第七讲

第三章 静电学 I – 导体静电学

第一二两章给出了电磁场的基本规律及守恒定律。从本章开始，我们将从简到难介绍这些电磁规律在不同的具体情况下的表现形式。第三、四两章将介绍最简单的情况 – 静电学。我们将分成两个部分来介绍静电学，本章主要研究与导体相关的静电学，而下一章主要关注与介质相关的静电问题。但是这种划分并不是严格的，其实两类问题满足相同的方程，只不过解决问题的方法和侧重点有所不同而已。

§3.1 静电问题

1. 静电基本方程

静电现象（eletrostatics）研究的是电磁学中这样的一种问题：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{物理量})=0 \quad \text{和} \quad \vec{j}=0$$

即所有物理量都不随时间改变（指“静”），且电荷静止不动（指“电”）。把静电条件代入麦克斯韦方程中，显然空间不会激发磁场（即没有电流，也没有变化电场），故只有静电场，满足

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=\rho \\ \nabla\times\vec{E}=0\end{cases} \tag{3.1.1}$$

根据$\nabla\times\vec{E}=0$，可以引入标势$\vec{E}=-\nabla\varphi$，则标势满足的方程为

$$\nabla\cdot\left(\varepsilon(\vec{r})\nabla\varphi(\vec{r})\right)=-\rho(\vec{r}) \tag{3.1.2}$$

在一块均匀介质的内部有$\varepsilon(\vec{r})=\varepsilon$，则上式转化成标准的 Poisson 方程

$$\nabla^2\varphi(\vec{r})=-\rho(\vec{r})/\varepsilon \tag{3.1.3}$$

在介质与导体的交界面上场及势要满足相应的边界条件，下面讲。

2. 静电条件下导体的边界条件

所谓导体即是能导电的介质，当它内部存在电场时就会引起传导电流。在导体中有关系$\vec{j}=\sigma_c\vec{E}$，可见在静电学(即$\vec{j}=0$)的前提下，导体内的电场强度必须为零，否则必定引起电流。根据$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}=0$的关系知$\nabla\cdot\vec{D}=\rho=0$，即导体内部不可能有电荷分布。所以对导体来讲，电荷只能分布在表面上。进一步分析导体表面的电荷是如何分布的：若导体表面上切向电场不为 0，则表面电荷必然在电场的作用下运动，引起表面电流，这与静电条件不符。因此，静电条件下导体表面的电场的切向分量为 0，亦即，导体表面的标势处处相等。导体表面电场的法向分量可以不为 0，根据 Gauss 定理，其与此处的表面电荷面密度成正比

（$D_\perp=\sigma\Rightarrow E_\perp=\sigma/\varepsilon$）。与切向运动不同，因为导体内部的电荷在表面处受到非静电来源的束缚能-即“功函数”，自由电荷受到垂直电场的作用不会飞出导体。总结下来，与导体相关的电场行为满足

$$\begin{cases} \vec{E}_{in}=0,\rho_{in}=0 \\ \vec{E}_{\parallel}^{surface}=0 \\ \vec{E}_{\perp}^{surface}=\sigma/\varepsilon, \text{ both are unknowns!!!} \end{cases} \tag{3.1.4}$$

需要强调指出的是：导体表面上的电荷分布和表面垂直电场均是未知量！进一步将上面关于场的边界条件转化成对势的边界条件，有

$$\begin{cases} \varphi|_{\text{Boudary}}=\text{Constant}; \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\text{Boudary}}=-\frac{\sigma}{\varepsilon},\ \ Q=-\varepsilon\oint\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS. \end{cases} \tag{3.1.5}$$

