

第四讲

上次课

- 真空中 Maxwell 方程

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

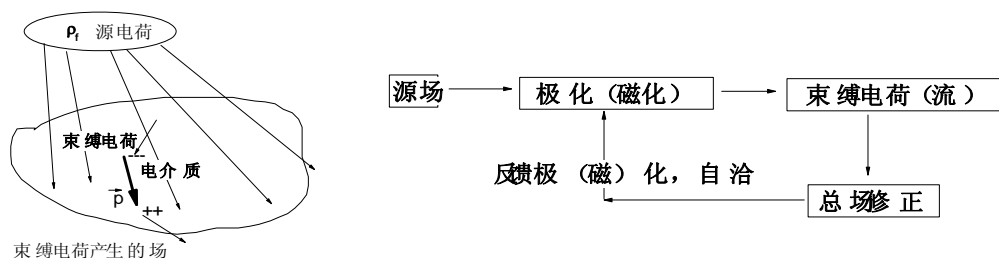
\vec{E}, \vec{B} 是真实的有物理含义的场，会对处于其中的电荷（流）有作用力！

§ 1.5 介质中的麦克斯韦方程组

前面我们研究了真空中的电磁理论。然而，我们所关心的更多的是介质中的电磁场的行为-即使空气也是一种特殊的电磁介质。在我们仔细考虑电磁介质中的电磁理论之前，有一点核心问题必须澄清-

电磁场的最终来源是电荷及电流，只要空间某处存在某种电荷/电流（无论其起源），就有电磁场产生，而与那个地方有无物质/什么物质无关！

有了这点基本认识，我们研究电磁介质中的电磁场就归结为寻找当有电磁介质存在时的总的电荷/电流分布。在具体研究之前，首先理一理脉络。在空间施加由处于很远处的电荷（流）产生的电（磁）场，当在这个场中放入一块电（磁）介质时，电（磁）介质在外电（磁）场的作用下被极（磁）化，产生电（磁）偶极子。电（磁）偶极子的产生使得空间中不再为电（磁）中性，从而产生了束缚于电（磁）介质的极化（磁化）电荷（电流），这些束缚电荷（电流）与处于远处的自由电荷（电流）一样可以产生电磁场，因此它们一起产生了空间的总场。介质的极化（磁化）是由空间的总场决定的，因为场，无论是由源电荷产生的，还是由极（磁）化电荷（流）产生的，都会作用到介质中上。因此极化（磁化）场应与空间总场达到平衡。用图形可以表示为

