第二十讲

上次课

- 波在各向同性色散介质内的传播

  （1）色散介质的本构关系（频域下）：$\vec{D}(\mathrm{r},\omega)=\varepsilon(\omega)\vec{E}(\mathrm{r},\omega)$

  （2）频域 Maxwell 方程（在时谐场的激励下）

$$\begin{cases}\nabla\cdot\left(\varepsilon(\omega)\vec{E}\right)=0\\ \nabla\cdot\vec{H}=0\\ \nabla\times\vec{E}=i\omega\mu_0\vec{H}\\ \nabla\times\vec{H}=-i\omega\varepsilon(\omega)\vec{E}\end{cases}$$

  （3）电磁波传播的色散关系： $k^2=\left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon_r(\omega)$

- 波在各向异性色散介质（比如旋电介质）内的传播

  （1）本构关系：$\vec{D}(\mathrm{r},\omega)=\varepsilon_0\vec{\varepsilon}_r(\omega)\cdot\vec{E}(\mathrm{r},\omega)$ 其中，$\vec{\varepsilon}_r(\omega)=\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0\\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\end{bmatrix}$

2．旋光介质中的电磁波本征态

下面我们研究此类材料中的电磁波特性，其实这种方法是计算各向异性电磁材料中的波的行为的一个通用的方法。这里我们假设 $\omega>\omega_p>>\omega_B$，故 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 都是正实数，且 $\varepsilon_1>>\varepsilon_2$。取平面波试解 $\vec{E}=\vec{E}_0e^{i(kz-\omega t)}$，$\vec{H}=\vec{H}_0e^{i(kz-\omega t)}$（$\vec{E}_0$，$\vec{H}_0$ 为常矢量），将其带入频域的 Maxwell 方程组（注意到此时 $\varepsilon_r(\omega)$ 为一张量），则有

$$\begin{cases}\vec{k}\cdot\left(\vec{\varepsilon}_r\cdot\vec{E}_0\right)=0\\ \vec{k}\cdot\vec{H}_0=0\\ \vec{k}\times\vec{E}_0=\omega\mu_0\vec{H}_0\\ \vec{k}\times\vec{H}_0=-\omega\varepsilon_0\vec{\varepsilon}_r\cdot\vec{E}_0\end{cases}\qquad(8.5.8)$$

下面考虑最简单的一种情况：$\vec{k}=k\hat{e}_z$。由第一式及 $\vec{\varepsilon}_r$ 的形式，可得 $E_{0z}=0$，即 $\vec{k}\cdot\vec{E}_0=0$。由第三、四式可得

$$\vec{k}\times\left(\vec{k}\times\vec{E}_0\right)+\omega^2\mu_0\varepsilon_0\vec{\varepsilon}_r\cdot\vec{E}_0=0\qquad(8.5.9)$$

整理可得（利用$\vec{k}\cdot\vec{E}_0=0$）

$$\boxed{k^2\vec{E}_0=k_0^2\vec{\varepsilon}_r\cdot\vec{E}_0} \tag{8.5.10}$$

其中$k_0=\omega/c$为真空中的波矢。虽然（8.5.10）看上去与各向同性介质中的电磁波传播的色散关系类似，但因为此处$\vec{\varepsilon}_r$为一张量，容易证明$\vec{E}_0 \| \vec{e}_x$以及$\vec{E}_0 \| \vec{e}_y$的线偏振光波都不是（8.5.10）的解。那么此时电磁波的偏振态到底应当是什么？考虑到$\vec{k}\cdot\vec{E}_0=0$，则一般情况的解为$\vec{E}_0=E_{0x}\hat{x}+E_{0y}\hat{y}$。代入（8.5.10），写出分别沿 x 和 y 方向的分量形式，可得 2 个方程。将这两个方程写成矩阵的形式，有

$$\begin{pmatrix} k^2-\varepsilon_1 k_0^2 & -i\varepsilon_2 k_0^2 \\ i\varepsilon_2 k_0^2 & k^2-\varepsilon_1 k_0^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix}=0 \tag{8.5.11}$$

解（8.5.11）式等于对角化相应的矩阵。计算得到 2 个本征值，

$$k_+=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1+\varepsilon_2},\quad k_-=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_2} \tag{8.5.12}$$