所有这些条件都是因为导体内部有自由电荷这个性质决定的！

原则上，导体相关的静电问题就是在边界条件（3.1.5）下求解（3.1.3）。这里可能有两类问题，

（1） 等势问题 – 假设考虑的导体与外界大的带电导体相连并达到静电平衡，$\varphi=const.$

（2） 孤立导体问题 – 假设导体孤立，则 Q 已知，φ 为未知量。

某种意义上讲，Q,φ 是一对共轭量，不可能同时预先设定。

§ 3.2 格林互易定理

在讨论具体问题之前，先介绍一个一般的定理 – 格林互易定理，其在导体静电学中相当有用。它的表述如下：

“当 m 个导体上的电荷为$q_1,q_2,\cdots,q_m$时，它们的电势等于$\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_m$;当导体上的电荷为$q'_1,q'_2,\cdots,q'_m$时，它们的电势等于$\phi'_1,\phi'_2,\cdots,\phi'_m$，那么有关系式

$$\sum_{i=1}^{m}q_i\phi'_i=\sum_{i=1}^{m}q'_i\phi_i \tag{3.2.1}$$

证明：

证明 Green 互易定理之前，我们先证明一个恒等式。取任意的一个闭合曲面 S，由高斯定理可得

$$\int_V\nabla\cdot\vec{Q}d\tau=\oint_S\vec{Q}\cdot d\vec{S}$$

式中$\vec{Q}$是体积 V 内任一连续可微的函数．如果令$\vec{Q}=\Phi\nabla\Psi$，则

$$\int_V\nabla\cdot(\Phi\nabla\Psi)d\tau=\oint_S\Phi\nabla\Psi\cdot d\vec{S}$$

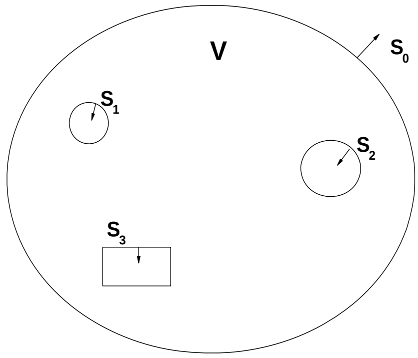
因为$\vec{Q}$是任意函数，可再令$\vec{Q}=\psi\nabla\varphi$，又得

$$\int_V\nabla\cdot(\Psi\nabla\Phi)d\tau=\oint_S\Psi\nabla\Phi\cdot d\vec{S}$$

两式相减，我们就得到

$$\boxed{\int_V \left(\Psi\nabla^2\Phi-\Phi\nabla^2\Psi\right)d\tau=\oint_S (\Psi\nabla\Phi-\Phi\nabla\Psi)\cdot d\vec{S}} \qquad (3.2.2)$$

此式即是格林定理，它的重要性是将任意两个标量函数的空间的性质转化为边界处的行为。下面我们进一步利用格林定理证明格林互易定理。



对包含 m 个导体的空间，取无限远处为封闭曲面$\vec{S}_0$，然后再在其中挖掉所有 m 个导体，因此产生 m 个封闭曲面$\vec{S}_i$。剩余的空间，体积为 V，是一个多连通的闭合区域，其边界由$\vec{S}_0$及$\vec{S}_i$共同确定，记为 S。考虑两个状态，其中导体上分别带有电荷$\{q_i\}$和$\{q^{'}_i\}$，此时对应的电势分布分别为$\varphi,\varphi^{'}$。由于电荷都分布在导体表面上. 所以在体积 V 内$\nabla^2\varphi$=0，$\nabla^2\varphi^{'}$=0。我们现在令$\psi=\varphi,\Phi=\varphi^{'}$，代入（3.2.2）式，则（3.2.2）左边=0。取$\vec{S}_0$在无限远处，则右边对$\vec{S}_0$的积分=0。因此有

$$\sum_{i=1}^{m}\oint_{s_i}(\varphi\nabla\varphi'-\varphi'\nabla\varphi)\cdot d\vec{S}_i=0=\sum_{i=1}^{m}\oint_{s_i}(\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial n}-\varphi'\frac{\partial\varphi}{\partial n})\cdot dS_i \qquad (3.2.3)$$

