

第二十二讲

上次课：

- 波导：场方程 - $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2\right) \begin{pmatrix} E_{0z}(x, y) \\ B_{0z}(x, y) \end{pmatrix} = 0$ ，只需计算率纵向场量，

横向场量均可以由纵向场量导出

$$\begin{cases} E_{0x} = \frac{i}{k_c^2} (ck_0 \partial_y B_{0z} + k_g \partial_x E_{0z}) \\ E_{0y} = -\frac{i}{k_c^2} (ck_0 \partial_x B_{0z} - k_g \partial_y E_{0z}) \\ B_{0x} = -\frac{i}{ck_c^2} (k_0 \partial_y E_{0z} - ck_g \partial_x B_{0z}) \\ B_{0y} = \frac{i}{ck_c^2} (k_0 \partial_x E_{0z} + ck_g \partial_y B_{0z}) \end{cases}$$

- 模式：TE 波 ($E_{0z} = 0$), TM 波 ($B_{0z} = 0$)
- 波导壁满足 PEC 边界条件： $\vec{n} \times \vec{E} = 0, \vec{n} \cdot \vec{B} = 0$

§ 9.2 矩形波导

矩形波导是指横截面为矩形的波导，结构如图 9.1 所示。设波导管壁为理想导体，分别考虑 TE 和 TM 两种极化方式的波的传输行为。

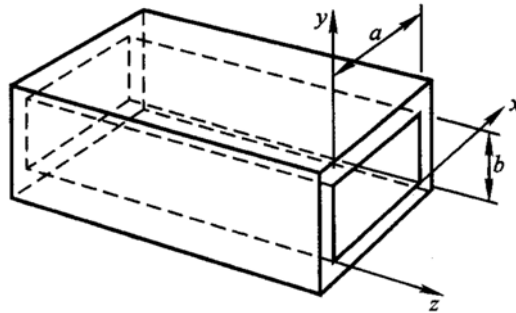


图 9.1

(1) TE 波

由上节的讨论可知，首先要求出轴向分量 B_{0z} 。在现在的情况下方程为：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2\right) B_{0z} = 0 \tag{9.2.1}$$

波场满足的条件为理想导体边界条件 (9.1.1), 亦即

$$B_{0x}|_{x=0,a} = B_{0y}|_{y=0,b} = E_{0x}|_{y=0,b} = E_{0y}|_{x=0,a} = 0 \quad (9.2.2)$$

根据 (9.1.8), 在 TE 波的条件下有

$$E_{0x} = \frac{i}{k_c^2} ck_0 \partial_y B_{0z}, \quad E_{0y} = -\frac{i}{k_c^2} ck_0 \partial_x B_{0z}, \quad B_{0x} = \frac{i}{k_c^2} k_g \partial_x B_{0z}, \quad B_{0y} = \frac{i}{k_c^2} k_g \partial_y B_{0z} \quad (9.1.8')$$

因此 (9.2.2) 式可转化成对 B_{0z} 的如下边界条件:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} B_{0z} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial y} B_{0z} \right|_{y=0} = 0 \quad (9.2.3)$$

根据分离变量法, (9.2.1) 的通解为 $B_{0z} = B_0 (\sin k_x x, \cos k_x x) \cdot (\sin k_y y, \cos k_y y)$,

其中 $k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$ 。再根据边条 (9.2.3), 不难证明, 满足上述方程和边界条件的解为:

$$B_{0z} = B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right), \quad (9.2.4)$$

$$k_c^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right),$$

式中 m 、 n 为正整数或零。(9.2.4) 式说明 (9.2.1) 式中不是所有的 k_c^2 都可以给出符合边界条件的解, 只有某些特定的值才被允许。进一步考虑 k_c^2 的定义可知, 这说明波导管内电磁波频率给定后, 波矢 k_g 必须取特定值。频率与波矢之间的关系称为色散关系, 为

$$k_g = \sqrt{k_0^2 - k_c^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{ck_c}{\omega}\right)^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \quad (9.2.5)$$

