第二讲

上次课：

- q --- 静电的来源
- $\vec{E}(\vec{r})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \dfrac{\rho(\vec{r}')d\tau}{R^3}\vec{R}$ -电场
- $\vec{F}=\rho d\tau\vec{E}$ - 电荷在电场中的受力
- $\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r})=\rho(\vec{r})/\varepsilon_0$ - 电场的散度，高斯定理
- 常用公式：$\boxed{\nabla\cdot\dfrac{\vec{R}}{R^3}=4\pi\delta(\vec{R})}$

5．静电场的旋度 – 安培环路定理

现在我们研究电场的旋度性质，亦即研究静电场对任意环路的线积分：$\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=?$。在《电磁学》中，我们利用静电场的向心力这一特点，将任意环路积分 Map 到一个径向的积分，从而得到环路积分为 0 这一结论。这里我们利用更高等的数学方法证明。首先注意一个非常有用的公式

$$\nabla r=\vec{r}/r \quad\to\quad \nabla R=\hat{R}/R$$

由此可以得到另一个恒等式

$$\boxed{\nabla\frac{1}{R}=-\frac{\nabla R}{R^2}=-\frac{1}{R^2}\frac{\vec{R}}{R}=-\frac{\vec{R}}{R^3}}$$（常常用到分部微分公式：$\nabla f(r)=\dfrac{\partial f}{\partial r}\nabla r$）

将上述恒等式带入场的定义：$\vec{E}(\vec{r})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \dfrac{\rho(\vec{r}')d\tau}{R^3}\vec{R}$，即可得：

$$\vec{E}(\vec{r})=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \rho(\vec{r}')d\tau\cdot\nabla\frac{1}{R}=-\nabla\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau\frac{\rho(\vec{r}')}{R}d\tau\right]=-\nabla\varphi(\vec{r}) \quad (1.1.11)$$

其中

$$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau\frac{\rho(\vec{r}')}{R}d\tau \quad (1.1.12)$$

为标量势。利用（1.1.11），我们得到静电场的环路定理的积分表达形式

$$\boxed{\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\oint\nabla\varphi(\vec{r})\cdot d\vec{l}=-\oint(\partial\varphi/\partial l)\cdot dl\equiv 0} \quad (1.1.13)$$

其中$\partial\varphi/\partial l$意味着沿着环路的方向对$\varphi$求偏导。上式的物理意义为静电场是保守场。也可以将环路定理写成微分形式，

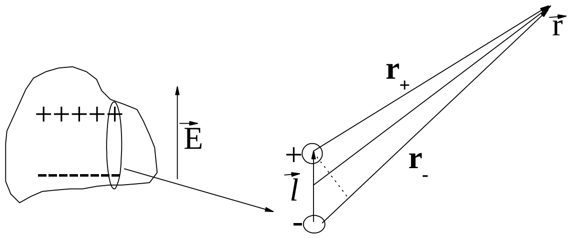
$$\boxed{\nabla\times\vec{E}(\vec{r})=-\nabla\times\nabla\varphi(\vec{r})\equiv 0} \quad (1.1.14)$$

物理意义是静电场是无旋场。**“无旋”、“保守”、可定义标量势**这三者是相互关联，可以相互导出的，其本质都是由于静电场是向心力的原因。

思考：还有什么形式的场可以定义标量势？

6．电偶极子

当施加电场于一个中性的物体上时，电场将正/负电荷拉开。因此为了描述物质的这种对外场的响应，人们定义电偶极子为两个相聚很近的带等电量的正负电荷组成的体系，并研究其电行为。偶极子的大小由偶极距描述，其定义为 $\vec{p}=q\vec{l}$ ，方向由负电指向正电。其实任意的一个带电体，在远场看，最先看到的其总电电量，然后就能感受到偶极子的场的贡献。偶极子场比点电荷的场衰减的慢，所以要近一点才能看到。因此研究电偶极子具有重要意义。具体计算偶极子的电势为



$$\varphi(\vec{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_a}\right)\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_a-r_b}{r^2}\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l\cos\theta}{r^2}=\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\qquad(1.1.15)$$

