（8.1.3）和（8.1.5）的试解可以写为

$$\begin{pmatrix} \vec{E}(\vec{r},t) \\ \vec{B}(\vec{r},t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix} \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi\right) \tag{8.1.7}$$

其中 $\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{k}, \omega, \varphi$ 均为常数。代入(8.1.3)及（8.1.5）后发现试解（8.1.7）满足方程，但 k, ω 之间需满足关系式

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{v^2} = 0$$

整理可得

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad \Rightarrow \quad k = \pm\omega\sqrt{\varepsilon\cdot\mu}} \tag{8.1.8}$$

（8.1.8）式是电磁波传播的色散关系，对波的传播性质有重要意义。

注：

[1] 对任何波动方程，我们首先要问的是它的色散关系（注意不要和本构关系混淆!），亦即，频率 ω（时域振动性质）与波矢 k（空间域的振动性质）之间的关系。这是波的大部分性质的基础，若色散关系相同，即使不同的波（如绳波和电磁波）也具有基本相似的性质。往大了说，色散关系描述的其实是能量（对应于 ω）和动量（对应 k）之间的关系！

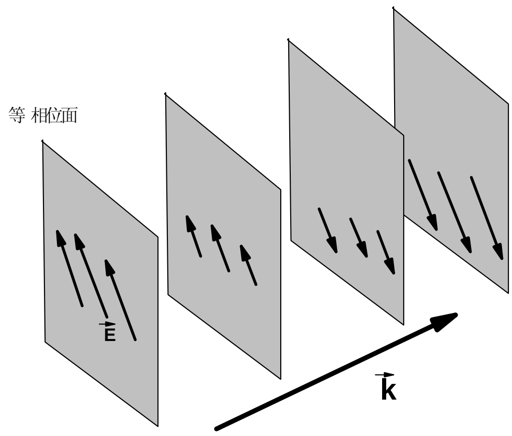
[2] （8.1.7）式只是自由空间波动方程的一种试解，你能想出其它形式的试解吗？

我们对得到的电磁波的解讨论如下：

(1)（8.1.7）式中的 $\vec{E}_0, \vec{B}_0$ 代表振幅，$\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\varphi\right)$ 称为振动的相位。在给定时刻，方程

$$\vec{k}\cdot\vec{r}=\text{常数}, \tag{8.1.9}$$

所定义的曲面上相位相等，波场 $\vec{E}, \vec{B}$ 也就相同，这个曲面叫作等相位面。显然满足（8.1.9）所定义的曲面为一平面，其垂直于 $\vec{k}$，故（8.1.7）所描述的波称为**平面波**。还可能将试解（8.1.7）写成其他形式，如球面波或者是柱面波，分别对应的等相位面为球面或者是柱面。



(2) 波长 λ 的定义为两个相位差为 2π 的等相位面之间的距离（因为在第 2 个平面上，场量经过一个周期的振动回到第 1 个平面上的值）。显然

$$k\cdot\lambda=2\pi$$

即

$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \tag{8.1.10}$$

$\vec{k}$ 被称为波矢量。

(3) 波速 等相位面的传播速度被称为波的**相速度**。设 t 时刻等相位面在 r 处，$t+\Delta t$ 时刻该等相位面垂直于 k 运动到 $r+\Delta r$ 的位置，则有

$$\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\varphi=\text{常数}=k\cdot(r+\Delta r)-\omega(t+\Delta t)+\varphi,$$

故相速度为

$$v_P = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \omega/k\ ,\tag{8.1.11}$$

或

$$v_P = 1\Big/\left(\sqrt{\varepsilon}\cdot\sqrt{\mu}\right),\tag{8.1.12}$$

(8.1.12)式即是平面电磁被传播的速度，它与介质的性质有关，真空中有 $\varepsilon=\varepsilon_0,\mu=\mu_0$，故 $v_P = 1\Big/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = c$ 为光速，介质中的波速 $v_P = 1\Big/\left(\sqrt{\varepsilon}\cdot\sqrt{\mu}\right) = c/\left(\sqrt{\varepsilon_r}\cdot\sqrt{\mu_r}\right) = c/n$，而 $\boxed{n=\sqrt{\varepsilon_r}\cdot\sqrt{\mu_r}}$ 被定义为材料的折射率。