对每个导体表面的积分，注意导体表面的电荷分布是

$$\sigma_i=\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{s_i},\quad \sigma^{'}_i=\varepsilon\frac{\partial\varphi^{'}}{\partial n}\bigg|_{s_i}$$

（这里取+号是因为$\vec{S}_i$的方向定义为垂直表面向导体内部）， 以及导体表面是等势体

$$\phi_i=\varphi|_{s_i},\quad \phi^{'}_i=\varphi'|_{s_i}$$

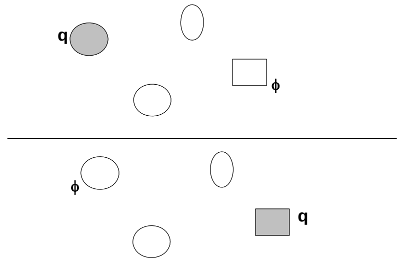
将他们代入（3.2.3）式得

$$\sum_i\left[\oint_{s_i}\phi_i\sigma^{'}_i dS_i-\oint_{s_i}\phi'_i\,\sigma_i dS_i\right]=0$$

最后就有格林互易定理

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m}q^{'}_i\phi_i=\sum_{i=1}^{m}q_i\phi'_i}$$

由格林互易定理，我们可以马上得到一个重要的结果。令$q^{'}_1=q^{'}_3=q^{'}_4=\cdots=q^{'}_n=0$，$q_2=q_3=\cdots=q_n=0$，则有



$$q^{'}_2\phi_2=q_1\phi'_1$$

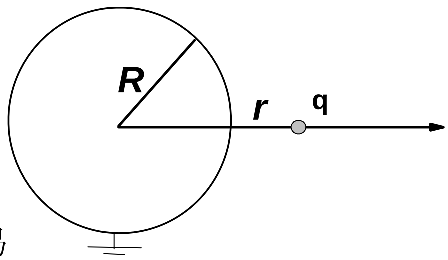
再令 $q_1=q^{'}_2$，则得

$$\phi_1^{'}=\phi_2 .$$

这就是说，带电 q 的导体 B 在不带电的导体 A 上产生的电势等于带电 q 的导体 A 在不带电的导体 B 上产生的电势.

注：你可能 Argue 说这没什么啊，比如一个点电荷产生的势为$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$，只与观察点与源的距离相关，显然有上述互易性质。但注意上面的定理显示这种互易关系在任意导体形状下、任意的其他导体分布情况下均成立。这并不显然，因为场会引发导体上的电荷的再分布（即使总体不带电），使得问题变得非常复杂。格林互易定理在处理导体相关问题上很有优势。

例1， 在一个接地导体球（半径为 R）外距球心距离为 r 的地方放置一个带电量为 q 的点电荷，求在导体球上的感应电荷。



解：对这个由两个导体组成的导体系，对应电荷分布$\{q,q_R\}$，电势分布为$\{\varphi_q,0\}$，其中q_R为导体球上的感应电荷，φ_q为点电荷所在地的电势，均未知。现制备另外一个电荷分布$\{0,q_R^{'}\}$，则非常容易求出空间的电场为$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r}$，故，两个导体上的电势分别为$\frac{q_R^{'}}{4\pi\varepsilon_0}\{\frac{1}{r},\frac{1}{R}\}$，因此，根据格林互易定理，可得

$$q\frac{1}{r}+q_R\frac{1}{R}=0 \quad \Rightarrow \quad q_R=-\frac{R}{r}q$$

因此导体球上的感应电荷为$-\frac{R}{r}q$。

Tips：有同学会被"导体球接地"这个条件所迷惑，当设计第二个状态时仍然把导体球接地，这样就无法改变球的电势状态从而达到利用格林定理的目的。"接地"只是把导体球的电势设为 0 而已，并不意味着我需要一直连一根导线到地。

