第十一讲

上次课

- 本征函数展开法：

（1）$\nabla^2\varphi=0$有一系列正交完备的解 – 本征函数 $\{\varphi_n\}$

（2）完备性 --- $\varphi=\sum_n c_n\varphi_n$

（3）展开系数：$c_n=\langle\varphi_n|\varphi\rangle$，根据正交性比较不同本征函数前的系数

[例 5] 半径为R、介电常数为ε_2的均匀介质球，被置于均匀外场$\vec{E}_0$中，球外空间充满均匀介电常数为ε_1的介质。求空间电势的分布。

解： 如图 4.6，取$\vec{E}_0$方向为极轴z方向，这个问题是绕z轴旋转对称，为此我们把球分成内外两个区域，分别写出它们的方程和边界条件。令球外、内空间分别为区域I、II,电势分别为φ_1， φ_2则φ_1,φ_2满足方程

$$\nabla^2\varphi_1=0,\quad \nabla^2\varphi_2=0 \qquad (4.4.18)$$

相应的边条为

$$\begin{cases}\varphi_1\to -E_0 r\cos\theta, \quad r\to\infty & (1)\\ \varphi_1=\varphi_2, \quad r=R & (2)\\ \varepsilon_1\left.\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right|_{r=R}=\varepsilon_2\left.\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right|_{r=R} & (3)\\ \varphi_2\text{有限}, \quad r=0 & (4)\end{cases}$$

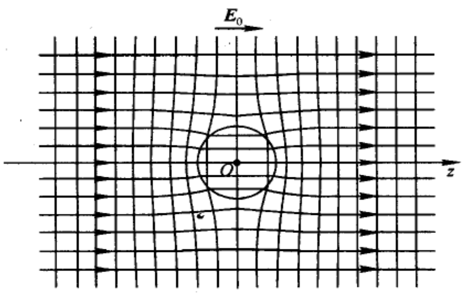


图 4.6

本问题为轴对称问题，可将φ_1,φ_2展开成Laplace方程本征函数的线性叠加，即

$$\varphi_1=\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta)$$
$$\varphi_2=\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l' r^l+B_l' r^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta) \qquad (4.4.19)$$

其中$\{A_l,A_l',B_l,B_l'\}$为一系列展开系数，需要由边界条件确定。根据我们上次课对均匀电场中的金属球的问题的求解，我们已有了经验 – 均匀电场的边界条件（1）只包含 l=1 项的贡献，因此（4.4.19）中只有$l=1$项的系数非 0，故有

$$\varphi_1=\left(A_1 r+B_1 r^{-2}\right)\cos\theta$$
$$\varphi_2=\left(A_1' r+B_1' r^{-2}\right)\cos\theta \qquad (4.4.19')$$

****

<u>下面我们利用本征函数的正交性对上述论断做严格证明。</u>

对 I 区来讲，边条（1）决定了除了A_1外所有的$\{A_l\}$均为 0。因$P_1(\cos\theta)=\cos\theta$，易知：

$$A_1=-E_0;\qquad A_l=0,\quad l\neq 1 \qquad (4.4.20)$$

对 II 区来讲，边条（4）决定了

$$B_l'=0,\quad l=0,1,\ldots\infty \qquad (4.4.21)$$

下面考虑边条（2）。代入可知，

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l R^l+B_l R^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l' R^l+B_l' R^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta)$$
$$\varepsilon_1\sum_{l=0}^{\infty}\left[lA_l R^{l-1}-(l+1)B_l R^{-(l+2)}\right]P_l(\cos\theta)=\varepsilon_2\sum_{l=0}^{\infty}\left[lA_l' R^{l-1}-(l+1)B_l' R^{-(l+2)}\right]P_l(\cos\theta) \qquad (4.4.22)$$

根据本征函数的正交性，上面 2 式中每个 l 项的系数必须分别相等，即

$$A_l R^l+B_l R^{-(l+1)}=A_l' R^l+B_l' R^{-(l+1)}$$
$$\varepsilon_1\left[lA_l R^{l-1}-(l+1)B_l R^{-(l+2)}\right]=\varepsilon_2\left[lA_l' R^{l-1}-(l+1)B_l' R^{-(l+2)}\right] \qquad (4.4.23)$$