我们注意到偶极子的电势果然比点电荷的电势更快地衰减。计算可知

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r})=-\nabla\varphi=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\nabla(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^3}+\vec{p}\cdot\vec{r}\nabla\frac{1}{r^3}\right]=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{p}-3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r}}{r^3}\right]}\qquad(1.1.16)$$

非常容易可以计算出场的分量形式（设 $\vec{p}\parallel\hat{z}$）：$E_r=\dfrac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3},E_\theta=\dfrac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3},E_\phi\equiv 0$ 。

Tips: 与《电磁学》相比较，《电动力学》中更讲究数学形式的紧凑的矢量表述方式，而不是写成分量后的形式或是在某一些特定条件下的（比如 r||z）形式。熟练掌握常用的几个矢量运算是必要的：$\nabla r=\vec{r}/r,\nabla(r^n)=nr^{n-1}\hat{r},\nabla^2(1/r)=-4\pi\delta(\vec{r})$**，等。**

§ 1.2 静磁现象的基本理论描述

磁现象的描述要比电现象复杂。在 1820 年之前，磁现象是与磁铁（磁石）等相连，表现神秘，不易定量研究。直至 Oersted 发现电流也可以产生与磁铁一样的现象，人们才可以定量研究磁现象。我们下面将与电现象对比，简要总结静磁现象的基本理论描述。

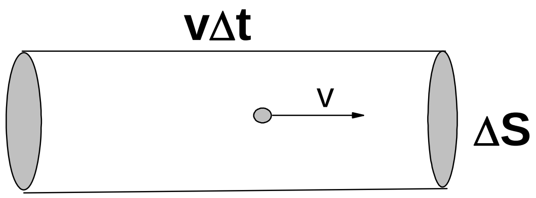
1．电流（磁的来源、与电荷对比）

电流-顾名思义为电荷的流动。为定量描述电荷流动，定义**电流**为：单位时间内

垂直穿过某一特定截面的电荷量，用 I 表示：

$$I = \Delta q / \Delta t \,|_S \tag{1.2.1}$$

I 是个描述电荷流动的积分的总效果。为了更微观地看电荷的流动情况，定义**电流密度** $\vec{j}$ 为单位面积单位时间通过的电荷量 $j = \dfrac{\Delta q}{\Delta t \Delta S}$，可以推知 $j = \dfrac{\rho \Delta \Omega}{\Delta t \Delta S} = \dfrac{\rho \Delta S v \Delta t}{\Delta t \Delta S} = \rho v$（如下图所示）。



进一步考虑电流密度的矢量性，有

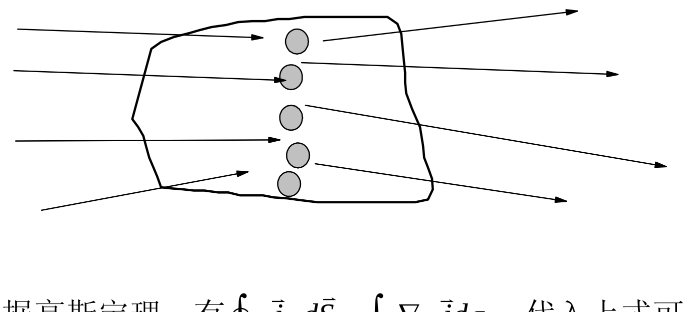
$$\vec{j} = \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}) \tag{1.2.2}$$

式中 $\vec{v}$ 代表在 $\vec{r}$ 处的电荷的运动速度，ρ 为电荷密度.《电磁学》中我们已证明电流密度的数学表述及与电流的关系为

$$\vec{j} = \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}) \Rightarrow I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \tag{1.2.3}$$