§3.3 导体系的能量、固有能和相互作用能

1．利用静电标势来表示静电能量

静电场能量可以用电势φ来表述。假设一系列导体放置在介电常数为ε的线性电介质背景中，则体系的静电总能量为

$$W=\frac{1}{2}\int\left(\vec{E}\cdot\vec{D}\right)d\tau \qquad (3.3.1)$$

利用 $\vec{E}=-\nabla\varphi$，上式可写成

$$W=-\frac{1}{2}\int(\nabla\varphi)\cdot\vec{D}d\tau=-\frac{1}{2}\int\nabla\cdot\left(\varphi\vec{D}\right)d\tau+\frac{1}{2}\int\varphi\nabla\cdot\vec{D}d\tau$$
$$=-\frac{1}{2}\oint\varphi\vec{D}\cdot d\vec{S}+\frac{1}{2}\int\varphi\rho d\tau$$

其中用到了 $\nabla\cdot\vec{D}=\rho$。若我们考察的是体系的总能量，则(3．3.1)式的体积分是对全空间进行的，因此上述等式右边的面积分是对无穷大的面进行．有限的电荷体系在无穷远远处的场为零，从而面积分的值为零。另一方面，导体上的电荷分布全部集中在导体的表面，而导体表面上的势为常数。因此，能量的表达式变为

$$\boxed{W=\frac{1}{2}\int\varphi\rho d\tau=\frac{1}{2}\sum_i\phi_iQ_i} \qquad (3.3.2)$$

其中 ϕ_i,Q_i 为第 i 个导体的势和总电荷。

注:

（1） *上式虽然只与自由电荷相关，却是包含了极化能的电磁总能量。从物理上讲，静电总能可以被理解成建立这样一个导体体系，外界做的总功。因此（**3.3.2**）也可这样推出：假设电荷从处于无限远处一点点搬来的，将这些电荷一点点搬来做的功的总和即是（**3.3.2**）。试着推导一下，并解释为什么有 **1/2** 因子？*

（2） *从上面的分析我们看到静电能量有两种表达式，一种是 $W=\frac{1}{2}\int\vec{E}\cdot\vec{D}d\tau$，这表示静电能量是以密度 $u=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$ 的形式在空间连续分布，场强的地方能量也大。另一种表达式是 $W=\frac{1}{2}\int\varphi\rho d\tau$，它表示能量只与存在着电荷分布的空间有关．以上两种表达式只有在求静电场的总能量时才等效，而当讨论空间某一有限范围内的电磁能量时两者不再等效，因为面积分在有限范围内的值一般不会为零，我们只能应用第一种表达式。第二种表达式并不意味着 $\frac{1}{2}\varphi\rho$ 是电场的能量密度-没有电荷就没有能量的看法是错误的！*

2．电容

一个有多个导体组成的体系，每个导体都是等势体，其电势为 $\{\phi_i\}$，同时每个导体上带有不同的电量 $\{Q_i\}$。这个导体体系的状态既可以用 $\{\phi_i\}$ 来刻画，也可以用 $\{Q_i\}$ 来刻画。那么，$\{\phi_i\}$ 与 $\{Q_i\}$ 之间是什么关系呢？

