第十五讲

上次课

- 磁标势解法：（1）无传导电流（2）单连通区域

  磁化电流的影响全部包含在 H 场中！

- 铁磁体磁场问题 – 标势看到“假想磁荷”，服务于 H 场，矢势看到“电流”，服务于 B 场

---

§5.5 磁多极矩展开 - 磁偶极子

若电流分布集中在一个小区域 V 中，而我们只讨论远处的场，这时可以仿照静电情况用多极矩展开的方法来处理。这里，我们重点讨论磁偶极子的场、磁偶极子与外磁场的相互作用。

1．磁多极展开及磁偶极子产生的势

在全空间问题中，矢势$\vec{A}$的解为

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}d\tau'. \qquad (5.5.1)$$

类似静电问题中的多极展开，把$\dfrac{1}{R}$在区域 V 内的某一点展开成$\vec{r}\,'$的幂级数。若展开点取在坐标的原点，则

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r}-\vec{r}\,'\cdot\nabla\frac{1}{R}\Big|_{r'=0}+\frac{1}{2}\vec{r}\,'\vec{r}\,':\nabla\nabla\frac{1}{R}\Big|_{r'=0}+\cdots \qquad (5.5.2)$$

只保留前两项，代人矢势表达式中得

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu}{4\pi}\int\frac{\vec{j}}{R}d\tau'=\vec{A}^{(0)}+\vec{A}^{(1)}+\cdots \qquad (5.5.3)$$

其中

$$\begin{aligned}\vec{A}^{(0)}&=\frac{\mu}{4\pi r}\int\vec{j}(\vec{r}\,')d\tau',\\ \vec{A}^{(1)}&=\frac{\mu}{4\pi r^3}\int\vec{j}\left(\vec{r}\,'\cdot\vec{r}\right)d\tau',\end{aligned} \qquad (5.5.4)$$

这里我们将不直接处理电流密度 $\vec{j}(\vec{r}')$，而利用一个没有证明其严格性但却非常有启发性的思路 - 将体积 V 内的电流分成许多独立的电流管道的叠加，因为是稳恒电流，每个流管为闭合回路且电流为一常数 I_i。根据这一思路，可以在积分中做如下代换：$\vec{j}(\vec{r}')d\tau' = \sum_i I_i d\vec{l}_i$。 考虑第一项

$$\vec{A}^{(0)} \propto \int \vec{j} d\tau' = \sum_i I_i \oint d\vec{l}_i \equiv 0 \qquad (5.5.5)$$

与电场的情形对比，磁多极矩的第一项恒为 0，*事实上，这正是自然界没有磁单极的显现*。下面考虑第二项 $\vec{A}^{(1)}$：

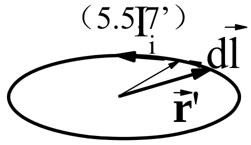
$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \sum_i I_i \oint \left(\vec{r}' \cdot \vec{r} \right) d\vec{l}_i \qquad (5.5.6)$$

对方环或是圆环，上式都可以严格积分出来（详见第二讲）。对任意形状，注意到 $d\vec{r}' = d\vec{l}_i$，我们可以首先将上式中的积分进行配分，

$$\oint (\vec{r} \cdot \vec{r}')d\vec{l}_i = \oint (\vec{r} \cdot \vec{r}')d\vec{r}' = \oint \left[d\left((\vec{r} \cdot \vec{r}')\vec{r}' \right) - \vec{r}'(\vec{r} \cdot d\vec{r}') \right] \qquad (5.5.7)$$

在闭合环路条件下上式第一项为 0，因此得到一个恒等式

$$\boxed{\oint (\vec{r} \cdot \vec{r}')d\vec{l}_i = -\oint \vec{r}'(\vec{r} \cdot d\vec{r}') = -\oint \vec{r}'(\vec{r} \cdot d\vec{l}_i)} \qquad (5.5.7')$$



现将（5.5.6）中的积分分成 2 项，

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \frac{1}{2} \sum_i I_i \left[\oint \left(\vec{r}' \cdot \vec{r} \right) d\vec{l}_i + \oint \left(\vec{r}' \cdot \vec{r} \right) d\vec{l}_i \right] \qquad (5.5.6')$$

