

第九讲

上次课

- 相互作用能 $W_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \phi_{\alpha}$ --- 注意 ϕ_{α} 的物理意义!

- 能量极小---静电平衡:

1) 有约束下平衡态为导体成为等势体 - 汤姆逊定理

2) 无约束下静电体系没有平衡态 - 恩肖定理

- 导体的受力

$$\vec{F}_s = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2 \vec{e}_n \quad \text{--- 引力, 永远是引力!}$$

表面电荷与电场达到平衡, Maxwell 张量法与直接计算结果一致

第四章 静电学 II-电介质静电学

上一章中我们研究了静电学的第一部分 - 与导体相关的静电问题。在那里, 我们没有真正求解电势的方程, 而是根据导体具有自由电荷这一特点研究了与导体相关的一些静电基本定理 --- 汤姆逊定理、恩肖定理、格林互易定理, 以及一些基本量的行为 - 如相互作用能、导体受力、电容系数等等。但要具体计算出这些物理量, 我们仍需知晓空间的电势分布 $\phi(\vec{r})$ 。在这一章中, 我们转而研究电介质中的静电场的行为, 目的就是计算 $\phi(\vec{r})$ 。与导体不同, 电介质中的电场不为 0, 电场的标势由方程

$$\nabla \cdot [\epsilon(\vec{r}) \nabla \phi] = -\rho_f(\vec{r})$$

决定, 其中 ϵ 可以是位置的函数 (针对非均匀介质的情形)。在一块均匀介质内部, ϵ 是常数, 故上式变为

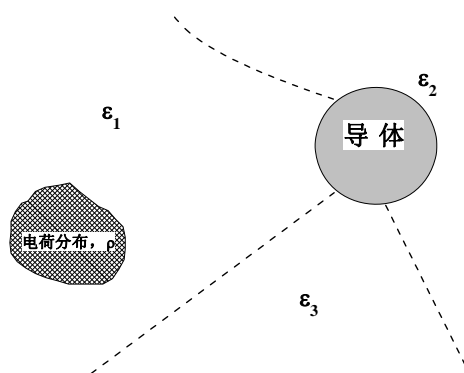
$$\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon} \rho_f$$

为大家熟知的泊松方程。

电介质中电场问题就转化成在合适的边界条件下解上述 Poisson 方程。

这些边界条件包括我们上一章讨论过的介质/导体表面边界条件, 以及

我们下面要介绍的介质/介质边界条件。



§ 4.1 电介质边界条件

由 Maxwell 方程我们已导出场在两个介质分界面的边值关系

$$\vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma_f \quad (4.1.1)$$

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (4.1.2)$$

其中 \vec{e}_n 为垂直于界面上 2 指向 1 的单位矢量，而 t 指的是界面上两个独立方向矢量。这里需要强调指出的是 σ_f 是自由电荷面密度，**它们是外加的原本不属于介质的源电荷，而且分布在介质分界面的一个薄层里所以被当作奇性的面电荷分布处理（不关心过渡层中的电场）**。根据 $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = -\varepsilon \nabla \varphi$ ，容易由 (4.1.1) 导出

$$\boxed{\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = -\sigma_f} \quad (4.1.3)$$

在将 $\vec{E} = -\nabla \varphi$ 带入 (4.1.2) 可得

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_{1j}} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_{2j}} \Rightarrow \frac{\partial(\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial n_{ij}} = 0 \Rightarrow (\varphi_1 - \varphi_2)|_{\text{surface}} = \text{const.} \quad (4.1.4)$$

其中 n_{ij} 为界面上的两个独立方向，而 const. 是个与界面上位置无关的一个常数。亦即：在两个介质的界面上，左右两边的标势值最多只差一个对此界面通用的常数值。下面来考虑这个常数。根据势的定义：

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l} \xrightarrow{h_1, h_2 \rightarrow 0} E_{2,n} h_2 + E_{1,n} h_1 \quad (4.1.5)$$

其中， h_1, h_2 为 1, 2 两个点离界面的距离，而 $E_{2,n}, E_{1,n}$ 为界面两端的垂直电场分量。因为我们要求 $h_1, h_2 \rightarrow 0$ ，显然 (4.1.5) 式只有在电场存在奇性 ($E_{1,n} \rightarrow \infty, E_{2,n} \rightarrow \infty$) 的时候才不为 0！**在所有我们考虑的情况下，电场都不会发散 - 即使有面电荷存在，两边的电场不会发散（尽管可以不连续），**