其中

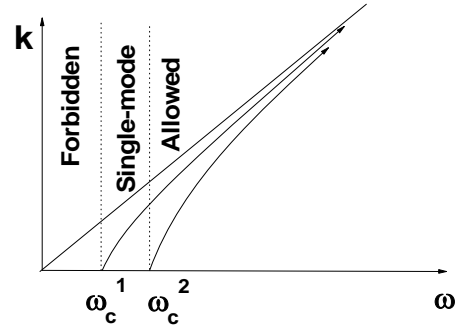
$$\omega_c = ck_c \quad (9.2.6)$$

当 $\omega < \omega_c$ 时, k_g 为纯虚数, 波导类似一个等离子体, 电磁波不能够传播, 这种模式称为消逝波, Evanescent mode; 当 $\omega > \omega_c$ 时, k_g 为实数, 波导类似一个常规电介质, 电磁波可以传播, 称为传播模式 (Propagating Mode)。 ω_c 给出了电磁波能够传播的最低频率, 因此称为 **截止频率 (Cut-Off Frequency)**。 m 、 n 取不

同的数值就对应了波的不同模式。通常人们根据 ω_c 的大小来标记模式的高低，因此

最低阶模式为 $H_{0,1}$ ($a < b$) 或是

$H_{1,0}$ ($a > b$)。在两个模式的介质频率之间，波只能以一种模式存在（如图所示）。



把(9.2.4) 代入(9.1.8')式得到 \vec{E} 、 \vec{B} 的全部分量为

$$TE波 \begin{cases} E_x = -i \frac{n\pi}{b} \frac{ck_0}{k_c^2} B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_g z - \omega t)} \\ E_y = i \frac{m\pi}{a} \frac{ck_0}{k_c^2} B_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_g z - \omega t)} \\ E_z = 0 \\ B_x = -i \frac{m\pi}{a} \frac{k_g}{k_c^2} B_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_g z - \omega t)} \\ B_y = -i \frac{n\pi}{b} \frac{k_g}{k_c^2} B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_g z - \omega t)} \\ B_z = B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_g z - \omega t)} \end{cases} \quad (9.2.7)$$

作为一个例子，考察最简单的也是最常用的波型 H_{10} 波的场分布。由(9.2.7)式得

$$\begin{cases} E_y = i \frac{\pi}{a} \frac{ck_0}{k_c^2} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(k_g z - \omega t)} \\ B_x = -i \frac{\pi}{a} \frac{k_g}{k_c^2} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(k_g z - \omega t)} \\ B_z = B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(k_g z - \omega t)} \end{cases} \quad (9.2.8)$$

电场只有 y 方向分量，则在

$y=0, b$ 两个边界自动满足边条；

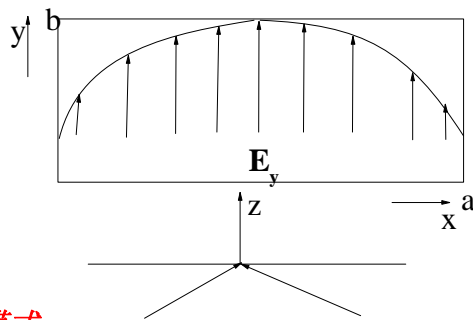
为了使得在 $x=0, a$ 出亦满足边条，

则 E_y 的大小沿 a 边正弦变化，

中间强两边弱，形成了一个波长

为 $2a$ 的驻波。可以想象，对于高阶模式，

无非是一两个界面为节点，形成有更多节点的驻波而已。



对于波导中的模式，事实上我们有另一种很有启发性的看法：每一个模式都可以展开成几个对称的平面波的线性叠加。如对 TE_{10} 模式，其波场 (9.2.8) 完全等价于一支波矢为 $\vec{k} = k_x \hat{x} + k_g \hat{z}$ 的平面波和另一支波矢为 $\vec{k} = -k_x \hat{x} + k_g \hat{z}$ 的平面波的叠加，即

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0^+ e^{i(k_x x + k_g z - \omega t)} + \vec{E}_0^- e^{i(-k_x x + k_g z - \omega t)} \quad (9.2.9)$$

其中

$$k_x = \pi / a \quad (9.2.10)$$

我们前面讲过在波导管中常规的平面电磁波（横波）不能传播，因为其不满足波导管中横向约束得边条。然而将它们进行合适的线性叠加之后的波就可以满足波导管的边界条件故可以传播，这种波当然不是常规意义下的横波。

(2) TM 波

下面来研究波导中的另一个极化状态 - TM 波。首先要求出轴向分量 E_{0z} ，其方程为(9.1.9)式，对应的边界条件(9.2.2)式现在可写成

$$E_{0z} \Big|_{x=0} = 0, \quad E_{0z} \Big|_{y=0} = 0$$

因此，满足上述边界的本征值问题的解为

$$\begin{aligned} E_{0z} &= E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right), \\ k_c^2 &= \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right), \end{aligned} \quad (9.2.11)$$