将上式中的一项用（5.5.7’）来替代，则有

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \frac{1}{2} \sum_i I_i \left[\oint \left(\vec{r}' \cdot \vec{r} \right) d\vec{l}_i - \oint \vec{r}'(\vec{r} \cdot d\vec{l}_i) \right] \qquad (5.5.8)$$

利用矢量叉乘的恒等式 $\boxed{\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}}$，（5.5.8）可以被进一步改写

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \frac{1}{2} \sum_i I_i \oint \left(\vec{r}' \times d\vec{l}_i \right) \times \vec{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \qquad (5.5.9)$$

其中

$$\boxed{\vec{m} = \frac{1}{2} \sum_i I_i \oint \vec{r}' \times d\vec{l}_i = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d\tau'.} \qquad (5.5.10)$$

被定义为磁偶极矩。对磁偶极子，我们或多或少已在不同场合介绍其性质，现再总结如下：

（1）对于一个小的载流闭合线圈，其磁偶极矩 $\vec{m}$ 写成：

$$\vec{m}=\frac{1}{2}\int\vec{r}'\times\vec{j}d\tau'=\frac{I}{2}\oint\vec{r}'\times d\vec{l}'=I\vec{S} \qquad (5.5.11)$$

式中 $\vec{S}$ 是电流回路的面积，方向取右手螺旋。这是我们熟知的结果，只不过此处给出的磁偶极矩的定义（5.5.10）更一般。

(2) 磁偶极子产生的场在第二讲中已经导出来过

$$\boxed{\vec{B}=\nabla\times\vec{A}^{(1)}=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left[\vec{m}\times\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\right]=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{m}}{r^3}} \qquad (1.2.24)$$

根据第十四讲，对一个磁偶极子产生的场，在没有电流的地方（$r\neq 0$ 处）可以引入磁标势 $\vec{H}=\vec{B}/\mu_0=-\nabla\varphi_m$。利用与电偶极子的电场/电势的比较，得到

$$\boxed{\varphi_m=\frac{1}{4\pi}\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3}} \qquad (5.5.12)$$

（3）任意形状的环形电流回路的标势

对任意形状的电流回路，若要考虑离环不很远处的场，这时磁偶极矩近似不精确。设回路中的电流强度为 I，我们可以把以此回路为边界的任意曲面切割成许多小块，每小块的边界上都流有电流 I，电流的方向同大回路的电流方向相同，这样，这些小块边界上电流相加的结果仍只在大回路中流有电流 I。个磁矩，其大小为 $Id\vec{S}$，它在空间产生的磁标

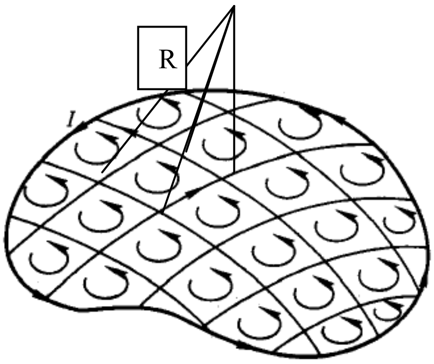


图 5.2

$$\Delta\varphi_m=\frac{I}{4\pi}\frac{\Delta\vec{S}\cdot\vec{R}}{R^3}=\frac{I}{4\pi}\Delta\Omega \qquad (5.5.13)$$

式中的 R 是 $d\vec{S}$ 至观察点的位置矢量，$\Delta\Omega$ 为这一小块电流回路对观察点张开的立体角。当体系分得足够小时，磁偶极子的描述变成精确的。于是，整个回路所产生的磁标势严格为

$$\varphi_m = \int d\varphi_m = \frac{I}{4\pi}\Omega, \qquad (5.5.14)$$

Ω 是回路对观察点所张的立体角，是观察点 r 的函数。其磁感应强度为

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla\Omega(\vec{r}), \qquad (5.5.15)$$