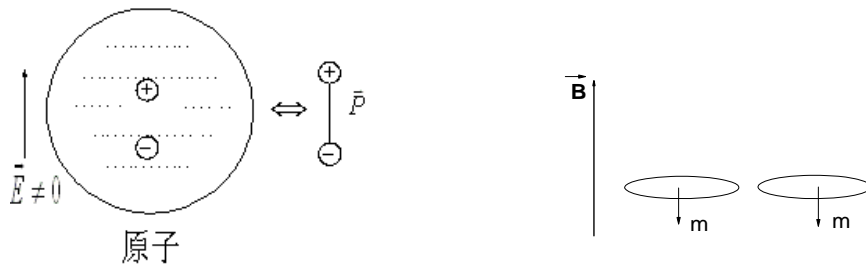


因此，理解了上图中所有的过程后，我们才能对介质中的电磁场有完整的理解。

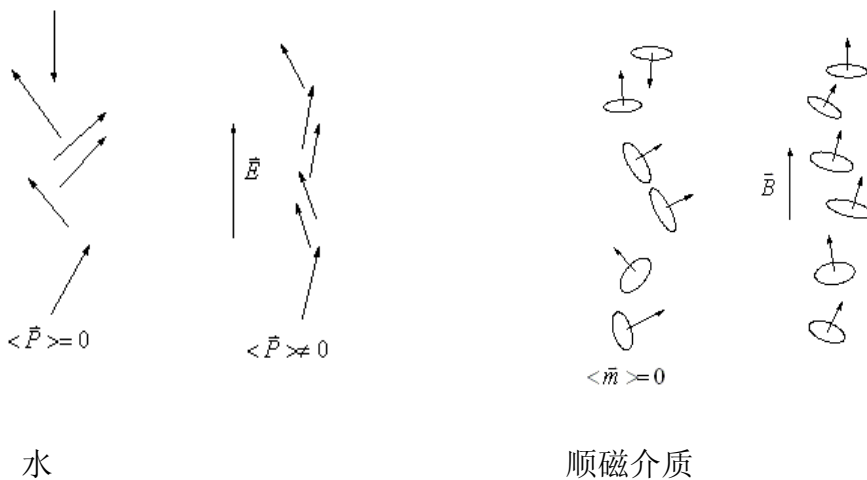
1. 介质的极化及磁化

当电介质放置于电场中时，正负电荷被电场拉开，产生电偶极子，这个过程叫极化。同样，一个无磁性的磁介质被放置于外磁场中时，原本杂乱无章运动的电子

在外磁场的作用下产生一个个分子环流（亦即磁偶极子），这个过程被称作磁化。



极化和磁化的过程还有另外的可能性。体系中的构成单元原本是带有固有电（磁）偶极距的，但在无外加电（磁）场存在的时候这些电（磁）极距杂乱排列，不显



示出极（磁）性；当外加电（磁）场时，这些原本杂乱排列的电（磁）偶极子沿着电（磁）场排列，产生宏观电（磁）矩。为了描述极化（磁化）的大小，定义极化（磁化）强度两个**宏观量**，

$$\bar{P} = \frac{\sum \bar{p}_i}{\Delta V} \quad \bar{M} = \frac{\sum \bar{m}_i}{\Delta V} \quad (1.5.1)$$

显然，电（磁）场越大，极（磁）化强度也越大。对第一种情况上述结论显而易见，对第二种情况，考虑外场效应（趋向于使电磁矩平行排列）与温度效应（趋向于它们无规排列）的竞争既可明白。在低场近似下，很多材料中这种响应程线性，即

$$\bar{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi_e \bar{E}(\vec{r}, t), \quad \bar{M}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} \bar{B}(\vec{r}, t) \quad (1.5.2)$$

其中， χ_e, χ_m 为极化（磁化）率。这就是介质极化（磁化）的基本图像，计算 χ_e, χ_m

要用到微观理论。**需要强调指出的是，这里 \bar{E}, \bar{B} 应当是介质分子在此处感受到的局域总场，因为只要是场，无论是源场还是极（磁）化电荷（流）产生的场，都可以对介质产生作用力。**

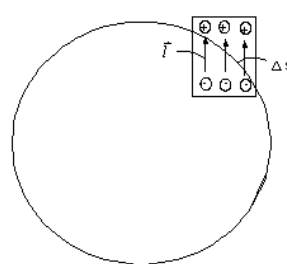
2. 极(磁)化电荷(流)

(A) 极化

极化电荷 由于极化, 正负电荷间发生了相对位移, 每处的正负电荷可能不完全抵消, 这样就呈现出束缚在介质中的宏观电荷, 称为**极化电荷**。

在一个具有极化强度分布 $\vec{P}(\vec{r})$ 的介质中任取一块宏观大的区域 τ , 其边界由 \vec{S} 给定, 计算这中间包含的所有的极化电荷 Q_p 。显然, 完全处于区域内部或完全处于区域外部的偶极子对 Q_p 均没有贡献, 只有那些穿过 \vec{S} 的偶极子才有贡献。

若极化时正负电荷拉开的位移为 \vec{l} , 取一小块边界 $d\vec{S}$, 则在体积 $\vec{l} \cdot d\vec{S}$ 内的每一个偶极子都会因为穿过界面而在体积内部留下一个**负**的静电荷 q (如右图所示)。设介质此处的偶极子数密度为 n , 则这些偶极子对区域内的净电荷数为 $dQ_p = -qn\vec{l} \cdot d\vec{S} = -\vec{P} \cdot d\vec{S}$ 。