对所有$l\neq 1$的项，我们有

$$\left.\begin{array}{r}B_l R^{-(l+1)}=A_l' R^l\\ \varepsilon_1\left[-(l+1)B_l R^{-(l+2)}\right]=\varepsilon_2\left[lA_l' R^{l-1}\right]\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}B_l=A_l' R^{(2l+1)}\\ B_l=-A_l' R^{(2l+1)}\dfrac{l\varepsilon_2}{(l+1)\varepsilon_1}\end{array}\right. \qquad (4.4.24)$$

显然有：

$$A_l'=B_l=0,\quad l\neq 1 \qquad (4.4.25)$$

因此只有$l=1$的项有非零解。

****

代入边条（1）–（4）分别可得

$$\begin{cases} A_1 = -E_0 \\ A_1 R + B_1 R^{-2} = A_1{}' R \\ \varepsilon_1\left(A_1 - 2B_1 R^{-3}\right) = \varepsilon_2\left(A_1{}' - 2B_1' R^{-3}\right) \\ B_1' = 0 \end{cases} \quad (4.4.26)$$

解之可得

$$\begin{cases} A_1 = -E_0 \\ B_1 = \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 R^3 \\ A_1' = -\dfrac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 \\ B_1' = 0 \end{cases}, \quad (4.4.27)$$

故

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -E_0 r\cos\theta + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} R^3 E_0 \frac{1}{r^2}\cos\theta \\ \varphi_2 &= -\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 r\cos\theta \end{aligned} \quad (4.4.28)$$

作如下的讨论：

（1）上面的结果在极限情形下是正确的：当 $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon_0$ 时，$\varphi_1 = -Er\cos\theta, \varphi_2 = -Er\cos\theta$，即空间的电场就是均匀电场。

（2） 球面上的束缚电荷对球外区域的贡献为：$\dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} R^3 E_0 \dfrac{1}{r^2}\cos\theta$。回想一个偶极子（偶极矩为 p）的电势为 $\varphi_p = \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$， 对比发现这些束缚电荷的贡献相当于一个放在原点的偶极子，其大小为

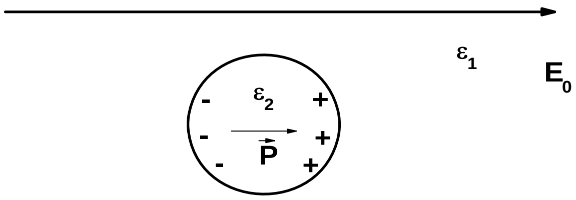
$$\boxed{\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} R^3 \vec{E}_0} \quad (4.4.29)$$

（3）球内的场为一与外场平行的恒定场：

$$\vec{E}_{内} = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\hat{e}_z = \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\vec{E}_0 \quad (4.4.30)$$

（4）当 $\varepsilon_2 \to -\infty$ 时，介质球内的场为 $\vec{E}_{内} \to 0$，其效果相当于一个导体球。而此时， $\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \vec{E}_0$，也回到上堂课我们求解的导体球的解。其实，这样的一个

推论（导体相当于$\varepsilon_2 \to -\infty$的介质）具有普遍意义，后面我们可以严格证明。



下面我们考虑一个简单的情况，即$\varepsilon_1 = \varepsilon_0$（背景介质是空气），此时的物理图像更加清楚。因介质球内的场为均匀场，故整个介质球被均匀极化，极化强度为

$$\boxed{\vec{P} = \chi\varepsilon_0 \vec{E}_{内} = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon_2}\vec{E}_0} \tag{4.4.31}$$

对比发现，此时极化强度正好就是偶极子电偶极距/体积：

$$\boxed{\vec{P} = \frac{\vec{p}}{4\pi R^3/3}} \tag{4.4.32}$$

这当然是合理的，因为极化强度的定义就是$\vec{P} = \dfrac{\sum \vec{p}_i}{\Omega}$。因$\varepsilon_2 > \varepsilon_0$，我们发现$\vec{E}_{内} < \vec{E}_0$，这是因为极化电荷在球内产生了电场抵消了部分外电场的贡献。这部分由极化电荷在球内产生的电场为

$$\vec{E}_{p内} = \vec{E}_{内} - \vec{E}_0 = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon_2}\vec{E}_0 = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P} \tag{4.4.33}$$

这个场通常被称为"退极场"- 由于极化产生的极化电荷产生的场，其作用是"退"掉外场的作用。整理后的结果为：

$$\vec{E}_{内} = \vec{E}_0 - \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P} \tag{4.4.34}$$