将本征值带入（8.5.11）可得相应的本征矢量。整理之后结果为

$$\begin{aligned} k_+:&\quad E_{0x}=iE_{0y} \quad\Rightarrow\quad \vec{E}_0^+=E_0\left(\vec{e}_x-i\vec{e}_y\right)/\sqrt{2}=E_0\vec{e}_{right} \\ k_-:&\quad E_{0x}=-iE_{0y} \quad\Rightarrow\quad \vec{E}_0^-=E_0\left(\vec{e}_x+i\vec{e}_y\right)/\sqrt{2}=E_0\vec{e}_{left} \end{aligned} \tag{8.5.13}$$

（8.5.12）-（8.5.13）显示在这种材料中，沿 z 轴传播的电磁波的本征态不是线偏振的，而是左右圆偏振。且这两个本征态的色散关系（或者说传播的相速度）不相同。对右旋光，波的相速度为

$$v_{right}=\omega/k_+=c/\sqrt{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \tag{8.5.14}$$

对左旋光

$$v_{left}=\omega/k_-=c/\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_2} \tag{8.5.15}$$

因此，在介质中沿着磁场方向传播时，左旋光比右旋光的速度快。

3．法拉第效应

当一个线偏振波由各向同性的空间进入各向异性的等离子体中时，由于线偏振波可以分解为两个等幅的左、右旋圆偏振波，而左旋和右旋波的波速又不相等，结果是电磁波的偏振面在等离子体中以前进方向为轴不断地旋转。这种效应叫法拉第旋光效应，如图 8.4 所示。

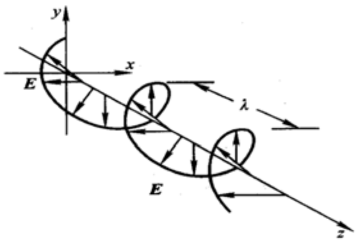


图 8.4

具体可以计算出电磁波的传播行为。设进入 Faraday 介质之前在真空中传播的线偏振电磁波为

$$\vec{e}_x E_0 e^{i(k_0 z-\omega t)} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 \left(\vec{e}_{left} + \vec{e}_{right}\right) e^{i(k_0 z-\omega t)} \qquad (8.5.16)$$

进入 Faraday 介质后，电磁波变成

$$\begin{aligned} &\frac{E_0}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_{right} e^{ik_+ z} + \vec{e}_{left} e^{ik_- z}\right) e^{-i\omega t} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_{right} e^{i\Delta kz} + \vec{e}_{left}\right) e^{i(k_- z-\omega t)} \\ &= \frac{E_0}{2}\left[(1+e^{i\Delta k\cdot z})\vec{e}_x + i(1-e^{i\Delta k\cdot z})\vec{e}_y\right] e^{ik_- z} e^{-i\omega t} \end{aligned} \qquad (8.5.17)$$

其中 $\Delta k = k_+ - k_- = k_0\left(\sqrt{\varepsilon_1+\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_2}\right) \approx k_0\varepsilon_2/\sqrt{\varepsilon_1}$ （因为 $\varepsilon_2 << \varepsilon_1$ ）。假设 Faraday 介质的厚度为 d 且满足 $\Delta k\cdot d << 1$，则从 Faraday 介质中出来时（将 $z=d$ 带入（8.5.17））的光波的偏振方向（未归一化）变成

$$(1+e^{i\Delta k\cdot d})\vec{e}_x + i(1-e^{i\Delta k\cdot d})\vec{e}_y \approx 2\vec{e}_x + (\Delta k\cdot d)\vec{e}_y \qquad (8.5.18)$$

故经过介质后的线偏振光波偏振方向旋转了如下的角度

$$|\Delta\phi| = \Delta k\cdot d/2 \approx k_0 d\varepsilon_2/(2\sqrt{\varepsilon_1})$$

此即是著名的 Faraday 旋光效应。

几点讨论：

1. 原则上经过 Faraday 介质后的光波应呈现椭圆偏振，但当 d 或 B 很小时，这个椭圆偏振的短轴远小于长轴，可近似看作线偏振。
2. 在各向同性的介质里，沿 x、y 方向偏振的光波的 k 矢量相同（或者说状态简并），因此这种介质中左右旋电磁波同样状态简并。我们既可以用线偏振的光波作为基把任意偏振的波展开，等价地，我们也可以用左右旋光作为基来做同样的事情。但各向异性介质中不存在这种简并，我们必须求出色散关系对应的电磁本征态作为基，此时不能随意选取线偏振或者圆偏振波作为基。

