

## 第二十四讲

- Lorentz 规范下势函数满足的方程

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \begin{pmatrix} \varphi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \rho / \epsilon_0 \\ \mu_0 \vec{j} \end{pmatrix}$$

- 推迟势 (辐射场因果关系要求)  $\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{j}]}{R} d\tau'$ ,  $[\vec{j}] = \vec{j}(\vec{r}', t - R/c)$

- 电偶极辐射  $\vec{A}_p(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\dot{\vec{p}}]}{r} = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{p}]}{r}$ ,  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}_p = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \nabla \times \frac{[\vec{p}]}{r}$

远场  $r \gg \lambda$ :  $\nabla \leftrightarrow i \frac{\omega}{c} \vec{e}_r$        $\vec{B} = \frac{\omega^2 \mu_0}{4\pi c r} \vec{e}_r \times [\vec{p}]$

E 场可以写成一个物理的表示:  $\vec{E} = -\hat{k} \times (c\vec{B})$  类似平面电磁波 (E, B, K 满足右手法则)!

[例 1] 如图 12.3 所示, 两个金属小球分别带电荷  $Q$  和  $-Q$ , 它们之间距离为  $l$ , 两小球的电荷的数值和符号同步地周期性变化, 这就是所谓的赫兹振子。试分析赫兹振子辐射场的能流特点。

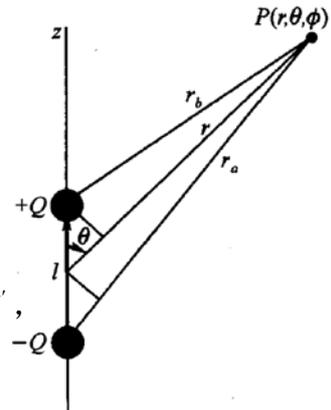


图 12.3

解 取球坐标系,  $+Q$  和  $-Q$  处在  $z$  轴上, 设  $Q = Q_0 e^{-i\omega t'}$ , 则体系的电偶极矩为

$$\vec{p} = lQ\vec{e}_z = lQ_0 e^{-i\omega t'} \vec{e}_z$$

将它们代入偶极辐射的远区公式, 有

$$\begin{cases} \vec{B} = \frac{\mu_0 \omega^2 (lQ_0)}{4\pi c r} \sin \theta e^{-i\omega(t-r/c)} (-\vec{e}_\phi) \\ \vec{E} = -\hat{k} \times (c\vec{B}) = \frac{\mu_0 \omega^2 (lQ_0)}{4\pi r} \sin \theta e^{-i\omega(t-r/c)} (-\vec{e}_\theta) \end{cases} \quad (12.3.11)$$

由(12.3.11)式可以看出, 场正比于  $\frac{1}{r}$ , 电场只有  $\vec{e}_\theta$  方向分量, 磁场只有  $\vec{e}_\phi$  方向分量, 且  $cB_\phi = E_\theta$ 。辐射场在偶极矩方向上为零。辐射能流的平均值为

$$\langle \vec{S}_P \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{B}^*] = \frac{c}{2\mu_0} |B|^2 \vec{e}_r = \frac{\mu_0 \omega^4 (lQ_0)^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2 c r^2} \vec{e}_r \quad (12.3.12)$$

对这个结果讨论如下：

- (1) 辐射能流的特点是正比于  $\frac{1}{r^2}$ ，且与  $\omega$  的四次方成正比。
- (2) 这说明辐射能力在低频时较弱，而在高频时高，这与我们第六章所讨论的“准静态近似”的适用条件一致；
- (3) 辐射能流正比于  $\frac{1}{r^2}$  是一个稳定辐射问题的必然要求，如若不然，则必然在空间产生能量积累，从而辐射问题不稳定。也正因为如此，辐射能流在某一个特定的立体角组成的通道内保持相同。

基于此，在讨论辐射问题时，我们常用角分布的概念来描述体系向空间不同方向辐射能量的情况，其定义为

$$\langle f(\theta, \phi) \rangle = \frac{\langle \vec{S}_p \rangle \cdot d\vec{r}}{d\Omega} = \frac{\int \langle \vec{S}_p \rangle \cdot r^2 d\Omega}{d\Omega} = \langle \vec{S}_p \rangle \cdot r^2 \quad (12.3.11)$$

这表示在  $\theta$ 、 $\phi$  方向单位立体角内的平均辐射能流，显然，现在

$$\langle f(\theta, \phi) \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 (lQ_0)^2}{32\pi^2 c} \sin^2 \theta \quad (12.3.12)$$