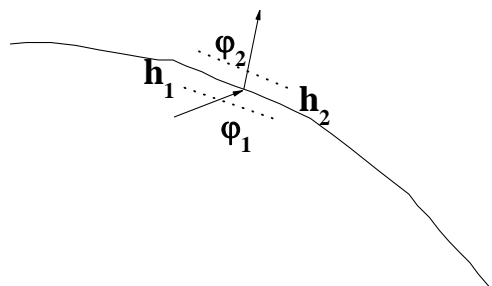
因此上面右端=0，即

$$\boxed{\varphi_1 = \varphi_2} \quad (4.1.6)$$

(4.1.3) 及 (4.1.6) 就是关于势的边界条件。

显然，边界条件 (4.1.6)

直接导致关于场的边界条件 (4.1.2)



注：关于电势条件 (4.1.6)，唯一的例外是点电荷，因为点电荷的场在原点是发散的，的确 $\varphi|_{0^+}, \varphi|_{0^-}$ 是不连续的。只要将点电荷描述成一个带电为 q 的半径为 a 的小球，则一切问题均解决了。这再一次显示了点电荷只是一个数学模型而已。

§ 4.2. 唯一性定理

有了边界条件，原则上可以解 Poisson 方程以得到所有关于场的信息。在介绍静电方程的解的具体方法之前，首先介绍一个重要的定理--- **唯一性定理**。

定理： 如果静电体系内存在电荷分布 $\rho(\vec{r})$ 和电介质分布 $\varepsilon(\vec{r})$ ，且关系式 $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ 成立，则体系的电场由边界条件（即边界上的 φ 或 $\hat{e}_n \cdot \vec{D}$ ）唯一确定，即不可能存在两组不同的电场解，都满足同样的边界条件（参照 4.1 节上面的图）。

证明： 我们利用反证法证明。设对同一个体系存在有两个解 φ' 和 φ'' ， $\vec{E}' = -\nabla \varphi'$, $\vec{E}'' = -\nabla \varphi''$ ； $\vec{D}' = \varepsilon \vec{E}'$, $\vec{D}'' = \varepsilon \vec{E}''$ ，下面我们将证明它们其实是同样的：

$$\vec{D}' = \vec{D}'', \vec{E}' = \vec{E}'' \quad (4.2.1)$$

根据定义，这两个场都要满足同样的边界条件，即在边界处有

$$\varphi' = \varphi'' \quad \text{或者} \quad \vec{D}' \cdot \vec{e}_n = \vec{D}'' \cdot \vec{e}_n \quad (4.2.2)$$

因此定义一个函数， $\vec{Z}(\vec{r}) = (\varphi' - \varphi'')(\vec{D}' - \vec{D}'')$ ，其在边界上的积分一定为 0：

$$0 = \oint_S (\varphi' - \varphi'')(\vec{D}' - \vec{D}'') \cdot d\vec{S} = \oint_S Z(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{Z}(\vec{r}) d\tau \quad (4.2.3)$$

检查对 $\vec{Z}(\vec{r})$ 的散度，发现

$$\nabla \cdot \vec{Z}(\vec{r}) = (\varphi' - \varphi'')(\nabla \cdot \vec{D}' - \nabla \cdot \vec{D}'') + (\nabla \varphi' - \nabla \varphi'') \cdot (\vec{D}' - \vec{D}'') \quad (4.2.4)$$

由于讨论的是同一个体系，必有 $\nabla \cdot \vec{D}' = \nabla \cdot \vec{D}'' = \rho$ ，故

$$\nabla \cdot \vec{Z}(\vec{r}) = -(\vec{E}' - \vec{E}'') \cdot (\vec{D}' - \vec{D}'') \quad (4.2.5)$$

将上式带入 (4.2.3) 可得，

$$\int_V (\vec{E}' - \vec{E}'') \cdot (\vec{D}' - \vec{D}'') d\tau = -\int_V \nabla \cdot \vec{Z} d\tau = 0 \quad (4.2.6)$$

根据已知条件

$$\vec{D}' = \varepsilon \vec{E}', \vec{D}'' = \varepsilon \vec{E}''$$

带入上式可得

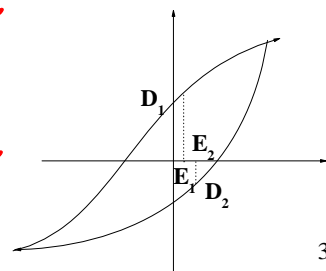
$$\int_V \varepsilon(\vec{r}) |\vec{E}' - \vec{E}''|^2 d\tau = 0 \quad (4.2.7)$$

而由于 $\varepsilon \geq 1$ ，所以有

$$\vec{E}' = \vec{E}''$$

两个解相同，静电场是唯一的。由 $\vec{E} = -\nabla \varphi$ 可知，电势 φ' 与 φ'' 之间最多差一个任意常数。我们对此作一些讨论：