考虑所有穿过界面的偶极子的贡献后, 则留在 τ 区域内的总的束缚电荷为

$$Q_p = -\oint_s \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad (1.5.3)$$

利用 Gauss 定理, 容易得到

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} \quad (1.5.4)$$

式中 ρ_p 称为**极化电荷密度**。

注: 仔细思考后会发现 (1.5.4) 大有问题。比如对一个均匀极化的介质 $\vec{P} = \text{const.}$, 故 (1.5.4) 告知体内无极化电荷分布。然而实际上极化后每个分子都呈现为一个偶极子, 因此细致到分子的尺度上, 极化电荷的分布是非常不均匀的, 不可能为 0。从数学上讲, (1.5.3) 是正确的, 但条件是积分区域必须是宏观大的。过渡到 (1.5.4) 就不是严格成立的了, 因为 Gauss 定理可以使用的前提是 (1.5.3) 对任意积分区域都正确。但为什么我们还可以用 (1.5.4) 呢? 这是因为在分子尺度上计算极化电荷以及其它物理量的分布是困难而且是没有必要的, 因为我们所关心的 (实验上所能测量的) 是宏观小但微观大的一个区域内的物理量的平均值。因此, 当我们考虑连续介质中的物理量时, 一个空间的几何点是这样定义的: 取这样一个区间 - 微观上足够大包含了許多极化后的偶极子, 但宏观仍然足够小使得我们可以认为它是空间上的一个几何点, 然后取这个区间内的微观量的平均值作为在这一几何点的场的数值。这事实上是电动力学处理连续介质的一个基本精髓。 (1.5.2) 及下面的所有处理、甚至是目前前沿的 *Meta-material* 的研究均基于这个基础。

极化电流 当电场随时间改变时, 极化过程中正负电荷的相对位移也将随时间改变, 由此产生的电流称为**极化电流**, 记为 \vec{j}_p 。考虑空间只有一个因极化而产生的偶极子, 则极化电荷密度分布为 $\rho_p(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_+) - q\delta(\vec{r} - \vec{r}_-)$ 。假设两个

极化电荷的运动速度分别为 $\vec{v}_+ = \frac{d\vec{r}_+}{dt}$, $\vec{v}_- = \frac{d\vec{r}_-}{dt}$, 则运动引起的极化电流密度为

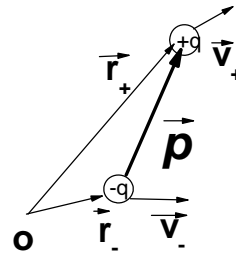
$$\vec{j}_p(\vec{r}) = q\vec{v}_+\delta(\vec{r}-\vec{r}_+) - q\vec{v}_-\delta(\vec{r}-\vec{r}_-) = \frac{\partial}{\partial t} [q\vec{r}_+\delta(\vec{r}-\vec{r}_+) - q\vec{r}_-\delta(\vec{r}-\vec{r}_-)]$$

注意到极化强度为

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V} = q\vec{r}_+\delta(\vec{r}-\vec{r}_+) - q\vec{r}_-\delta(\vec{r}-\vec{r}_-)$$

所以

$$\boxed{\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}} \quad (1.5.5)$$



显然, 根据叠加原理, 上式在有许多偶极子存在时依然正确。同时我们注意到 (1.5.5) 与连续性方程一致。根据 (1.5.4) 和 (1.5.5) 可知

$$\nabla \cdot \vec{j}_p + \frac{\partial \rho_p}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{P} = 0$$