辐射角分布的情况如图 12.4 所示，在  $\theta = \frac{\pi}{2}$  的方向幅射最强，在  $\theta = 0$ 、 $\pi$  的方向无辐射。

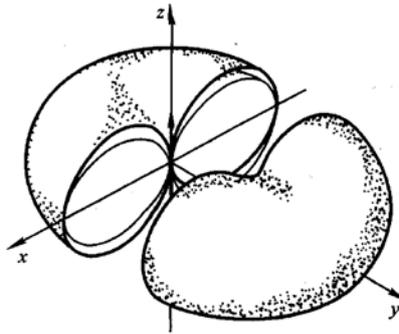


图 12.4

### 3. 磁偶极辐射

下面考虑磁偶极辐射，此时应当考虑  $\vec{A}_2$  项。在远场 ( $r \gg \lambda$ ) 及单频条件下，

只保留  $\nabla$  对推迟势的作用（亦即，作代换  $\nabla \leftrightarrow i\frac{\omega}{c}\vec{e}_r$ ），则有

$$\begin{aligned}\vec{A}_2 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{r}' \cdot \nabla \frac{[\vec{j}]}{r} d\tau' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{r}' \cdot \left( i\frac{\omega}{c}\vec{e}_r \right) \frac{[\vec{j}]}{r} d\tau' = -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi r^2 c} \int \vec{r}' \cdot [\vec{j}] d\tau' \\ &= -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi r^2 c} \frac{1}{2} \vec{r} \cdot \left\{ \int [\vec{r}'\vec{j} + \vec{j}\vec{r}'] d\tau' + \int [\vec{r}'\vec{j} - \vec{j}\vec{r}'] d\tau' \right\}\end{aligned}\quad (12.3.13)$$

上式{}中第一项在**静磁条件下**为 0（参考第十五讲（5.5.7'）式），当电流随时间谐变时，其为电四极子的贡献（严格证明从略）。第二项可改写为

$$\begin{aligned}\vec{A}_m &= -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi r^2 c} \frac{1}{2} \int \vec{r} \cdot [\vec{r}'\vec{j} - \vec{j}\vec{r}'] d\tau' = -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi r^2 c} \frac{1}{2} \int \vec{r} \times [\vec{j} \times \vec{r}'] d\tau' \\ &= \frac{i\mu_0\omega}{4\pi r^2 c} \vec{r} \times [\vec{m}]\end{aligned}\quad (12.3.14)$$

这里第二个等式用到了关系式： $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ 。其它多极展开式中没有磁偶极子的贡献。因此，磁偶极辐射所对应的矢势即时（12.3.14）式，标势为 0。带入势和场的关系，即可求出磁偶极子的  $\vec{E}$  和  $\vec{B}$ ：

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A}_m = i\frac{\omega}{c}\vec{e}_r \times \vec{A}_m &= -\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi c^2 r} \vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times [\vec{m}]) \\ \vec{E} = -\hat{k} \times (c\vec{B}) &= -\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi cr} \vec{e}_r \times [\vec{m}]\end{cases}\quad (12.3.16)$$

讨论如下

- (1) 我们注意到磁偶极子的辐射场（12.3.16）与电偶极子辐射场（12.3.9）非常相似。事实上，在讲解静电/静磁理论时我们已经了解到， $\mu_0\vec{m}$  之于  $\vec{B}$  场与  $\vec{p}/\epsilon_0$  之于  $\vec{E}$  场完全相同。现在，我们又看到了相同的依赖关系 --- 将（12.3.9）中  $\vec{E}$  场中的  $\vec{p}/\epsilon_0$  代换成  $\mu_0\vec{m}$ ，我们就得到了磁偶极子的  $\vec{B}$  场！因此这两个场互为对偶场，记住一个就可以得到另一个。更一般地，当我们作如下代换  $\vec{p} \rightarrow \frac{\vec{m}}{c}$ ,  $\vec{E} \rightarrow c\vec{B}$ ,  $c\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$ ，即可由电偶极子的场推出此偶极子的场。
- (2) 磁偶极辐射与电四极辐射一个量级，均比电偶极辐射小，因此对一个体系若其有磁偶极辐射，应当同时检查同一量级的电四极子是否存在。