- (1) 在某一些介质中 \vec{D} 和 \vec{E} 之间并不一定是线性的，一般说来 \vec{D} 是 \vec{E} 的函数。这时，只要 \vec{D} 是 \vec{E} 的单值单调递增函数，则由(4.2.6)式可看出，定理仍成立。对铁电介质来说，上述唯一性定理不成立，因为有电滞回线存在， \vec{D} 和 \vec{E} 不再是单值的。的确，此时对应同样的边界条件可以有不同的解。物理上，



这是因为铁电介质中的状态不仅与边界条件有关，还与历史有关。

(2) 唯一性定理对静电学的重要性在于：只要我们得到了一个解，其满足 Poisson 方程以及相应的边界条件，它一定就是问题的严格解。因此，有些时候，我们根据物理直觉可以猜出一些问题的解，其正确性有唯一性定理保证。

Comments added:

静电问题原则上就是在一定的边界条件下解 Poisson 方程，这变成了一个纯粹的数学问题。下面我们将介绍两种解决方法，它们仅仅适用于一些特殊的具有高对称性的问题。在一般情况下，电荷分布、边界形状都是任意的，此时解决问题必须要用到计算机及合适的数值计算方法。目前有许多成功的计算方法-其中之一就是“有限元方法”，现成的软件为 COMSOL。这个方法精髓就是将任意空间分成一个个的小区间，分而治之。还有一些其他的方法，如“边界元”方法等。原则上讲，解析方法和数值方法对我们都同要重要，前者给我们许多灵感和 insight 但可解的东西有限；后者可以解决很多问题，而且可以给我们许多直观的图像，但如果太依赖于它，又有可能失去许多严格的结论。二者应当结合起来，相得益彰。

§ 4.3 镜像法

镜像法是解静电边值问题的一种特殊解法，这种解法的基本精神是将静电问题中边界对场的影响用边界外部虚设的像电荷代替。原则上讲，区域内的电势是由区域内的电荷和处在边界处的电荷（假设边界外的空间为导体，没有电荷）共同决定的：

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\sigma_b(\vec{r}')ds'}{R} \quad (4.3.1)$$

区域内的电荷分布已知，因此电势容易计算。但边界处的电荷密度 $\sigma_b(\vec{r}')$ 通常是未知数 - 对设定电势的情形电荷本来就不确定；对孤立导体情形我们只知道总电荷，不知道电荷分布，这给我们解决问题带来了不便。幸运的是，在某些特定情形下，后一部分的影响可以等价于处于区域外部的一些虚拟电荷对区域内的影响，亦即，

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_{image} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho_{image}(\vec{r}'')d\tau''}{R} \quad (4.3.2)$$

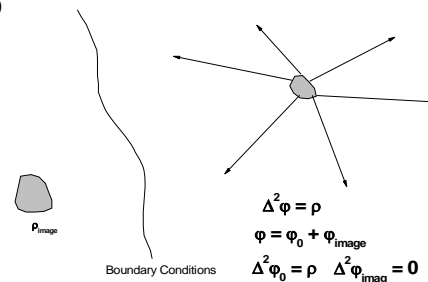
其中后一个积分区域在考虑的区域外。因像电荷放在边界的外部，故有

$$\nabla^2 \varphi_{image} \equiv 0, \quad (4.3.3)$$

因此我们仍有 Poisson 方程

$$\nabla^2 \varphi = -\rho / \epsilon$$

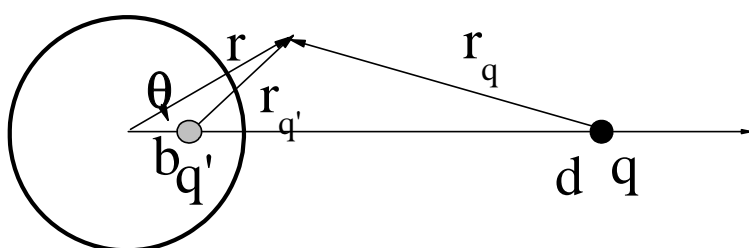
因此只要调整像电荷的位置和大小，



使它总电势 φ 满足所给的边界条件，那么我们便找到了问题的解。这种解法的正确性可由唯一性定理保证。下面我们将借助一个典型例题来说明这种问题的解法。

[例] 设一点电荷附近有一接地导体球面，求空间电势分布。

解： 如图所示，取球心为坐标原点，球心到点电荷 q 的方向为 x 轴。设 q 的坐标为 $(d, 0, 0)$ ，球半径为 R ，球内的电势为零，这是显然的，故只要讨论球外空间的电势即可。



球外空间的电势所满足的方程和边界条件是：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} q \delta(x-d, y, z) \\ \varphi|_{r=R} = 0 \\ \varphi|_{r=\infty} = 0 \end{array} \right. \quad (4.3.4)$$