把(9.2.11)式代入(9.1.8)则可得横向分量。综合起来，TM 波场为

$$TM \text{ 波 } \left\{ \begin{aligned} E_x &= i \frac{m\pi}{a} \frac{k_g}{k_c^2} E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_g z - \omega t)} \\ E_y &= i \frac{n\pi}{b} \frac{k_g}{k_c^2} E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_g z - \omega t)} \\ E_z &= E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_g z - \omega t)} \\ B_x &= -i \frac{n\pi}{b} \frac{k_0}{ck_c^2} E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_g z - \omega t)} \\ B_y &= i \frac{m\pi}{a} \frac{k_0}{ck_c^2} E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_g z - \omega t)} \\ B_z &= 0 \end{aligned} \right. \quad (9.2.12)$$

我们作如下的讨论：

- (1) TM 波的色散关系、截止频率都与 TE 波类似。甚至任何一个 TM 波模式也都可以分成几支平面波的叠加，只是平面波的偏振状态与 TE 有所不同而已。
- (2) 不同的是对 TM 波， m, n 均不能为 0，否则 $E_{0z} \equiv 0$ ；因此对 TM 波，基模是 TM_{11} 模式。

(用录像展示截止频率的物理意义，以及 TE/TM 波下的波形)

§ 9.3 谐振腔

低频电磁波是利用 LC 电路组成的振荡器激发的，当频率很高时(例如微波范围)，这种振荡回路有强烈的焦耳热损耗。因此，必须用另一种振荡器——**谐振腔**来激发高频电磁波。

我们首先研究由理想导体所围成的封闭的腔体——谐振腔内的电磁场。显然腔中单色场满足如下方程：

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (9.3.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega\vec{B}, \nabla \times \vec{B} = -i\frac{\omega}{c^2}\vec{E} \quad (9.3.2)$$

在边界上，出于假定腔体是理想导体，所以有

$$\vec{e}_n \times \vec{E} = 0, \vec{e}_n \cdot \vec{B} = 0 \quad (9.3.3)$$

从根本上来说，我们是在边界条件(9.3.3)式下求解方程(9.3.1)和(9.3.2)式的。

谐振腔最简单的形状是空腔波导两端加上端面，端面与波导长度方向的轴线垂直。对于这种谐振腔，我们可以从波导的解出发，利用波的反射定律来解得谐振腔中的模式。由于端面的存在，波导内的场现在由两部分叠加而成：一是沿着 z 方向传播的前进波；二是沿着 $-z$ 方向的反射波，这两列波如何线性叠加，取决于两端面的材料(即边界条件)。若两端面同样是理想导体，则其边界条件为

$$\vec{e}_n \times \vec{E} \Big|_{z=0,d} = 0, \vec{e}_n \cdot \vec{B} \Big|_{z=0,d} = 0 \quad (9.3.4)$$

其中 $z = 0, d$ 是两端面的位置坐标。

[例 2] 求矩形波导两端加端面构成的谐振腔内的场。

解： 设波导和端面都是理想导体。对于 TE 波来说，前进波为(9.2.5)式，而反射波(即沿 $-z$ 方向传播的波)只要把(9.19)式中的 k_g 改成 $-k_g$ ， B_0 改成 B'_0 (B'_0 是待定的任意常数)即可。所以，腔中的场为

$$B_z = \left[B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{ik_g z} + B'_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ik_g z} \right] e^{-i\omega t}$$

其它的场量也可以相应导出。我们现在用边界条件来确定常数 B'_0 和 k_g 。因为端面也是理想导体，所以在端 $z=0$ 和 $z=d$ 处都有

$$\vec{e}_n \cdot \vec{B} = 0$$

即在 $z=0$ 处

$$B_z|_{z=0} = \left[B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + B'_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \right] e^{-i\omega t} = 0$$

故

$$B'_0 = -B_0$$

同时，由 $z=d$ 处的边界条件得

$$B_z|_{z=d} = 2iB_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin(k_g d) e^{-i\omega t} = 0$$

故有

$$\sin k_g d = 0$$

即得 k_g 为

$$k_g = \frac{p\pi}{d}, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (9.3.5)$$

注意到 $E_{0x} = \frac{i}{k_c^2} ck_0 \partial_y B_{0z}$ ， $E_{0y} = -\frac{i}{k_c^2} ck_0 \partial_x B_{0z}$ ，我们发现另一个边界条件 $\vec{n} \times \vec{E} = 0$