<u>电荷守恒</u>　实验表明电荷是守恒的，即电荷不能消灭及产生，而只能转移。在空间内任取一封闭曲面 S，单位时间内穿流出去的电荷量为（根据电流密度的定义（1.2.1））$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$，流出去的电荷量应等于封闭曲面 S 内总电荷在单位时间内的减少量，即 $-\dfrac{d}{dt}\int_V \rho d\tau$，$V$ 是 S 所包围的体积，所以

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho d\tau .$$



根据高斯定理，有 $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{j} d\tau$。代入上式可得

$$\int_V \left(\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau = 0$$

由于曲面 S 是任意选取的，所以被积函数恒为零，即

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0} \qquad (1.2.3)$$

(1.2.4)式是电荷守恒定律的数学表达式，也称**连续性方程**。

注：所有的“*流密度”的微观形式都是“**密度 * 速度”，如粒子流密度，能流密度，物理意义均为单位时间单位面积通过的粒子数（能量、电荷等）。*守恒律的普遍表达形式（粒子数守恒、能量守恒、…）为：*

流密度的散度+数密度的变化率 = 0

在稳定电流情况下，由于 $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$，所以有 $\nabla\cdot\vec{j}=0$，电流密度的散度为 0.

从几何上意味着电流线在空间任何一点均没有源头，这表示稳恒条件下电流线是闭合无源的。非稳恒时电流线的汇聚/发散总是伴随着电荷的积累.

2．安培定律 (与库仑定律对比)

既然电流是磁场的来源，类比库仑定律，我们应考虑两个这样的基本单位（电流元，定义为 $\vec{j}d\tau$，与 $\rho d\tau$ 地位相仿）之间的作用力。若真空中的两个电流元 $\vec{j}_1 d\tau_1$ 和 $\vec{j}_2 d\tau_2$，则安培定律告诉我们 2 对 1 的作用力 $d\vec{F}_{12}$ 为

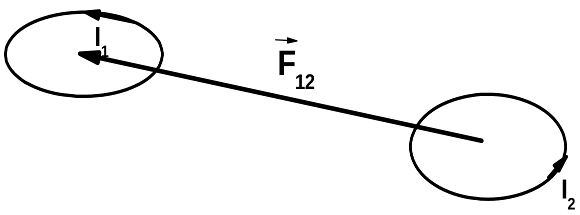
$$d\vec{F}_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}_1 d\tau_1\times(\vec{j}_2 d\tau_2\times\vec{R}_{12})}{R_{12}^3} \qquad (1.2.5)$$

其中 $\vec{R}_{12}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$ 为 2 指向 1 的位置矢量。与库仑定律比较，我们可以看到：

(1) 电流元之间的相互作用力也服从平方反比律
(2) 电流元之间作用力非向心力 - 磁场的散度及旋度行为与电场将截然不同！
(3) 电流元之间的相互作用力不满足牛顿的作用力与反作用力定律，即 $d\vec{F}_{12}\neq -d\vec{F}_{21}$。（比如考虑右图的情况）

对这个问题的简单回应是因为实际上不可能存在稳定的电流元，实验所能测量的只能是闭合回路的情况．考虑两闭合载流线圈，则 2 对 1 的作用力为

$$\vec{F}_{12}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{d\vec{l}_1\times(d\vec{l}_2\times\vec{R}_{12})}{R_{12}^3} \qquad (1.2.6)$$



利用矢量公式 $\boxed{\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{C}\cdot\vec{A})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})}$（非常有用，请牢记），可得

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12}&=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\left[\frac{d\vec{l}_2(d\vec{l}_1\cdot\vec{R}_{12})}{R_{12}^3}-\frac{\vec{R}_{12}(d\vec{l}_2\cdot d\vec{l}_1)}{R_{12}^3}\right]\\&=-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_2}d\vec{l}_2\oint_{l_1}\left[d\vec{l}_1\cdot\nabla\frac{1}{R_{12}}\right]-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\vec{R}_{12}(d\vec{l}_2\cdot d\vec{l}_1)}{R_{12}^3}\\&=0+-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\vec{R}_{12}(d\vec{l}_2\cdot d\vec{l}_1)}{R_{12}^3}=-\vec{F}_{21}\end{aligned}\qquad(1.2.7)$$