## § 12.4 线型天线辐射

我们讨论线型天线的辐射问题。线型天线是最典型也是最常见的天线结构，它具有较强的辐射能力和较好的辐射方向性。

**要解决天线辐射的问题首先要知道天线中的电流分布。**我们考虑输入到天线中的信号随时间作简谐变化，则天线中的电流线密度一定也随时间作简谐变化。假设天线由理想导体组成，则电流只在导体表面且满足  $\vec{J} = \vec{n} \times \vec{H}$ 。进一步考虑磁场，其满足波动方程  $\left(\nabla^2 - \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{H} = 0$ ，故其解一定是  $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$  的线性组合 ( $\vec{k}$  可以取模为  $k = \omega/c$  的所有值)。当天线很细时，可只考虑  $\vec{k} = \pm k\hat{z}$  的两支波的贡献，故  $\vec{H}$  以及  $\vec{J}$  的形式一定只是  $e^{i(\pm kz - \omega t)}$  的线性组合。设信号沿天线的中点输入，取此点为坐标的原点，电流对此点是对称的，在天线的两端点 ( $z = \pm \frac{l}{2}$ ) 处电流应为零，故电流分布为

$$I(z', t') = I_0 e^{-i\omega t'} \sin\left(k\left(\frac{l}{2} - |z'|\right)\right) \quad (12.4.1)$$

知道了电流分布便可计算矢势  $\vec{A}$ ：

$$A_z = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\sin\left(\frac{kl}{2} - k|z'|\right) e^{-i\omega(t-R/c)}}{R} dz' \quad (12.4.2)$$

如图 12.6 所示，有 (图中  $\vec{R}_0$  记为  $\vec{r}$ )

$$R \approx r - z' \cos \theta \quad (12.4.3)$$

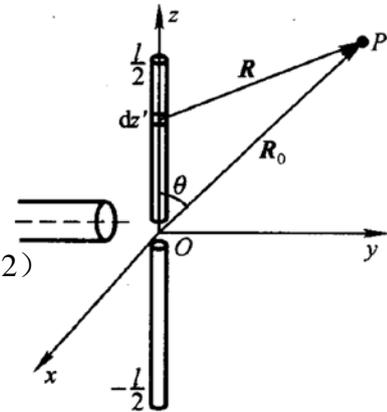


图 12.6

将 (12.4.3) 代入 (12.4.2)，在远场条件 ( $r \gg z', r \gg \lambda$ ) 下得

$$\begin{aligned} A_z &\approx \frac{\mu_0 I_0}{4\pi r} e^{-i\omega(t-r/c)} \int_{-l/2}^{l/2} \sin\left(\frac{kl}{2} - k|z'|\right) e^{-ikz' \cos \theta} dz' \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi k r} e^{-i\omega(t-r/c)} \left( \frac{\cos\left(\frac{kl}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kl}{2}}{\sin^2 \theta} \right) \end{aligned} \quad (12.4.4)$$

由  $\vec{A}$  可由  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  求得  $\vec{B}$ 。考虑远场时作代换  $\nabla \leftrightarrow i \frac{\omega}{c} \vec{e}_r$ ，则

$$\vec{B} = ik \vec{e}_r \times \vec{A} = -ikA_z \sin \theta \vec{e}_\phi \quad (12.4.5)$$

电场容易求得

$$\vec{E} = -\hat{k} \times (c\vec{B}) = -ickA_z \sin \theta \vec{e}_\theta \quad (12.4.6)$$

由  $\vec{E}$ 、 $\vec{B}$  即可求出辐射能流

$$\langle \vec{S}_P \rangle = \frac{1}{2\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}^*) = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi^2 r^2} \left[ \frac{\cos\left(\frac{kl}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kl}{2}}{\sin \theta} \right]^2 \vec{e}_r$$

平均角分布为

$$\langle f(\theta, \phi) \rangle = \left\langle \frac{\vec{S}_P \cdot d\vec{S}}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi^2 r^2} \left[ \frac{\cos\left(\frac{kl}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kl}{2}}{\sin \theta} \right]^2 \quad (12.4.7)$$

它依赖于  $\frac{kl}{2}$  的值。讨论如下：

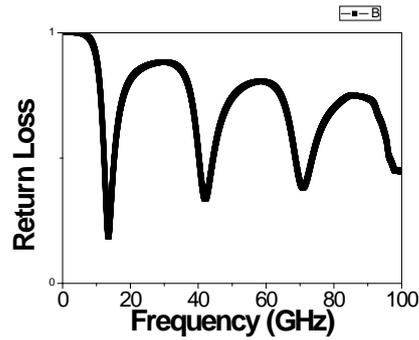
(1) 当天线长度远小于波长时， $kl \ll 1$ ，可以将上式展开得

$$\langle f(\theta, \phi) \rangle = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi^2} \frac{(kl)^4 \sin^2 \theta}{64} = \frac{\mu_0 \omega^4}{32\pi^2 c} \sin^2 \theta \times \left( \frac{I_0 l^2}{4c} \right)^2 \quad (12.4.8)$$