§ 8.6 电磁波在介质面上的反射和折射

到现在为止，我们只学习了电磁波在一个大块材料中传输时的行为。电磁波从一个材料进入另一个材料中会有什么事情发生？此即是本节我们要学习的内容。

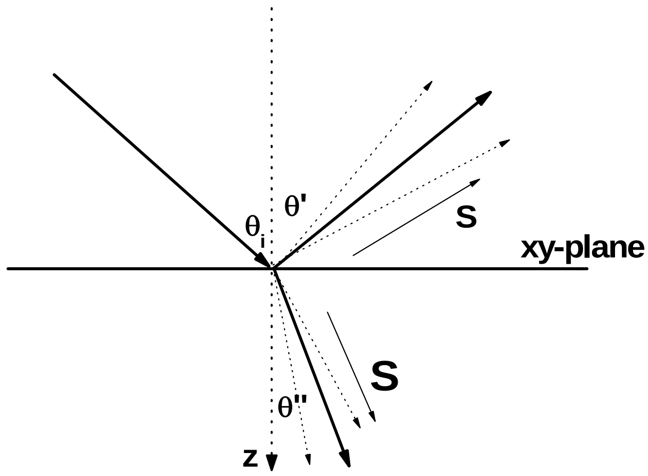
1．反射、折射的基本规律 – Snell's Law

光在两种介质的交界面上的反射和折射现象为大家所熟知。早期人们是基于牛顿的光粒子的概念用了许多假设推出光的反射和折射定律的。后来，当人们利用 Maxwell 方程以及边界条件，不加任何其他假设，成功推导出光的折射和反射定律时，人们才完全接受光的波动性。这里我们从 Maxwell 方程出发讨论电磁波的反射和折射现象。在界面上电磁场要满足边值条件

$$\vec{n}\times(\vec{E}_1(\vec{r},t)-\vec{E}_2(\vec{r},t))\big|_b=0,\quad \vec{n}\times(\vec{H}_1(\vec{r},t)-\vec{H}_2(\vec{r},t))\big|_b=0 \qquad (8.6.1)$$

亦即电场、磁场的切向分量在交界面内**（1）时时　（2）处处相等**（***我们已经把金属的传导电流在高频下作为束缚电流处理，因此界面上没有面自由电流！***）若交界面为一平面，我们把它取为 Oxy 面。如图 8.6 所示，考虑一单色平面波入射到交界面上，其电场为

$$\vec{E}_i=\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \qquad (8.6.2)$$



则电场切向分量在交界面上时时相等要求反射波、折射波也一定携带相同的时间因子 $e^{-i\omega t}$ - ***这个可以理解为介质分子在外电磁波的作用下以频率 ω 做受迫振动，因此产生的反射、折射波一定也是以此频率振动。***假设介质 1 和 2 都是均匀

各向同性的，则其中的电磁通解为平面波，因此，反射、折射波可以一般形式地写为所有频率为ω的沿不同方向传播的平面波的叠加

$$\begin{aligned} &\text{反射波} \qquad \vec{E}_r = \sum_{\vec{k}'} \vec{E}_0'(\vec{k}') e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega t)} \\ &\text{折射波} \qquad \vec{E}_d = \sum_{\vec{k}''} \vec{E}_0''(\vec{k}'') e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{r}-\omega t)} \end{aligned} \qquad (8.6.3)$$

其中波矢应和频率当满足色散关系

$$k'^2 = \omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 \,,\; k''^2 = \omega^2 \varepsilon_2 \mu_2 \qquad (8.6.4)$$

下面考虑（8.6.1）的第 2 个要求：电磁场在交界面上处处相等。这意味着反射波、折射波一定在 xy 平面内具有相同的空间波动行为，亦即带有相同的因子$e^{i\vec{k}_{\parallel}\cdot\vec{r}_{\parallel}} = e^{i(k_x x + k_y y)}$，这意味着（8.6.3）式中反射、折射波的展开式中只有一支平面波满足要求，即

$$k_{\parallel}' = k_{\parallel}'' = k_{\parallel} \qquad (8.6.5)$$

由（8.6.4）可得 z 方向上的 k 矢量：

$$k_z' = \pm\sqrt{\omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 - k_{\parallel}^2} \,,\; k_z'' = \pm\sqrt{\omega^2 \varepsilon_2 \mu_2 - k_{\parallel}^2} \qquad (8.6.6)$$

