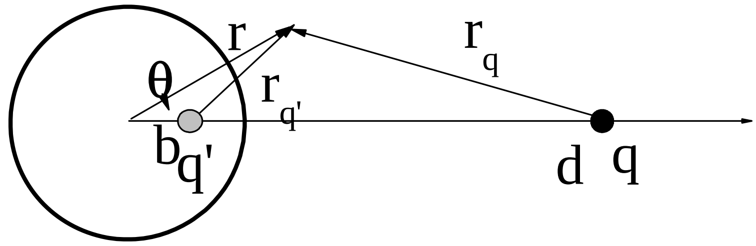
第十讲

上次课：

- 介质/介质边界条件：$\varphi_1=\varphi_2$，$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}=-\sigma_f$
- 唯一性定理 – 边条确定后解唯一确定
- 镜像法 – 利用虚拟电荷代替界面处的面电荷，使其满足边条，唯一性定理可确定其是问题的真实解



$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r_d}-\frac{q'}{r_b}\right],\qquad b=\frac{R^2}{d},\ q'=\frac{R}{d}q$$

利用上面得到的结果，我们可以引申出来许多题目，并得到解答。

（1） 当$R/d\to 1$时，设$d=R+\delta,\ \delta\to 0$，有：

$$b=R^2/(R+\delta)\approx R-\delta,$$

$$q'=qR/(R+d)\sim q(1-d/R)\sim q,$$

此时物理问题等价于无限大平面的像电荷的解。

（2）<u>导体球接电势V_0</u>。此时边界条件为：$\varphi|_{r=R}=V_0$，V_0是已知常数。为了满足此边界条件，应在原解（$\varphi|_{r=R}=0$）的基础上再加上镜像电荷（处于导体内部），其作用是在导体表面上产生一个常数电势。简单的分析发现此像电荷应处于导体球中心，电量为$q''=4\pi\varepsilon_0V_0R$。 故此时的解为

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r_d}-\frac{q'}{r_b}+\frac{q''}{r}\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r_d}-\frac{q'}{r_b}\right]+\frac{V_0R}{r}\qquad(4.3.15)$$

（3）<u>导体球为孤立导体带电 **Q**。</u>这种情况的边界条件为$\varphi|_{r=R}=$常数(未知)，以

及

$$-\varepsilon_0 \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = Q \tag{4.3.16}$$

根据与上题相同的 Argument，必须加上一个放在球心电量为 q'' 的像电荷。于是，球外电势为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r_q} - \frac{q'}{r_{q'}} + \frac{q''}{r}\right] \tag{4.3.17}$$

此时计算球面上的电荷可知

$$Q = -\varepsilon_0 \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = -q' + q'' \quad \Rightarrow \quad q'' = Q + q' \tag{4.3.18}$$

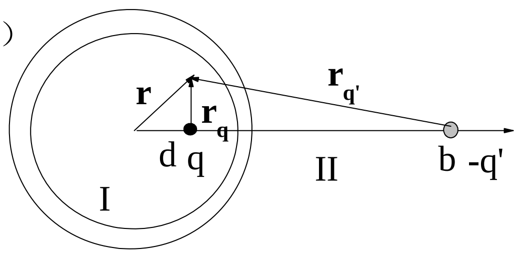
问题得解。

（4）点电荷 q 在导体球壳内，距球心 d 处。

这类问题要复杂许多，先考虑一个简单的情形：**球壳接地。**

此时球内（I）外（II）区域内的电势分别满足

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_I = -q\delta(x-d, y, z)/\varepsilon_0 \\ \nabla^2 \varphi_{II} = 0 \end{cases} \tag{4.3.19}$$



而边界条件为

$$\begin{cases} \varphi_I = \varphi_{II} = 0, \quad r = R, & (1) \\ \varphi_{II} \to 0, \quad r \to \infty & (2) \end{cases}$$

先考虑球内的电势。根据镜像法的精神，球内的电势应当是由真实电荷 q 和球外的“像电荷” q’的叠加：

$$\varphi_I = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r_q} - \frac{q'}{r_{q'}}\right]$$