与 (12.3.12) 对比发现，此时天线等价于一个电偶极子，强度为  $p = \frac{I_0 l^2}{4c}$ 。显然

对短天线，天线越长，辐射能力越大。

(2) 当天线再增长到  $kl \ll 1$  条件不满足时，天线的辐射能力随  $kl$  做周期性振荡。通常人们将信号发生器与天线中间空隙的两端分别相连，给定一个定幅的输入信号，测量被反射回来的信号强度（称为反射损耗 - return loss, S11 等），显然这个量越小，说明辐射出去的功率越强，因此 S11 的极小值就标示着天线辐射的一个极大值。研究发现，当  $\frac{l}{\lambda} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$  时，天线的辐射能力达到极值 - 特别是半波电线（长度  $l = \frac{\lambda}{2}$ ）辐射能力最强。



(3) 随着  $\frac{l}{\lambda}$  的增大，辐射图案与偶极子辐射图案有了明显的区别，开始有分叉出现，并开始朝天线方向集中（书上的图形计算有误！）。真正有用的天线就是既有很好的辐射效率（S11 极小），又有很好的辐射图案的半波天线。

## § 12.5 天线阵

天线最重要的两个品质是辐射图案和辐射效率。虽然半波天线的辐射效率比较高，但它在  $\phi$  角上没有任何的定向性。在实际应用中，为了获得更好的辐射方向性，我们常把一系列天线排布成天线阵，利用干涉效应来获得较好的方向性。最常用的是把半波天线当作基元天线列阵。惯常的排布有两种：一种是线性排列。如图 12.8，或横向排列，如图 12.9；再有是  $m \times n$  方阵，如图 12.10。

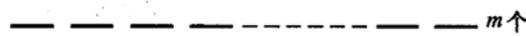


图 12.8

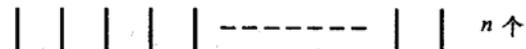


图 12.9

我们只讨论在线性排列的情况下，它的方向性同单一的半波天线的方向性有什么不同。如图 12.11， $m$  个半波天线线性排列，它们所激发的场到达远处某点的路程不同，这就使它们彼此间有相位差，从而发生干涉使辐射具有方向性，如图 12.11 所示。每个天线与其邻近的天线之间的路程差为  $l \cos \theta$ （ $l$  为两天线间的距离），若第一个天线的辐射场为

$$\vec{E}_1 = \vec{C}(\theta) \frac{e^{ikR_1}}{R_1}$$

则第二个半波天线的辐射场为



图 12.10



图 12.11

$$\vec{E}_2 = \vec{C}(\theta) \frac{e^{ikR_2}}{R_2}$$

由于  $R_2 \approx R_1 + l \cos \theta$ ，故有

$$\vec{E}_2 \approx \vec{C}(\theta) \frac{e^{ikR_1}}{R_1} e^{ikl \cos \theta} = \vec{E}_1 e^{ikl \cos \theta}$$

同理，可得第三个半波天线的场为

$$\vec{E}_3 \approx \vec{E}_1 e^{i2kl \cos \theta}$$

依次类推，得  $m$  个半波天线产生的总场为

$$\vec{E}_{total} = \sum_{N=0}^{m-1} \vec{E}_1 e^{iNkl \cos \theta} = \vec{E}_1 \frac{1 - e^{imkl \cos \theta}}{1 - e^{ikl \cos \theta}} \quad (12.33)$$

可见它的辐射角分布比单个半波天线的角分布多了一个因子：

$$\left| \frac{1 - e^{imkl \cos \theta}}{1 - e^{ikl \cos \theta}} \right|^2 = \frac{\sin^2 \left( \frac{m}{2} kl \cos \theta \right)}{\sin^2 \left( \frac{1}{2} kl \cos \theta \right)} = f(\alpha)$$

式中  $\alpha = kl \cos \theta$ ， $f(\alpha) = \frac{\sin^2 \left( m \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right)}$ 。因此总的辐射角分布为

$$f_{total}(\theta, \phi) = f_{single}(\theta, \phi) \cdot f(\alpha) \quad (12.34)$$

即在原有的单个天线的角分布的图案基础上加上一个干涉后的“形状因子”。

习题

P. 344, 12.5, 12.8, 12.10

补充题:

1) 证明 (12.4.8), 并从偶极子的定义出发证明通有谐变电流的短天线的有效偶极矩就是

$$p = \frac{I_0 l^2}{4c}。$$