如何确定（8.6.6）式应取正号还是负号？这里应当用到因果关系（Causality）！根据因果关系，反射波及折射波的能量都应当离开界面。在常规介质中波矢的方向与能量传播的方向（即 Ponty 矢量 **S**）同方向$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \parallel \hat{k}$。故（8.6.6）中$k_z'$应取负根，而$k_z''$应取正根。故反射、折射光如上图所示。由上面的讨论我们可总结出反射、折射的基本规律：

(1) 反射波、折射波的频率与入射波频率相等：$\omega' = \omega'' = \omega$

(2) 根据$k_y = k_y' = k_y''$，若$k_y = 0$，则必有$k_y' = k_y'' = 0$。这意味着，入射线、反射线和折射线在同一平面内 – ***这个由入射波 k 矢量与交界面垂直方向构成的平面定义为入射面***。

(3) k_z', k_z'' 的正负号由因果关系确定！

(4) 根据$k_x = k_x'$, $|\vec{k}| = |\vec{k}'|$，就有$k\sin\theta = k'\sin\theta'$，由此得出，$\theta = \theta'$，即入射角等于反射角。

(5) $k_x = k_x''$，必有$k\sin\theta = k''\sin\theta''$，于是

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}=\frac{k''}{k}=\frac{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}=\frac{n_2}{n_1} \tag{8.6.7}$$

这就是光学中的折射定律（Snell’s Law）。因为折射定律中所涉及的物理量仅仅是 $n=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}=\sqrt{\varepsilon_r}\cdot\sqrt{\mu_r}$，故其被称为介质的折射率。

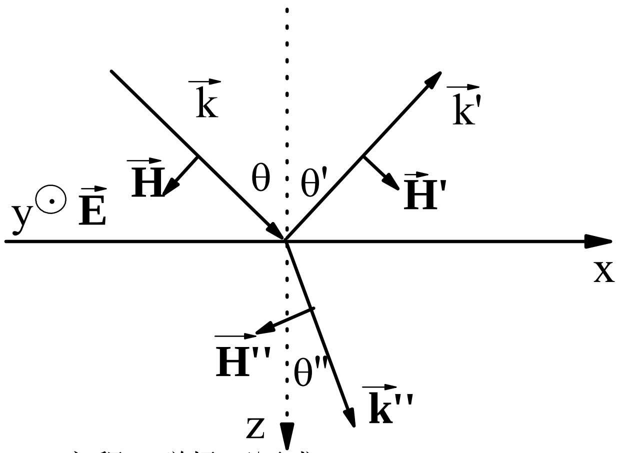
2．振幅关系 – Fresnel’s Law （菲涅耳定律）

对沿 k 方向传播的具有任意偏振状态的平面电磁波，我们总可以将其分解成两个偏振方向相互垂直的电磁波的叠加。因此，下面我们将分两种情形分别考虑。

A．S 波/TE（横电）波

在这种情况下，入射波的电场垂直于入射面（躺在交界面上），如图所示。入射、反射、以及折射波的电场可以写成

$$\begin{aligned}
&\text{入射波} \qquad \vec{E}_i=\hat{y}E_0e^{i(k_xx+k_zz-\omega t)}\\
&\text{反射波} \qquad \vec{E}_r=\hat{y}E_0'e^{i(k_xx-k_zz-\omega t)}\\
&\text{折射波} \qquad \vec{E}_t=\hat{y}E_0''e^{i(k_xx+k_z''z-\omega t)}
\end{aligned} \tag{8.6.8}$$