即<u>闭合回路</u>之间的相互作用力满足牛顿第三定律。然而我们对这个经典回答并不满足，深思以后，至少有这样几个问题值得研究：

1）我们可以让一个电荷做匀速运动（速度<<光速），这样就制造出空间的一个电流元 $\vec{j}=qv\delta(\vec{r}-vt\hat{x})$，这样两个匀速运动的电荷之间的磁力是什么？

2）它们两个的相互作用为什么不满足牛顿第三定律呢？

4. 磁场

类比电场的定义，可定义磁场。将作用在电流元 $\vec{j}_1 d\tau_1$ 上的力写为

$$\boxed{d\vec{F}_1=\vec{j}_1 d\tau_1\times\vec{B}(\vec{r})}\qquad(1.2.8)$$

其中 $\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{j}_2 d\tau_2\times\frac{\vec{R}_{12}}{R_{12}^3}$ 为电流元 $\vec{j}_2 d\tau_2$ 在 $\vec{r}$ 处产生的磁场。由叠加原理，对任意的电流分布 $\vec{j}(\vec{r}\,')$，其在在 $\vec{r}$ 处产生的磁场为

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')d\tau'\times\vec{R}}{R^3}}\qquad(1.2.9)$$

函数 $\vec{B}(\vec{r})$ 称为**磁感应强度**(纯粹是由于历史上的原因才不把它称为磁场强度)。上式常称为 Biot-Sarvart 定律。

以速度 $\vec{v}$ 运动的电荷 q 产生的电流密度为 $\vec{j}=q\vec{v}\delta(\vec{r}-vt\hat{x})$（仅在 v << 光速时成立），因此其在 $\vec{B}$ 场中所受的力为

$$\vec{F}=\int_\tau q\delta(\vec{r}-vt\hat{x})d\tau\vec{v}\times\vec{B}=q\vec{v}\times\vec{B}\qquad(1.2.10)$$

若空间既有磁场又有电场，则总受力为

$$\boxed{\vec{F}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)}\qquad(1.2.11)$$

这就是描述带电粒子在空间既有电场又有磁场时的受力 - Lorentz 力。

5．$\vec{B}(\vec{r})$的散度

要完整理解矢量场的全部特征，须研究其散度和旋度。对比具有平方反比+径向的静电场，磁场为横向场，故可以预期 **B** 场的散度及旋度性质一定与静电场相当不同。考虑散度性质，利用计算标势φ时采用的技巧，可将磁场改写为

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}(\vec{r}')\times\frac{\vec{R}}{R^3}d\tau' = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}(\vec{r}')\times(\nabla\frac{1}{R})d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int(\nabla\frac{1}{R})\times\vec{j}(\vec{r}')d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla\times\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}d\tau' \\ &= \nabla\times\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}d\tau'\right] = \nabla\times\vec{A}\end{aligned} \qquad (1.2.12)$$

其中 $\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}d\tau'}$ 为矢势，地位与电场的标势相对应。在上面第二行的推导中，我们用到了矢量运算公式 $\boxed{\nabla\times(\vec{a}\psi) = (\nabla\times\vec{a})\psi + \nabla\psi\times\vec{a}}$ 以及 $\vec{j}(\vec{r}')$ 不依赖于 $\vec{r}$ 的性质。因此，

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{B}(\vec{r}) = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) \equiv 0} \qquad （1.2.13）$$

<u>注意：</u>尽管我们本节研究的是稳恒电流，此处的推导丝毫没有假设电流不依赖于时间。换言之，若随时间变化的电流产生的磁场仍由 ***B-S*** *定律描述，则此时高斯定理仍成立。 这条性质在随后我们推广* ***Maxwell*** *方程式到非稳态时有重要作用。*

习题

1.7，1.8，1.9， 1.14