自动在 $z=0$ 和 $z=d$ 处满足。最后得到矩形谐振腔内场的空间部分为

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{0x} = -2iB_0 \frac{m\pi}{a} \frac{k_g}{k_c^2} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \\ B_{0y} = -2iB_0 \frac{n\pi}{b} \frac{k_g}{k_c^2} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \\ B_{0z} = 2iB_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \\ E_{0x} = 2B_0 \frac{n\pi}{b} \frac{ck_0}{k_c^2} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \\ E_{0y} = -2B_0 \frac{m\pi}{a} \frac{ck_0}{k_c^2} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \\ E_z = 0 \end{array} \right. \quad (9.3.6)$$

我们讨论如下：

(1) 磁场表达式和电场表达式之间相差一个因 i ，这表明电场和磁场在时间上存在着 $\frac{\pi}{2}$ 的相位差。这种形式的波与传播波 (\mathbf{E} , \mathbf{B} 同相位)，良导体中的电磁波 (\mathbf{E} , \mathbf{B} 有 $\pi/4$ 的相位差) 均不相同，与等离子体中的具有虚波矢的电磁波行为类似，因此可以预计，这里面平均没有能流。的确，电磁波在腔中形成了驻波，想所有方向上都没有净的能量流动。

(2) 因为 $k_g = \frac{p\pi}{d}$ ，且 $k_g^2 = k_0^2 - k_c^2$ ，于是得

$$k_0^2 = k_c^2 + k_g^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2 \quad (9.3.7)$$

所以，谐振腔的谐振频率和波长分别为

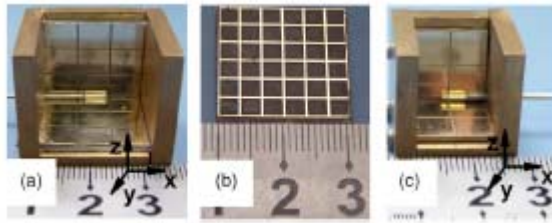
$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2}} \\ \lambda = 2 / \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2}} \end{array} \right. \quad (9.3.8)$$

(3) 谐振腔中的场用三个脚标 m 、 n 、 p 标记，每一组 (m, n, p) 的值决定一种振荡模式。对 E 波记为 E_{mnp} ，对 H 波记为 H_{mnp} ，并且 E_{mnp} 和 H_{mnp} 中的脚标 m 、 n 、 p 可取各种组合，使得谐振频率相等，但场的分布不同，此时说 E_{mnp} 和 H_{mnp} 是简并的。由 (9.3.6) 式可以看出， m 、 n 、 p 中不能有 2 个同时为 0，因此，谐振腔中的最低价模式为 (110)，(101) 或者 (011)。

(4) 在共振腔中加一个源，激发各个频率的波。当在腔壁凿一些小孔，或是将个别腔壁换成不是完全透射的，这时电磁波就会从这些地方耦合出去 (见下图)。因为共振

腔中只允许分立的模式存在，发射出去的电磁波就具有很好的选频性能，且辐射强度很高。另外电磁谐振腔也可以用到其它微波系统中，做选频，放大等功能。

- (5) 一个立方状的谐振腔，其能允许的最低阶的腔模式为 TE_{011} （有3支兼并模式），对应的波长为 $\lambda = a/\sqrt{2}$ 。这就意味着，对常规的谐振腔，要想实现某一个波长的谐振功能，其尺度必须大于某一个特定的大小。若要实现一个较长波的频率，谐振腔就要做的很大，对我们实际应用不利。应用电磁特异介质改变腔壁的反射性能，我们可以改变腔的谐振条件，从而打破这一尺度限制(参考我的研究组的两篇文章APL 86, 101101 (2005); APL 89, 104104 (2006)。可从我的主页上下载)



习题

P. 229, 9.1, 9.3, 9.4, 9.8

补充

- (1) 对截面为 $a \times b$ 的矩形波导，试将 TE_{01} 模及 TM_{11} 模展开成平面波的叠加。
- (2) (选作，写成 Note) 首先推导出 TM_{mnp} 模式的波场；然后详细讨论一个立方体谐振腔中每一个共振模式的简并度(即有多少波场不同的模式对应同样一个共振频率?)；最后证明 $\{m,n,p\}$ 中只能有一个为0。
- (3) (选作，写成 Note) 解析讨论一个立方体谐振腔中的基模对应的场分布，能流分布，用动画形式展示这种模式下的能流流动情形；尝试利用数值模拟软件模拟如何激励这种模式以及观测到其中的场/能流分布。