利用线性叠加原理可以证明：任意一个导体上的电势 ϕ_i 是各个导体上的电量

的线性函数。下面分几步证明这个问题。（1）考虑在第 j 个导体上放置单位电的电荷，其它所有导体上不放置电荷，即电荷分布为$\{0,...,1,...\}$。当体系达到静电平衡时，对应的电势分布为$\{\varphi_1^{(j)},\varphi_2^{(j)},...\varphi_j^{(j)},...\}$，同时记下所有导体上的面电荷分布$\{\sigma_1,...,\sigma_j,...\}$，注意此时其它导体上虽不带净电荷，电荷分布却未必为 0！（2）当第 j 各导体上的电荷线性增加Q_j倍时，即分布为$\{0,...,Q_j,...\}$时，达到静电平衡时的导体面电荷分布一定为$\{Q_j\sigma_1,...,Q_j\sigma_j,...\}$ ，根据线性叠加原理，对应的电势分布一定为$\{Q_j\varphi_1^{(j)},Q_j\varphi_2^{(j)},...,Q_j\varphi_j^{(j)},...\}$ 。（3）对于任意的一个电荷分布$\{Q_1,...,Q_j,...\}$，我们制备 N 个相同的导体系，分别只在其中一个导体上带有相应电荷，即$\{Q_1,0,0,...\}$，$\{0,Q_2,0,...\}$，...。根据前面的结论，达到静电平衡后这些状态所对应的电势分布分别正比于此电荷，既$\{\varphi_i\}^{(1)}=Q_1\{\varphi_1^{(1)},\varphi_2^{(1)},...\}$，$\{\varphi_i\}^{(2)}=Q_2\{\varphi_1^{(2)},\varphi_2^{(2)},...\}$...。根据线性叠加原理，电荷分布$\{Q_1,...,Q_j,...\}$所对应的电势分布一定为这 N 个体系的电势分布的线性叠加，亦即$\{\phi_i\}=\{\varphi_i\}^{(1)}+\{\varphi_i\}^{(2)}+\{\varphi_i\}^{(2)}+...=\{Q_1\varphi_1^{(1)}+Q_2\varphi_1^{(2)}+...,...,...\}$。故一般有

$$\boxed{\phi_i=\sum_j C^{-1}{}_{ij}Q_j} \tag{3.3.3}$$

式中的比例系数$C^{-1}{}_{ij}$与导体的形状和相对位置有关，其量纲是长度量纲的负一次方。(3.3.3)式的逆式是

$$Q_i=\sum_j C_{ij}\phi_j \tag{3.3.4}$$

这里的C_{ij}是$C^{-1}{}_{ij}$的逆阵元素。为了看清C_{ij}的物理含义，设只有一个导体，则

$$Q_1=C_{11}\varphi_1$$

注意到对一个半径为 R 的金属球，$Q=4\pi\varepsilon_0R\varphi$。 显然，这里的$C_{11}=4\pi\varepsilon_0R$是导体的电容，几何的意义就是电荷之间的“有效距离”，物理上具有长度量纲（除去不重要的常数ε_0）。这个距离越大，当然体系就可以“装下”更多的电荷，因此电容也就越大．所以称C_{ii}为**电容系数**，$C_{ij}(i\neq j)$称为**感应系数**。将导体系能量的用电势或电荷表示：

$$\boxed{W=\frac{1}{2}\sum_{ij}C_{ij}\varphi_i\varphi_j=\frac{1}{2}\sum_{ij}C^{-1}{}_{ij}Q_iQ_j} \tag{3.3.7}$$

在《电磁学》中我们知道两个点电荷之间的相互作用能为$W=\dfrac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0R}$，我们又一次看到了电容的基本物理意义 – 两个点电荷之间的“有效”距离。

显然，C_{ij} 和 $C^{-1}{}_{ij}$ 只与导体的形状、几何位置有关，与导体上的充电状态无关。

而且，由格林互易定理容易证明：$C_{ij}=C_{ji}, C_{ij}^{-1}=C_{ji}^{-1}$。通过物理的方法可以证明：$C_{jj}>0, C_{ji}<0;\quad C_{ij}^{-1}, C_{jj}^{-1}>0$（参考 **06** 级邱孟同学的课件）。

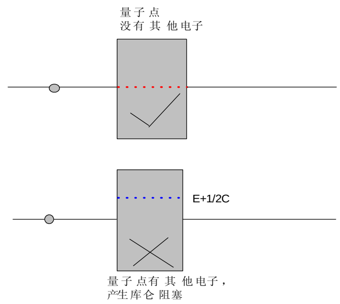
****

这里电容完全是个经典的概念。在量子力学世界中，电荷不再是经典的粒子，而是由一个几率函数描述的物质波。这里有许多有趣的新问题值得研究

1）此时电容如何定义？如何计算？（加拿大 MaGill 大学的郭鸿教授做了许多这方面的研究）;