与连续性方程一致

(B) 磁化

磁化电流

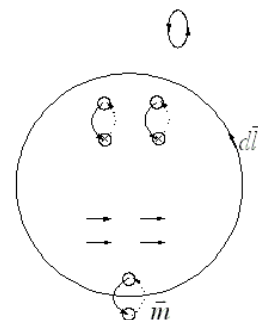
介质被磁化后产生束缚于磁介质上的磁化电流。假设已知空间的磁化情况 $\vec{M}(\vec{r})$, 我们来讨论磁化电流密度 \vec{j}_M 。类似电介质的讨论, 在一个具有磁化强度 $\vec{M}(\vec{r})$ 的磁介质中选取一个宏观大小的面 S , 其边界由 $\oint d\vec{l}$ 描述, 计算穿过 S 产生的总磁化电流 I_M 。磁化后产生大量的磁偶极子, 每个磁偶极子对应一个分子环流。(1) 若这些环流完全处于 S 内, 则对 I_M 的贡献因环流 2 次穿过 S 而抵消; (2) 若完全在 S 外, 则根本没有贡献。因此, 只需计算那些与边界较链的环流, 因为它们只对 S 面内贡献一次电流。考虑与一段边界 $d\vec{l}$ 较链的分子环流。设每个分子

环流电流为 i , 线圈面积为 $\Delta\vec{s}$, 则显然在 $\Delta\vec{s} \cdot d\vec{l}$

体积内的所有的磁偶极子都对 S 内的净电流有贡献。假设

偶极子的体密度为 n 。则 $d\vec{l}$ 边界处对 I_M 的贡献为

$$dI_M = i \times \text{no. of m} = i \times n \Delta\vec{s} \cdot d\vec{l} = \vec{M} \cdot d\vec{l}$$



综合整个环路的贡献，得

$$I_m = \oint \vec{M} \cdot d\vec{l} \quad (1.5.6)$$

利用 $I_M = \int \vec{j}_m \cdot d\vec{S}$ 及 Stokes 定理 $\oint \vec{M} \cdot d\vec{l} = \int \nabla \times \vec{M} \cdot d\vec{S}$ ，有

$$\boxed{\vec{j}_m = \nabla \times \vec{M}} \quad (1.5.7)$$

其中 \vec{j}_m 为描述束缚于磁介质内部的**磁化电流密度**。对上式两边取散度得

$$\nabla \cdot \vec{j}_m = 0$$

这说明磁化电流不引起电荷的积累，因此不用考虑**磁化电荷**。这也同时说明没有磁化电流的源。

3. 介质中的 Maxwell 方程组

下面我们将进行示意图中**第 3 步讨论** – 看看极（磁）化电流（荷）如何改变总电（磁）场。当介质存在时空间电荷包括自由电荷（源电荷）和极化电荷（束缚电荷），即

$$\rho_t = \rho_f + \rho_p = \rho - \nabla \cdot \vec{P},$$

式中 ρ_t 表示**总电荷**。介质中可能出现的电流有传导电流、极化电流和磁化电流，因此**总电流**为

$$\vec{j}_t = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M}$$

在麦克斯韦方程组中，不管 ρ 和 j 的来源如何，只要是电荷或电流，它们都将在空间激发电场或磁场。所以，麦克斯韦方程组在介质存在的情况下应该修改成

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \vec{P}) \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \left(\vec{j}_f + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M} \right) \end{array} \right. \quad (1.5.8)$$

上式包含太多的物理量，不易求解且物理意义不清晰。试图将所有的宏观量都表示成自由电荷/电流的函数，则引入两个辅助矢量

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (1.5.9)$$

代入方程组 (1.5.8) 式化简可得:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.5.10)$$

其中新引入的辅助矢量 \vec{D} 称为**电位移矢量**, \vec{H} 称为**磁场强度**。它们的导入使方程组只出现自由电荷和自由电流, 仅仅是为了便于讨论问题。而它们本身不是真实的场, 它们不会对身处其中的电荷/电流产生作用力。

4. 本构关系

现在考虑示意图中最后一步: 局域总场的改变是如何与极(磁)化程度自洽的。这就需要确定 (1.5.8) 中的极(磁)化强度等物理量如何与总电(磁)场自洽决定的。换言之, 必须确定麦克斯韦方程(1.5.10)导入量 \vec{D}, \vec{H} 与 \vec{E}, \vec{B} 之间的关系, 才能求出方程组的解。这些关系式被称为**本构关系**, 与具体的材料有关系 - 我们的世界之所以如此丰富多彩就是因为我们有各种各样的具有不同本构关系的介质。