注：此处折射率的定义与常规课本上略有不同，但其实更基本，因为它对 ε,μ 分别大于、小于 0 四种情况均正确。关于 ε,μ 均小于 0 的情况我们在后面还会分析。

(4) 频率/周期 相邻两次振动之间的时间为周期 *T*，单位时间内的振动次数为频率 *f*. 在一个确定的位置处，场量随时间振荡，*T* 是两个波峰之间的时间差。容易求得：$\omega T = 2\pi \Rightarrow T = 2\pi/\omega$。则振动频率为 $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$。经常把 $\omega = 2\pi f$ 称为***角（圆）频率***，把 *f* 称为***线频率***。

(5) 为了运算方便，常常把平面波写成复数形式，即

$$\begin{pmatrix}\vec{E}(\vec{r},t)\\ \vec{B}(\vec{r},t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{E}_0\\ \vec{B}_0\end{pmatrix} e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\varphi\right)}\tag{8.1.13}$$

(8.1. 13)式仍然是波动方程的解，但因为场量必须为实数，我们应当只取其实部。然而写成复数形式对许多计算要简便很多，因此在实际运算时经常采用，但应当强调指出的是：只有实场才是有物理意义的场，复场只是为了计算方便！有时把常数因子 $e^{i\varphi}$ 并人振幅中，则

$$\begin{pmatrix}\vec{E}(\vec{r},t)\\ \vec{B}(\vec{r},t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{E}_0\\ \vec{B}_0\end{pmatrix} e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\tag{8.1.14}$$

注意，这时振幅 $\begin{pmatrix}\vec{E}_0\\ \vec{B}_0\end{pmatrix}$ 已是复数。反之，当电磁波的振幅是复数时，它表示电磁

波有相位因子。根据色散关系（8.1.8）可知，k 取正负均可。因此，

$$\vec{E}=\vec{E}_0 e^{i(-\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{8.1.15}$$

也是波动方程的解。非常容易可以证明，（8.1.15）是电磁波沿反方向传播的解。

注：你会发现（8.1.15）式与$\vec{E}=\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega t)}$给出一样的实部，因而对应于完全一样的反向传播的电磁波。对波的时间变化项，在物理 Community 中，我们规定为$e^{-i\omega t}$，而 IEEE 的 Community 规定为$e^{i\omega t}$。

(6) 因为(8.1.3)和（8.1.5）式是由麦克斯韦方程约化而来的，约化过程中方程从一阶微分变成了二阶微分，因此它对应的解未必全都是原始 Maxwell 方程的解。我们需要将所得的解（8.1.13）重新带回到原始 Maxwell 方程做检查。带回 Maxwell 方程组中的第 1，3 两条方程，我们发现场量必须满足

$$\vec{k}\cdot\vec{E}_0=0,\quad \vec{k}\cdot\vec{B}_0=0 \tag{8.1.16}$$

这表明，电磁场振动的方向与传播方向$\vec{k}$相互垂直（在等相面内），亦即 - 电磁波是横波。同时带入方程

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

得

$$\vec{k}\times\vec{E}_0=\omega\vec{B}_0 \tag{8.1.17}$$

上式说明$\vec{E},\vec{B}$间不独立。带入第四条方程$\nabla\times\vec{H}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$可得到

$$\vec{k}\times\vec{H}=-\varepsilon\omega\vec{E}\Rightarrow\vec{k}\times\vec{B}_0=-\varepsilon\mu\omega\vec{E}_0 \tag{8.1.18}$$

综合（8.1.17）-（8.1.18）得到结论：$\vec{E},\vec{B}$ *和$\vec{k}$ 组成右手定则*，且，E，B 之间的模量满足

$$\boxed{|E_0|=\omega|B_0|/k=v|B_0|=c|B_0|} \tag{8.1.19}$$

后面一个等式在真空中成立。进一步，可以得到另一个很重要的关系式

$$\boxed{|E_0|=v\mu|H_0|=\frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon\mu}}|H_0|=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}|H_0|=Z|H_0|} \tag{8.1.20}$$

其中$\boxed{Z=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}$称为阻抗，具有电阻的量纲，是一个非常重要的物理量。折射率和