与电荷在球（壳）外面的情形类似，可以解得 $q' = q\dfrac{R}{d}$， $b = R^2/d$ 。 考虑球壳外的电势，应当是 $\varphi_{II} = 0$ 。接下来考虑一个复杂一点的情形，假设球壳的电势设为 V_0，因此边条改为 $\varphi_I = \varphi_{II} = V_0$， $r = R$ 。此时原来得到的解不能满足边界条件（1），需再设“像电荷”才行。***简单的分析发现任何处于 II 区的像电荷都不能满足条件（1），又不能在原点设像电荷（因处于考察区），怎么办呢？***

解决的办法是注意到$\varphi = V_0$本身就是 Poisson 方程的解。在以前电荷放置于球外的问题中我们不用这个解，因为那时考察区域在球外，这个解不能满足边界条件$\varphi \to 0,\ \ r = \infty$。但现在考察区在球内，不需要这个边界条件，故可以采用，因此，I 区电势的最终解为

$$\varphi_I = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r_q} - \frac{q'}{r_{q'}}\right] + V_0 \qquad (4.3.20)$$

下面考虑 II 区中的电势。这个区域内无源，电势应当是某些处于其它区域的像电荷产生，考虑边条（1），显然“像电荷”为处于原点（I 区）的电量为$4\pi\varepsilon_0 V_0 R$的点电荷。因此，II 区电势：

$$\varphi_{II} = \frac{V_0 R}{r} \qquad (4.3.21)$$

（4.3.20）-（4.3.21）就是问题的解，满足所有的方程以及边条。问题虽然得解，但物理图像不清楚：***比如此时导体球壳上带电荷为多少？为什么 I 区的电场与外部条件无关？***要搞清楚这些问题，必须意识到事实上导体球壳应当是无限薄的一个壳层，有内外两个界面。静电平衡时电荷分布在两个界面上，球壳内部的电荷密度为 0。内表面上的电荷密度可以容易由

$$\sigma_{in} = -\varepsilon_0 E_{in} = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_I}{\partial r} = \frac{-q}{4\pi R^2}\frac{1-(d/R)^2}{\left(1+(d/R)^2 - 2(d/R)\cos\theta\right)^{3/2}} = \frac{-q}{4\pi R^2}\tilde{F}(\theta) \qquad (4.3.22)$$

求出，其总电荷可以由上式积分求出，但更容易地，可由 Gauss 定理求出：

$$0 = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = q_{in} + q \quad \Rightarrow \quad q_{in} = -q \qquad (4.3.23)$$

而外表面上的电荷为

$$q_{out} = \oint \sigma_{out}\cdot dS = 4\pi\varepsilon_0 R V_0 \qquad (4.3.24)$$

因此物理图像是：

（1）球内的电荷在球壳内表面感应出等量异号的电荷即达到平衡，再外加任何电荷都不会跑到内表面而只会呆在外表面。

（2）这些均匀分布在外表面的电荷起的作用不过是改变整个球壳的电势，但对内电场没有丝毫影响。

（3）σ_{in}对应于 II 区处于 b 处的“像电荷”，而σ_{out}对应于贡献$\varphi = V_0$的像电荷（对应于

一个球对称的势的“像电荷”也应当对称分布）

§ 4.4 本征函数展开法

本节介绍的是静电学的一个相当普适的方法，大家学习时应仔细体会。基本上，我们面临的一类问题是在某种边界条件下求解拉普拉斯方程

$$\nabla^2\varphi = 0 \qquad (4.4.1)$$

“源”的作用通过边界条件显现出来。据不同的边界形状，我们可以选取适当的坐标系，用分离变量法求解拉普拉斯方程的通解。假设我们得到了这组解 $\{\varphi_n, n=1,2,...\}$，它们通常是<u>正交完备</u>的：$\langle\varphi_n\varphi_m\rangle = \delta_{n,m}$。根据<u>完备性</u>，我们一定可以将 φ 展开成这组本征态的线性叠加：