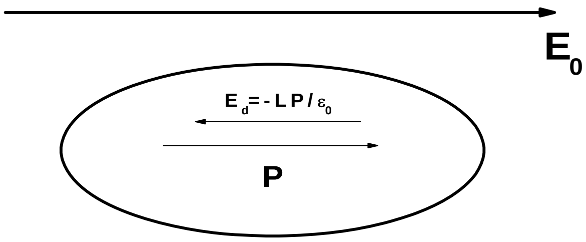
上面 2 式在很多情况下成立的，一般来说，退极场可以写成

$$\vec{E}_{退} = -L \cdot \vec{P}/\varepsilon_0 \tag{4.4.35}$$

L 称为退极化因子，只依赖于物体的几何形状，其越大，说明退极效应越显著。容易证明：对平板 L= 1，对球 L=$\dfrac{1}{3}$，对细针，L=0，对椭球，针对长短轴的不同，L 可以由 0~1 不等。总结下来，介质在外场下的静电行为是

- *被外场极化*
- *极化电荷在球外的贡献为偶极子*

- *在球内的贡献为均匀电场 – 退极场 （depolarization field）*



思考题：

*（1）若外部介质不是空气，而是具有介电常数ε_1的某种电介质，极化强度 **P** 是多少？*

（4.4.32）是否仍然成立？若不成立，为什么？

（2）有兴趣的同学请找文献查一查椭球体的"退极因子"的推导

下面研究一个 2 维柱坐标问题。

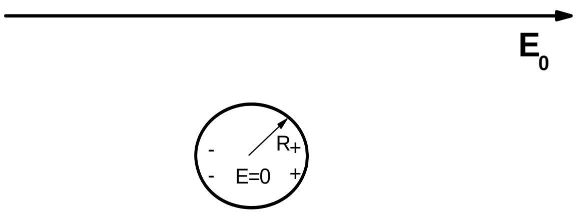
［例 7］ 在均匀外电场$\vec{E}=E_0\hat{e}_x$中有一半径为R、电荷线密度为λ的无限长导体圆柱．柱轴与外场垂直，求空间中的电场分布。

解： 柱内区域的场为零，只需考虑柱外区域的电势，其满足方程

$$\nabla^2\varphi=0 \tag{4.4.36}$$

边界条件为

$$\begin{cases} \vec{E}_{\rho\to\infty}=E_0\hat{x}; & (1) \\ \varphi|_{\rho=R}=常数; & (2) \\ \oint\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right|_{\rho=R}dS=-\lambda/\varepsilon_0 & (3) \end{cases} \tag{4.4.37}$$



第一个边条值得讨论一下。处理均匀外场中的散射体的问题时，如果散射体是三维物体（如球），则任何感应（极化）电荷均在空间局域，因此在无穷远处，它们对场或者势的贡献都趋向于 0，此时我们可以将边条（1）进一步改写成$\varphi|_{r\to\infty}=-\vec{E}\cdot\vec{r}$。然而处理 2 维问题（如

无限长柱子）时，感应（极化）电荷会出现在无穷远处，它们对电势的贡献不趋向于 0！幸运的是，此时，它们对电场的贡献$\sim 1/\rho$，故对电场的贡献仍趋于 0。处理无限大平面问题时这个问题更严重 – 感应（极化）电荷沿着 2 个方向散布到无限远，故电场、电势均不趋向于 0！ 不过通常 1 维问题根本无须这样求解。

此问题为与 z 无关的柱对称问题，故可以利用相应问题的本征函数展开

$$\varphi = A_0 + B_0 \ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\rho^n + B_n\rho^{-n})\cos(n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\rho^n + D_n\rho^{-n})\sin(n\phi)$$

注意到$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\hat{e}_\rho - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\hat{e}_\phi$，电场中$\rho$的阶数比电势中的低一阶。边条（1）

显示势函数中所有比ρ^1发散快的项都不可以保留，故

$$A_n = C_n = 0, \quad n > 1 \tag{4.4.38}$$

进一步利用边条（1）比较系数

$$E_\rho\big|_{\rho\to\infty} = -\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = -A_1\cos\varphi - C_1\sin\varphi = E_0\cos\varphi \tag{4.4.39}$$