球外空间的电势由两部分组成，即点电荷 q 所产生的电势和球面感应电荷所产生的电势。根据镜像法的精神，可以试图找到界面外的一个像电荷来等价这部分贡献。根据问题对称性，容易明白此像电荷（如果存在的话）应在球内 $(b, 0, 0)$ 处，设其电量为 $-q'$ 。因此，我们得到球外空间的试解为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_q} - \frac{q'}{r_{q'}} \right) \quad (4.3.5)$$

其中

$$\begin{aligned} r_q &= \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}, \\ r_{q'} &= \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta} \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

下面的工作是看能否确定适当的 b 和 q' ，使试解满足边界条件（Poisson 方程自动满足，这是镜像法的一大优点！）。

无穷远处的边界条件自动满足，只需考虑势在球面 $(r = R)$ 上为零的边界条

件。为此，把条件 $\varphi|_{r=R} = 0$ 代入试解，转换成球坐标表示，则有

$$\frac{q}{\sqrt{d^2 + R^2 - 2Rd \cos \theta}} - \frac{q'}{\sqrt{b^2 + R^2 - 2Rb \cos \theta}} = 0 \quad (4.3.7)$$

即

$$q^2(b^2 + R^2 - 2Rb \cos \theta) = q'^2(d^2 + R^2 - 2Rd \cos \theta) \quad (4.3.8)$$

因为对任意 θ 值，上式都应成立，故有

$$\begin{cases} q^2(b^2 + R^2) = q'^2(d^2 + R^2) \\ q^2b = q'^2d \end{cases} \quad (4.3.9)$$

这有两组解

$$\begin{aligned} b = d, q' = q; \\ b = \frac{R^2}{d}, q' = \frac{R}{d}q \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

解 ($b = d, q' = q$) 不符合要求 (像电荷不应在源电荷的空间内)，只有解

($b = \frac{R^2}{d}, q' = \frac{R}{d}q$) 满足要求。于是得到问题的解为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} - \frac{\frac{R}{d}q}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{R^2}{d}\right)^2 - 2r\frac{R^2}{d} \cos \theta}} & (r > R) \\ 0 & (r < R) \end{cases} \quad (4.3.11)$$

知道了电势的分布便可求出球面上的电荷面密度

$$\begin{aligned} \sigma = \epsilon_0 E_r = -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} &= -\frac{q}{4\pi R^2} \left(\frac{R}{d}\right) \frac{\left(1 - \frac{R^2}{d^2}\right)}{\left[1 + \frac{R^2}{d^2} - 2\frac{R}{d} \cos \theta\right]^{3/2}} \\ &= -\frac{q'}{4\pi R^2} F(\theta) \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

其中

$$F(\theta) = \frac{\left(1 - \frac{R^2}{d^2}\right)}{\left[1 + \frac{R^2}{d^2} - 2\frac{R}{d} \cos \theta\right]^{3/2}} \quad \text{为一个角分布函数。}$$

在两个极限条件下考虑面点荷 (电场) 分布:

A) $R/d \rightarrow 0$ ，此时源电荷离导体球很远，对整个导体球来讲近似为均匀电场。

此时，角分布为 $F(\theta) \approx 1 + 3\frac{R}{d} \cos \theta$ ，这显示整个导体的面电荷基本为均匀分布

下，但有一个因为电场而产生的一点调制，离源电荷近则感应电荷多（其实这点调制正是形成了一个偶极子，后面会讲到）；

B) $R/d \rightarrow 1$ ，此时源电荷离导体球很近，看到的基本上是一个无限大平面，

$$F(\theta) = \begin{cases} \infty, & \cos\theta \rightarrow 1 \\ 0, & \cos\theta \rightarrow -1 \end{cases}$$

感应电荷只出现在靠近源电荷的一边。

然而无论怎样，总感应电荷为

$$\int \sigma dS = \int \sigma(\theta) 2\pi R^2 \sin\theta d\theta = -\frac{R}{d} q = -q' \quad (4.3.13)$$

即像电荷的大小等于导体面上的感应电荷。

导体球所受的静电力等于电场作用到导体球上的感应电荷的作用力。导体表面单位面积受的作用力为

$$\vec{f} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \hat{r}$$

导体球受的总力可以由积分求得。根据对称性，只有 x 分量非 0。经过一个繁复的积分可得：

$$F = \oint \vec{f} \cdot \hat{x} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{R^2} \left(\frac{R^3}{d^3} \right) \left/ \left(1 - \frac{R^2}{d^2} \right)^2 \right. \quad (4.3.14)$$

简单计算可得

$$\boxed{F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qq' / (d-b)^2} \quad (4.3.14')$$

这个力正好是点电荷 q 对像电荷 q' 的作用力；根据牛顿第 3 定律，点电荷受到导体上像电荷等量反向的作用力，称为“镜像力”。

习题

- (1) 利用直接积分推导 (4.3.13) 和 (4.3.14)