对线性介质, 利用 (1.5.2) 及 (1.5.9) 得

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H}, \end{cases} \quad (1.5.11)$$

其中

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \quad \mu = \mu_r \mu_0 = (1 + \chi_m) \mu_0 \quad (1.5.12)$$

叫做介电常数及磁导率, ϵ_r, μ_r 称为相对介电常数及相对磁导率(无量纲量)。利用 (1.5.9), 可将 (1.5.9) 中第 2 式改写为 $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$, 结合 (1.5.11) 可以看出,

历史上以为 \mathbf{H} 是基本量与 \mathbf{E} 的地位相同, 对磁化率的定义是针对 \mathbf{H} 场的! 将本构关系带入无源空间的 Maxwell 方程组, 得

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

其中 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 完美对称。另外需要指出的是: 导体本身就是一种特殊的电磁介质, 它的本构关系就是欧姆定律 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

应当指出, 这里我们给出的本构关系是最简单的一种(尽管是最常见的) - 极(磁)化

对外场的响应呈现局域/即时/线性/各向同性的响应。

- (1) 其次在铁电和铁磁物质或强场情况下， \vec{P} 与 \vec{E} 、 \vec{M} 与 \vec{H} 之间将不再是齐次的线性关系；
- (2) 另外，对于各向异性的介质来说，介电常数和磁导率都是对称张量，场强和感应场强之间的关系推广为 $D_i = \varepsilon_{ik} E_k$ ； $B_i = \mu_{ik} H_k$ ；
- (3) 在高频情况下，由于场变化得很快，以至于极化电荷和磁化电流跟不上场的变化。这时的响应可以写成 $\vec{D}(t) = \int \varepsilon(t-t') \vec{E}(t') dt'$ 。但当外场随时间以频率 ω 简谐变化时，傅立叶分析显示对单频仍然有 $\vec{D}(\omega) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\omega)$ 。所以极化率和磁化率都将是频率的函数。因而 $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ ， $\mu = \mu(\omega)$ 。
- (4) 有些材料中，响应是 $\vec{D}(\vec{r}) = \int \varepsilon(\vec{r}-\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}') d\tau'$ ，也就是说，在 r' 处的扰动会在 r 处产生响应，我们称之为非局域效应，或者叫作空间色散。然而对特定的以某一个 k 为波矢在空间变化的场，经过傅立叶变换可知， $\vec{D}(\vec{k}) = \varepsilon(\vec{k}) \vec{E}(\vec{k})$ 此时 ε 是 k 的函数

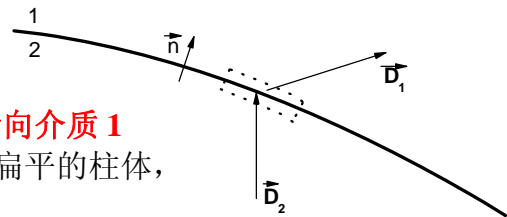
§ 1.6 麦克斯韦方程组的边界条件

Maxwell 方程组的精妙之处在于其不同介质的交界面上“自带”边界条件，无须外设。这点是其超越其它许多方程（如流体力学方程）的地方。在界面上，微分形式的麦克斯韦方程失去意义，但积分形式仍可使用。这一节我们就从积分形式的场方程出发导出交界面两边 Maxwell 方程的边界条件。

对应 $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$ 的积分形式是

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \rho_f d\tau$$

如图所示，定义界面的方向矢量为介质 2 指向介质 1 的单位方向矢量 \vec{n} ，横跨介质的分界面做一扁平的柱体，两个底面平行于界面，分别为 $\Delta \vec{S}_1 = \Delta S \vec{n}$



及 $\Delta \vec{S}_2 = -\Delta S \vec{n}$ ，高度 h 。当 h 趋向于 0 时， D 在侧表面的积分趋于 0，因此，

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \Delta \vec{S}_1 \cdot \vec{D}_1 + \Delta \vec{S}_2 \cdot \vec{D}_2 = \Delta S \cdot (\vec{n} \cdot \vec{D}_1 - \vec{n} \cdot \vec{D}_2) = q_f,$$