Ω 正负的规定是：按电流的右手法则决定 $\vec{e}_n$ 的面法线方向以后，若观察点在 $\vec{e}_n$ 的正方向，则 $\Omega > 0$，反之 $\Omega < 0$。注意当观察点穿过电流围出的面积时，磁标势不连续。当观察点在面积上时，$\Omega^+ = 2\pi$，而当其在面积下时，$\Omega^+ = -2\pi$，故，$\varphi_m^+ - \varphi_m^- = I$。其实，这个表面正是我们上次课讲的“磁壳”，必须挖掉其才使得磁标势的定义有意义，尽管其上面并无电流。

2．磁偶极子在外磁场中的能量、受力及力矩

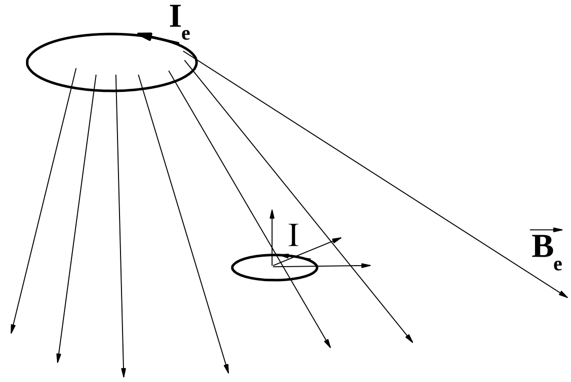
与电偶极子在电场中类似，下面我们考虑磁偶极子与外磁场中的能量。首先，前面已经推导出任意电流分布情况下的体系的总磁能。

$$U_m = \frac{1}{2}\int_\infty \vec{B}\cdot\vec{H}d\tau = \frac{1}{2}\int_\infty \vec{A}\cdot\vec{j}d\tau \qquad (5.5.16)$$

假设一个载流线圈构成的磁偶极子（磁偶极矩为 $\vec{m} = I\vec{S}$）处在远端的电流（简单起见，假设为另外一个载流线圈（电流为 I_e））产生的静磁场 $\vec{B}_e$ 中，则体系的总磁能为

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2}\int_\infty \left(\vec{A}+\vec{A}_e\right)\cdot\left(\vec{j}+\vec{j}_e\right)d\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_\infty \left(\vec{A}\cdot\vec{j}+\vec{A}_e\cdot\vec{j}_e\right)d\tau + \frac{1}{2}\int_\infty \left(\vec{A}_e\cdot\vec{j}+\vec{A}\cdot\vec{j}_e\right)d\tau \end{aligned} \qquad (5.5.17)$$

其中 $\vec{A},\vec{A}_e$ 分别对应电流 I, I_e 产生的矢势。



类似电场的情形，似乎我们可以将前一项定义为体系的固有能，后一项定义为体系的相互作用能，

$$U_{\rm int} = \frac{1}{2}\int_\infty \left(\vec{A}_e\cdot\vec{j}+\vec{A}\cdot\vec{j}_e\right)d\tau \quad 。$$

进一步，根据矢量势的定义

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')d\tau'}{R},\quad \vec{A}_e(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}_e(\vec{r}\,')d\tau'}{R} \tag{5.5.18}$$

容易证明

$$\int_\infty\left(\vec{A}_e\cdot\vec{j}\right)d\tau=\int_\infty\left(\vec{A}\cdot\vec{j}_e\right)d\tau \tag{5.5.19}$$

因此有

$$\begin{aligned}U_{\text{int}}&=\int_\infty\left(\vec{A}_e\cdot\vec{j}\right)d\tau=I\oint\vec{A}_e\cdot d\vec{l}=I\int_S\vec{B}_e\cdot d\vec{S}\\&=I\Phi_e=\frac{1}{2}\left(I\Phi_e+I_e\Phi\right)\end{aligned} \tag{5.5.20}$$

其中 $\Phi_e=\int_S\vec{B}_e\cdot d\vec{S}$，$\Phi=\int_{S_e}\vec{B}\cdot d\vec{S}$ 分别为偶极子线圈中通过的外磁场的通量以及源线圈中通过的磁偶极子磁场的通量。当源足够远时，可以将其磁场在线圈所处的空间中展开：

$$\vec{B}_e(\vec{r})\approx\vec{B}_e(0)+\vec{r}\cdot\nabla\vec{B}_e(\vec{r})_{\vec{r}=0}+\ldots \tag{5.5.21}$$