$$\varphi = \sum C_n\varphi_n \qquad （4.4.2）$$

（4.4.2）一定是（4.4.1）的解，但不一定满足所要求的边界条件。<u>必须根据边界条件及本征函数的正交性来确定展开系数</u> C_n。比如通常的边界条件是

$$\varphi\big|_{boundary} = \varphi_0(\xi) \qquad （4.4.3）$$

其中 ξ 是界面上的位置变量。根据本征函数的正交性，我们很容易得到展开系数的表达式：

$$C_n = \int \varphi_n(\xi)\varphi_0(\xi)d\xi \qquad （4.4.4）$$

下面总结一下不同坐标系下的本征函数及它们的正交性。我们应当根据所面临的问题的对称性选择合适的通解形式进行求解。

<u>**(1) 轴对称的球坐标系问题 （与变量 ϕ 无关）**</u>

对此类问题，Laplace 方程的本征解为 $r^l P_l(\cos\theta),\quad r^{-(l+1)}P_l(\cos\theta)$。因此通解可以一般写成：

$$\varphi = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta) \qquad （4.4.5）$$

经向波函数r^l分别在 r=0 处收敛，$r^{-(l+1)}$在$r\to\infty$时收敛。$P_l(x)$为 Legendre 多项式，低阶的几项为

$$\begin{cases} P_0(x)=1 \\ P_1(x)=x \\ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) \\ \ldots \end{cases} \qquad (4.4.6)$$

本征函数之间满足如下正交关系

$$\int P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta)d\cos\theta=\frac{2}{2l+1}\delta_{l,l'} \qquad (4.4.7)$$

（2）与 z 无关的柱对称问题

对此类问题，Laplace 方程的本征解为$\rho^{\pm n}e^{\pm in\phi}$，$\ln(\rho)$，1。因此其通解为

$$\varphi=A_0+B_0\ln\rho+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\rho^n+B_n\rho^{-n})\cos(n\phi)+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\rho^n+D_n\rho^{-n})\sin(n\phi) \qquad (4.4.8)$$

本征函数之间的正交性为

$$\begin{aligned} &\int\cos(n\phi)\sin(n\phi)d\phi=0 \\ &\int\cos(n\phi)\cos(n'\phi)d\phi=\int\sin(n\phi)\sin(n'\phi)d\phi=0,\quad n\neq n' \end{aligned} \qquad (4.4.8)$$

下面，我们通过几个实例来介绍这种方法。为增强信心，先考虑一个简单的情形

[例 4] 一半径为R的接地导体球置于一均匀外场$\vec{E}_0$中，求空间场的分布。

解：如图所示，取$\vec{E}_0$方向为z轴，这是一个绕z轴旋转对称的问题。球外空间没有电荷，电势在无穷远处趋向于均匀电场的电势，总的来说，电势满足

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi=0 \\ \varphi=0, \qquad r=R \quad (1) \\ \varphi\to -E_0 r\cos\theta, \qquad r\to\infty \quad (2) \end{cases} \qquad (4.4.9)$$

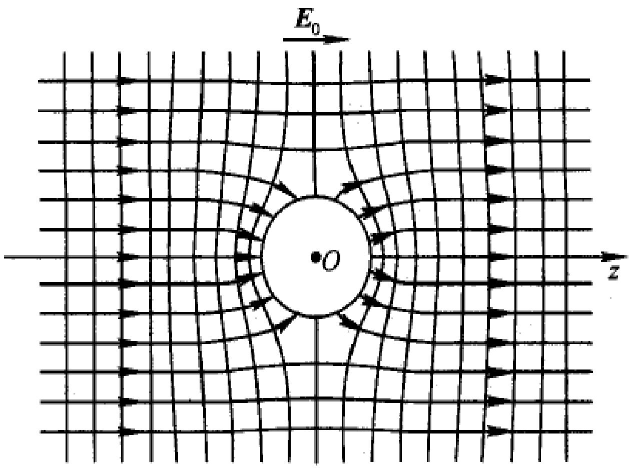


图 4.5

这个问题的通解即为：

$$\varphi=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta) \qquad (4.4.10)$$