其中 q_f 为柱体内的自由电荷量。在 $\Delta S \rightarrow 0$ 时，我们进一步得到

$$\boxed{\vec{n}_1 \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma_f} \quad (1.6.1)$$

$\sigma_f = q_f / \Delta S$ 是交界面上的自由电荷面密度。在一般情况下 $\sigma_f = 0$ （没有自由电荷，或是自由电荷呈现体分布），**D 场的法向分量守恒。**

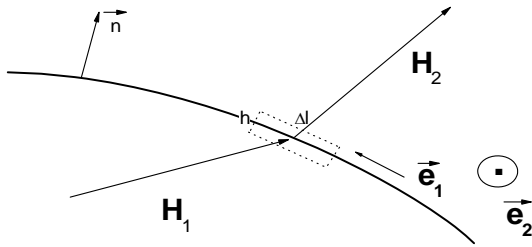
同理，对应方程 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ，容易得到 **B 场的法向分量连续** 的结论：

$$\boxed{\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \Rightarrow B_{n1} = B_{n2}} \quad (1.6.2)$$

对应第 4 条公式 $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$ 的积分形式为

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{j}_f \cdot d\vec{S} + \int \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

在界面处画一个长为 Δl ，宽为 h 的矩形，考虑到 $h \rightarrow 0$ 时 \vec{H} 场在 h 上的积分趋于 0，可得 \vec{H} 场在整个环路上的积分为：



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \vec{H}_1 \cdot \Delta \vec{l}_1 + \vec{H}_2 \cdot \Delta \vec{l}_2 = \vec{j}_f \cdot \vec{e}_2 (h \cdot \Delta l) + \frac{\partial}{\partial t} (D \cdot \Delta l \cdot h)$$

其中 \vec{e}_1, \vec{e}_2 为界面上相互垂直的两个方向矢量，与界面方向矢量 \vec{n} 呈右手螺旋（如图所示）。一般情况下边界处 $\frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$ 是有限值，则在 $h \rightarrow 0$ 时，上式右边第 2 项为零。右边第 1 项在界面存在面电流分布时不为 0。定义 $\vec{j}_f \cdot h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \vec{\alpha}_f$ 为面电流分布，我们便有

$$\vec{e}_1 \cdot (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{\alpha}_f \cdot \vec{e}_2, \quad (1.6.3)$$

考虑面内另一个方向，可得

$$\vec{e}_2 \cdot (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = -\vec{\alpha}_f \cdot \vec{e}_1 \quad (1.6.4)$$

非常容易将上 (1.6.3) - (1.6.4) 式改写成更一般紧凑的形式

$$\boxed{\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{\alpha}_f} \quad (1.6.5)$$

要证明 (1.6.5) 式，只需在 (1.6.3) 式的等式左右两边各乘以矢量 \vec{e}_1 ， \vec{e}_2 再利用

混合积公式 $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$ 简化即可。

(1.6.5)式表示，在没有奇性存在的界面处（没有面自由电流），磁场强度的切向分量连续。同理，对于方程 $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$ ，与上面的推导比较可知，相应的边界条件为

$$\boxed{\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0}, \quad (1.6.6)$$

故电场的切向分量连续。

深入思考下面问题并作成 Note（选作）

就目前来讲，大家对边界条件的认识一定是模糊的，不妨做如下课题来加深理解。考虑一个半径为 R 介质球（相对介电常数为 ϵ_r ），由于某种外力的原因将一些自由电荷均匀分布在球内的厚度为 δ 的一个壳层内，求此时空间的 D , E 场分布，并研究边界两边的场是否满足边界条件。当 $\delta \rightarrow 0$ 时，重复以上的讨论。问问自己：以上模型能否在实际中实现？最后，为深入理解 H , B 场的边界条件，仿照上面的讨论自己定义一个体系进行深入讨论。

习题

P. 31, 1.10, 1.11, 1.19

补充题

仿照课件，推导出极化强度 \vec{P} 和磁化强度 \vec{M} 在界面上的边界条件。