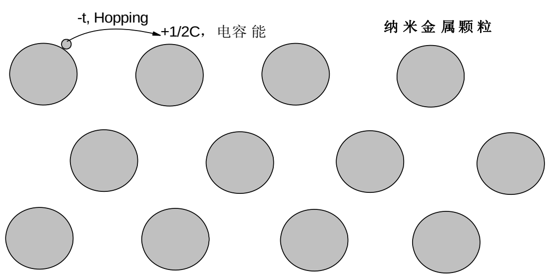
2）电容能的本质是"库仑相互作用"，对一个量子点，其静电能可写成$U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$*。设量子点内部只有一个电子填充时的能级为*$E_n$*；当量子点中已有一个电子填充的时候，此时在向里面填充一个电子就要付出*$\frac{1}{2C}$*的能量，因此此时电子的能级为*$E_n+\frac{1}{2C}$*。*

考虑如图所示的隧穿机制，设外部环境中的电子能级与E_n*匹配的时候，电子可以通过跃迁到量子点中的此能级而穿过量子点；然而当量子点中已有一个电子存在的时候，能级发生了改变，电子不能进行共振隧穿。这种现象叫做"库仑阻塞"*



3） *" Mott 相变"等问题的研究*

50-60 年代，英国物理学家 Mott 指出一种新的绝缘体-金属相变机制。原子中的电子在两个原子之间跃迁时，能量上可以降低 t（hopping 常数），但同时当电子跳到另一个原子上时，会和那上面的电子有静电相互作用，时能量上升。当原子之间远离时，t 很小因此电子不喜欢跳跃，此时体系表现为绝缘体。当给晶格施加压力使得原子之间的间距变短提高 t 的时候，有可能将绝缘体变成一个导体。然而自然的 Mott 相变得例子极少。随着科技的发展，人们可以人工合成一些由纳米金属颗粒排成的人工晶格，利用这种体系来研究 Mott 相变。此时作为最低级近似，对体系的静电能部分的描述就是经典的电容。



[例 2] 《电磁学》中，两个带$\pm Q$电荷的导体的互电容定义为$C=\frac{Q}{\varphi_2-\varphi_1}$。 在《电动力学》中，我们更多地会使用电容系数，试用电容系数表示互电容。

解 ：这个两导体的体系当电荷分布为$\{Q_1=-Q, Q_2=+Q\}$时，电势分布为$\{\varphi_1,\varphi_2\}$。根据电容系数的定义，

$$\varphi_1=C^{-1}{}_{11}Q_1+C^{-1}{}_{12}Q_2=C^{-1}{}_{11}(-Q)+C^{-1}{}_{12}(+Q)$$
$$\varphi_2=C^{-1}{}_{22}Q_2+C^{-1}{}_{21}Q_1=C^{-1}{}_{22}(+Q)+C^{-1}{}_{21}(-Q)$$

因此

$$\varphi_2-\varphi_1=Q\left[C^{-1}{}_{11}-2C^{-1}{}_{12}+C^{-1}{}_{22}\right]$$

与互电容的定义$\varphi_2-\varphi_1=C^{-1}Q$比较可知

$$\frac{1}{C}=C^{-1}{}_{11}-2C^{-1}{}_{12}+C^{-1}{}_{22}$$

习题

P. 84, 3.3, 3.4, 3.6

<u>数值计算 **Project**</u>

假设半径为 **R** 的金属球排成一个晶格常数为 ***a*** 的 **2** 维三角晶格，计算中心一个金属球对其它金属球的电容系数。你可以利用 **COMSOL** 计算不同的$\{Q_i\}$对应的的$\{\phi_i\}$，或者相反，这样就可以得到电容系数。