因为$\sin\phi$与$\cos\phi$正交，可得

$$A_1 = -E_0, \qquad C_1 = 0 \tag{4.4.40}$$

考虑边条（2），因$\varphi\big|_{\rho=R}$应与θ无关，故有

$$\left.\begin{array}{l} A_nR^n + B_nR^{-n} = 0 \\ C_nR^n + D_nR^{-n} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} B_n = 0, n>1; \quad B_1 = E_0R^2 \\ \qquad\qquad D_n = 0 \end{array}\right. \tag{4.4.41}$$

现考虑边条（3），积分过程中所有的$n>1$的项都没有贡献（因为与角度有关），只有A_0, B_0两项留下来。最后结果为：

$$B_0\frac{1}{R}2\pi R = -\lambda \quad \Rightarrow \quad B_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \tag{4.4.42}$$

A_0为一常数，不能唯一确定。总结下来，最终的电势为

$$\varphi = A_0 - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\rho - E_0\rho\cos\phi + \frac{E_0R^2}{\rho}\cos\phi \tag{4.4.43}$$

由（4.4.43）式我们明白，空间电势由三部分贡献叠加而成：外场，无限长带电导体棒，以及一个 2 维偶极子（$\vec{p} = 2\pi\varepsilon_0E_0R^2$，参考补充题）。柱外电场强度为

$$\vec{E}=\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}+E_0\cos\phi+\frac{E_0R^2}{\rho^2}\cos\phi\right)\hat{e}_\rho+\left(-E_0\sin\phi+\frac{E_0R^2}{\rho^2}\sin\phi\right)\hat{e}_\phi \quad (4.4.44)$$

注：由这个问题的求解我们又一次发现一个规律，即均匀外电场下我们只需要考虑 l=1 项的贡献。这里的物理是均匀电场只包含 l=1 项，因此不会激发其他 l 项的贡献（因为不同 l 的本征函数是正交的）

§4.5　多 极 矩 法

在实际工作中常会碰到这种情况：激发电场的电荷全部集中在一个很小的区域，而我们要求的又是远离带电体空间的电场，这时我们可采用多极矩近似法。

如图 4.10，若电荷分布在有限体积V内，电荷密度为$\rho(\vec{r}\,')$，这个体积的线度为l，考查的是P点的电场，而P点和体积V内任一点O的距离为$\vec{r}$。多极矩法是讨论在$|\vec{r}|>>l$情况下的场分布。P点电势的准确解的形式为

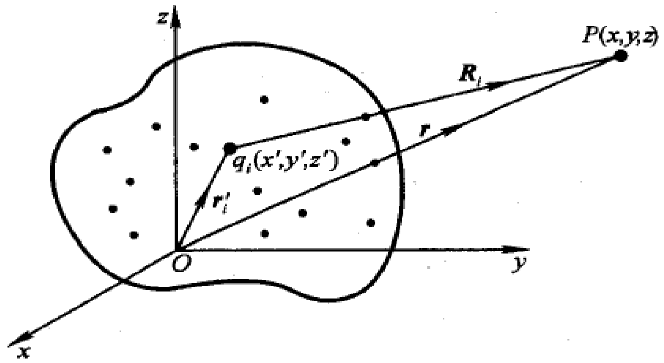


图 4.10

$$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}\,')d\tau'}{R} \quad (4.5.1)$$

这里，$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'$。由于P点离源较远，有$r'<<r$，因此作为$\vec{r}'$的函数$\frac{1}{R}$可以在$\vec{r}'=0$附近作 Taylor 展开：

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}&=\frac{1}{r}-\sum_{i=x,y,z}r_i'\cdot\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{1}{R}\right)\bigg|_{\vec{r}'=0}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=x,y,z}r_i'r_j'\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}\left(\frac{1}{R}\right)_{\vec{r}'=0}+\dots\\&=\frac{1}{r}-\sum_{i=x,y,z}r_i'\cdot\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{1}{r}\right)\bigg|_{\vec{r}'=0}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=x,y,z}r_i'r_j'\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}\left(\frac{1}{r}\right)_{\vec{r}'=0}+\dots\end{aligned} \quad (4.5.2)$$

上式可以写成更紧凑的数学上完全等价的矢量（并矢）的形式：

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r}-\vec{r}'\cdot\nabla\frac{1}{r}+\frac{1}{2}\vec{r}'\vec{r}':\nabla\nabla\frac{1}{r}+\cdots \qquad (4.5.2')$$

习题：

P．115， 4.2， 4.5，4.6，4.7

补充题

（1）考虑两个距离为 d 的线电荷密度为$\pm\lambda$的无限长带电棒组成的体系，计算其在远场的电势表达式。