阻抗是刻画电磁介质特性的最重要的 2 个量，他们各有各自不同的物理涵义，在确定电磁波的特性方面起着不同的作用。

(7) 平面波的**能流**

$$\vec{S}_p = \vec{E} \times \vec{H} \tag{8.1.21}$$

注意真实的场是（8.1.7），不能将复数场带入（8.1.21）式后再取实部，因为此运算是非线性运算。故(8.17)式中的 $\vec{E}, \vec{H}$ 都应取实部之后再代入：

$$\vec{S}_p(\vec{r},t) = \mathrm{Re}(\vec{E}) \times \mathrm{Re}(\vec{H}) \tag{8.1.22}$$

上式表示的是能流的瞬时值。当电磁场随时间变化时，通常瞬时值没有意义，更关心的对能流的时间平均值。对能流在一个周期内做时间平均，

$$\left\langle \vec{S}_p \right\rangle = \left\langle \mathrm{Re}\,\vec{E} \times \mathrm{Re}\,\vec{H} \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}_p dt \tag{8.1.23}$$

利用公式

$$\left\langle \mathrm{Re}\,\vec{E} \times \mathrm{Re}\,\vec{H} \right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E} \times \vec{H}^*\right)$$

(证明见习题 8.1)，得到

$$\left\langle \vec{S}_p \right\rangle = \frac{1}{2} Z \cdot H_0^2 \hat{k} = \frac{1}{2Z} E_0^2 \hat{k} \tag{8.1.24}$$

同理，能量密度的时间平均值为

$$\bar{u}(\vec{r}) = \langle u(\vec{r},t) \rangle = \left\langle \frac{1}{2}\varepsilon \vec{E}\cdot\vec{E} + \frac{1}{2}\mu \vec{H}\cdot\vec{H} \right\rangle = \frac{\varepsilon}{4}E_0^2 + \frac{\mu}{4}H_0^2 = \frac{\varepsilon}{2}E_0^2 \tag{8.1.25}$$

非常容易从（8.1.25）中证明 $\bar{u}_E = \frac{\varepsilon}{4}E_0^2 = \frac{\mu}{4}H_0^2 = \bar{u}_B$，亦即，***平面电磁波电场携带的能量和磁场携带的能量相等！*** 把(8.1.25)和(8.1.24)式比较，则得

$$\bar{\vec{S}}_p(\vec{r}) = \hat{k}\bar{u}(\vec{r})\frac{1}{\varepsilon Z} = \hat{k}\bar{u}(\vec{r})v = \bar{u}(\vec{r})\vec{v} \tag{8.1.26}$$

(8.1.26)式有着清晰的物理图像 --- 能流即为单位时间通过单位面积的能量，单位时间内电磁波传输 $l = v \times 1$ 的距离，因此单位时间内在体积为 $\Omega = l \times 1 = v \times 1 \times 1 = v$ 内的电磁波能量可以通过单位面积。故，$\boxed{\text{能流 = 能量 × 速度}}$。这与 $\boxed{\text{电流密度 = 电荷密度 × 速度}}$ 的物理来源完全一致。平面电磁波在非导电介质中传播的情况如图 8.1 所示。一个重要的特征是 E 与 B 为同相位变

化的，即它们同时达到最大值，又同时达到最小值。

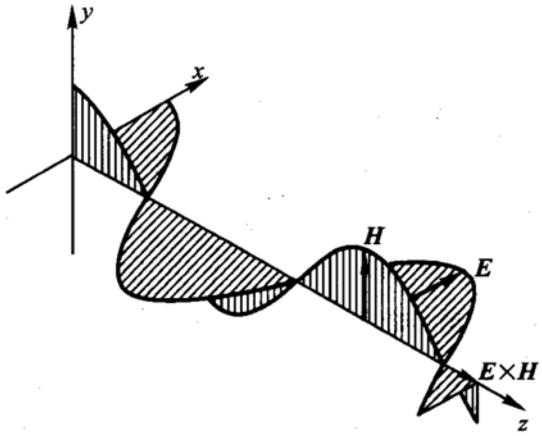


图 8.1

习题

P．204，8.1

补充题：

（1） 证明（8.1.25）式以及平面电磁波的电场能和磁场能的时间平均值相等

（2） 计算真空的阻抗值

思考题

- 尝试在球坐标/柱坐标下解波动方程（8.1.3）