带入上式并只保留第一项，

$$U_{B,\text{int}}=I\vec{B}_e(0)\cdot\int_S d\vec{S}=\vec{m}\cdot\vec{B}_e \tag{5.5.22}$$

这个形式与电偶极子在电场中的相互作用能 $U_{e,int}=-\vec{p}\cdot\vec{E}_e$ 不同，似乎意味着在磁场中磁偶极子喜欢反平行于外磁场！这显然是不合理的，但问题在哪里？

问题出在对相互作用能以及固有能的定义上面。在电的情形，当电偶极子在电场中发生平动或是转动时，电场的固有能不发生变化，因为偶极子以及产生外电场的电荷分布并没有发生变化（因为这里取的边界条件为电荷体为孤立体系；如果将边界条件取做等势条件，情况会有所不同）。对磁场体系则有所不同，当磁偶极子相对外磁场的位形发生变化时，会在线圈中产生感生电动势。根据 Faraday 电磁感应定律，偶极子线圈和源线圈中产生的感生电动势分别为

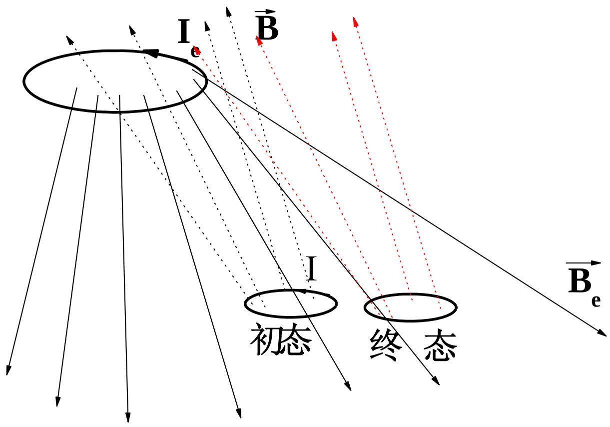
$$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt},\quad \varepsilon_e=-\frac{d\Phi_e}{dt} \tag{5.5.23}$$

偶极子线圈以及源线圈中的电流会因此被改变，此即是“互感效应”。在这个过程中“固有能”不可能保持恒定不变。若我们要求在变化过程中 $\vec{m}$ 与 $\vec{B}_e$ 均保持不变（亦即 I,I_e 不变），则必须由外接电动势做功抵消感生电动势的做功。在一个变动过程中，外电源必须做的功为

$$\Delta W_{\varepsilon}=-\int I\varepsilon dt-\int I_e\varepsilon_e dt=\int I\frac{d\Phi_e}{dt}dt+\int I_e\frac{d\Phi}{dt}dt=I\Delta\Phi_e+I_e\Delta\Phi \qquad (5.5.24)$$

其中 $\Delta\Phi_e,\Delta\Phi$ 是 Φ_e,Φ 在过程中的变化。对比（5.5.20），我们发现

$$\Delta W_{\varepsilon}=2\Delta U_{int} \qquad (5.5.25)$$



现在我们根据能量守恒来看一下保持电流不变条件下的“磁相互作用能”。与电偶极子（参考第 12 讲）情况类似，考虑在外磁场中的一个磁偶极子，假设其平移一段距离，在这个过程中始终有一个外力与磁场对其的作用力大小相等方向相反，$\vec{F}'=-\vec{F}_B$，因此整个过程中外力对线圈的做功为

$$\Delta R=-\vec{F}'\cdot\Delta\vec{l}=\vec{F}_B\cdot\Delta\vec{l}$$

根据能量守恒，ΔR 应当为体系总能的增加。

（1）首先体系机械能没有发生任何变化（因为线圈准静态移动）；

（2）其次，磁场能发生的变化为 $\Delta U_B=\frac{1}{2}\left(I\Delta\Phi_e+I_e\Delta\Phi\right)$

（3）再次，为了保证源线圈和探测线圈中的电流 I_e,I 维持不变，电源必须提供 $\Delta W_{\varepsilon}=I\Delta\Phi_e+I_e\Delta\Phi=2\Delta U_B$ 的能量，这部分能量必须扣除。