通解中有无穷多常数，这些常数可由问题的边界条件确定。虽然看上去很复杂，其实仔细分析之后不难解决。将试解带入边条（2），发现

$$\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(\cos\theta)\xrightarrow{r\to\infty}-E_0 r\cos\theta \qquad (4.4.11)$$

根据 $P_l(\cos\theta)$ 函数的相互正交性，我们可以分别比较（4.4.11）式中不同 $P_l(\cos\theta)$ 函数的系数。因此可得

$$A_1=-E_0, \qquad \{A_l=0, \quad l=0,2,3,...\} \qquad (4.4.12)$$

再将试解带入边条（1），得到

$$\left(-E_0 R+\frac{B_1}{R^2}\right)\cos\theta+\sum_{l\neq 1}^{\infty}\frac{B_l}{R^{l+1}}P_l(\cos\theta)=0 \qquad (4.4.13)$$

再次利用 $P_l(\cos\theta)$ 函数的相互正交性，不同 $P_l(\cos\theta)$ 的参数应当分别为 0，故

$$B_1=E_0R^3, \qquad \{B_l=0, \quad l=0,2,3,...\} \qquad (4.4.14)$$

将（4.4.12）与（4.4.14）代入试解，我们得到最终的结果

$$\varphi=-E_0 r\cos\theta+\frac{E_0R^3}{r^2}\cos\theta \qquad (4.4.15)$$

至此，我们已完成了这个问题的求解。为了看出更多的物理，我们将（4.4.15）

改为

$$\varphi = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (4.4.16)$$

其中

$$\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \vec{E}_0 \qquad (4.4.17)$$

我们看到此时除了外加的均匀电场的贡献外，还有一个偶极子的电场. 这是由于导体球在电场的作用下正电荷推积在一侧，而负电荷推积在电场的另一侧，因此对外面的作用等效为一个偶极子，其偶极矩正比于外加电场以及球的体积！

讨论：

（1） 我们可以认为偶极子的场就是这个体系在外场下的散射场。外场是均匀电场，所以只产生偶极子；

（2） 我们在上节研究导体球外有点电荷的问题时，曾经考虑过当点电荷离导体球非常远的情形。那时我们的结论是导体球在外场下的电荷分布是形成了一个偶极子。其实当电荷离目标很远时，其电场就是近似为均匀场！将其与现在我们考虑的情况建立一个联系将是非常有意思的事情。

（3） 你可以进一步了解本征函数展开方法的本质 – 其实展开系数完全由边界条件决定！在这个问题中，外界条件是均匀场，其只具有 l=1 项，因此最后的结果也就只有 l=1 项。若外场不是均匀场，而是具有高 l 的项，则体系的响应也一定有高 l 项。

注：人们会问边界条件 $\varphi \to -E_0 r\cos\theta, \quad r\to\infty$ (2) 为什么不能加上一个常数电势 φ_0？若加上的话，这个常数是什么意思？其实无限大空间均匀电场的问题从来不是一个 “well-defined” 的问题。因为我们通常取无限远处为电势 0 点，但无限区域中的均匀电场要求无限远处有电荷以及电势不是 0。真正的实验上实现均匀场只能在有限空间，比如用平板电容，此时问题是 Well-defined，但求解这样一个问题就比现在我们考虑的复杂许多，因为极板会引入无穷多镜像电荷…。因此我们现在考虑的是真实情况的一种理想化，是实验上不能实现的。在我们今后的学习中，我们还要考虑这种理想情形，因为这类问题可以

解析求解且给我们许多 Insight。 需要说明的是，此时我们总是假设φ_0为 0，相当于我们选择了坐标原点为电势 0 点。

习题：

（1） 一个孤立的带电 Q 的导体球壳（半径为 R）中离球心 d 处放置一个带电为 q 的点电荷，求空间的电势分布及电荷分布。

（2） 设一个孤立的带电量为 Q 的导体球放置在外电场中，计算空间的电势分布。仿照课件给出所有的推导步骤。

附加题（有兴趣的同学选作）

（1） 在两块无限大接地金属平板之间，利用分离变量法计算直角坐标系下的 Laplace 方程的通解，并讨论不同本征函数之间的正交关系。