因此，外场做的功 ΔR 应当等于线圈+电源这个系统总的能量增加，$\Delta R=\Delta U_B-\Delta W_{\varepsilon}$。若将线圈和电源作为一体定义一个“有效相互作用能”，则 $\Delta R=\Delta\tilde{U}_{\text{int}}$。显然，$\Delta\tilde{U}_{\text{int}}=\Delta U_B-\Delta W_{\varepsilon}=\Delta U_B-2\Delta U_B=-\Delta U_B$

$$\boxed{\tilde{U}_{\text{int}}=-\vec{m}\cdot\vec{B}_e} \qquad (5.5.31)$$

与电偶极子在电场中的势能（相互作用能）完全一样！仿照电偶极子在电场受力

及受力矩的推导，我们可推出磁偶极子在磁场中所受的力及力矩分别为

$$\vec{F}_B = -\nabla \tilde{U}_{int} = \nabla\left(\vec{m}\cdot\vec{B}\right) = \left(\vec{m}\cdot\nabla\right)\vec{B}$$
$$\vec{\tau}_B = \vec{m}\times\vec{B} \qquad (5.5.32)$$

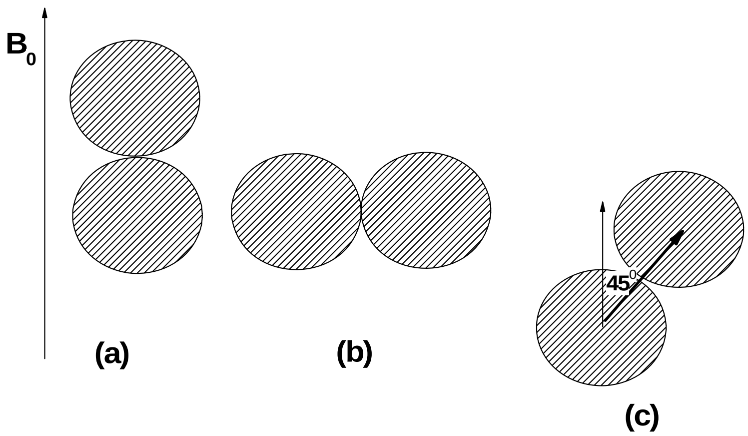
Tips:

电磁理论最难掌握的就是这一点了：许多物理量必须在注明是在什么条件下得到的。等势条件和孤立导体的条件得到的结论截然不同，同样，等电流条件和等矢势也不相同。

习题：

1) 考虑一个半径为 R 的均匀带电 Q 的绝缘体球壳，沿对称轴（设为 z 轴）以角速度 ω 匀角速度转动，求空间的磁场分布。[提示：分下面 3 步走 （1）求出电流分布；（2）证明球体对应于一个均匀磁化球，并求出磁化强度 $\vec{M}$ ；（3）利用磁标势的方法求解。]

2) 将一个半径为 R 的磁导率为 μ_2 的磁介质球放入磁导率为 μ_1 的溶液中，当外加一均匀磁场 $\vec{B}_0$ 时，求磁介质球携带的有效磁偶极矩（做了好多遍了，可以无需推导直接写出来）。若体系中有两个相同的磁介质球体，问体系将最终选择如图所示的那一种构型？为什么？



注：这个题目的背景就是“磁流变液”，我曾在第 8 届亚洲中学生奥林匹克竞赛中出过一道类似的题目。

思考题

（1）根据磁偶极子的矢势和标势，分别推出磁偶极子的 B 场的形式，讨论 2 个表达式在什么条件下是一样的？

（2）能否从 Maxwell 张量出发计算一个磁偶极子（载流线圈）在外磁场中受到的力和力矩？若可以，将一个自旋看成一个磁偶极子，根据其在磁场中受到的力和力矩写出自旋在磁场中的有效相互作用能。