根据 Maxwell 方程，磁场可写成

$$\vec{H}=\frac{1}{Z}\left(\hat{k}\times\vec{E}\right) \tag{8.6.9}$$

的形式，其中 $Z=\dfrac{\mu\omega}{k}=\dfrac{\mu}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\dfrac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}}$ 是介质的阻抗。因此，入射、反射以及折射波的磁场为

$$\vec{H}_i = \frac{E_0}{Z_1}\frac{\left(k_x\hat{z}-k_z\hat{x}\right)}{k}e^{i(k_x x+k_z z-\omega t)}$$

$$\vec{H}_r = \frac{E_0^{'}}{Z_1}\frac{\left(k_x\hat{z}+k_z\hat{x}\right)}{k}e^{i(k_x x-k_z z-\omega t)} \qquad （8.6.10）$$

$$\vec{H}_t = \frac{E_0^{''}}{Z_2}\frac{\left(k_x\hat{z}-k_z^{''}\hat{x}\right)}{k^{''}}e^{i(k_x x+k_z^{''} z-\omega t)}$$

在交界面上（设 z=0）E，H 的切向值相等，则有

$$E_0 + E_0^{'} = E_0^{''}$$

$$\frac{k_z}{Z_1 k}E_0 - \frac{k_z}{Z_1 k}E_0^{'} = \frac{k_z^{''}}{Z_2 k^{''}}E_0^{''} \qquad （8.6.11）$$

注意到

$$k_z = k\cos\theta,\ k_z^{''} = k^{''}\cos\theta^{''} \qquad （8.6.12）$$

解联立方程可得

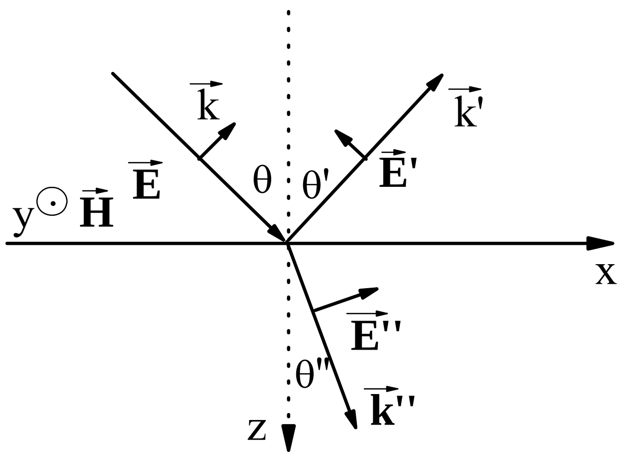
$$E_0^{'} = \frac{Z_2\cos\theta - Z_1\cos\theta^{''}}{Z_2\cos\theta + Z_1\cos\theta^{''}}E_0$$

$$E_0^{''} = \frac{2Z_2\cos\theta}{Z_2\cos\theta + Z_1\cos\theta^{''}}E_0 \qquad （8.6.13）$$

反射、折射波与入射波中的磁场振幅关系可由（8.6.10）求出。

B． **P 波/TM 波**

下面考虑另一种情况，即磁场垂直于入射面（或者说磁场躺在交界面内），此时先考虑磁场比较方便。如下图所示



入射波 $\vec{H}_i = \hat{y} H_0 e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}$

反射波 $\vec{H}_r = \hat{y} H'_0 e^{i(k_x x - k_z z - \omega t)}$ （8.6.14）

折射波 $\vec{H}_t = \hat{y} H''_0 e^{i(k_x x + k''_z z - \omega t)}$

根据 Maxwell 方程，电场可由

$$\vec{E} = -Z\left(\hat{k} \times \vec{H}\right) \tag{8.6.15}$$

求得。我们再次看到阻抗的重要性。因此可以根据（8.6.14-15）式写出电场 $\vec{E}_i, \vec{E}_r, \vec{E}_t$ 的形式，再根据边界条件(8.6.1)得到（可与 S 波对比）

$$\begin{aligned} H'_0 &= \frac{Z_1 \cos\theta - Z_2 \cos\theta''}{Z_1 \cos\theta + Z_2 \cos\theta''} H_0 \\ H''_0 &= \frac{2 Z_1 \cos\theta}{Z_1 \cos\theta + Z_2 \cos\theta''} H_0 \end{aligned} \tag{8.6.16}$$

(8.6.13)-(8.6.16) 式被称为菲涅耳公式，在特殊情况下（$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$）回到菲涅耳早期基于以太理论导出的光学折/反射振幅关系式。这有力地论证了光是电磁波。

习题：

P. 205， 8.4

1）若 $\vec{B} = -B_0 \vec{e}_z$，当一束沿 y 方向极化的电磁波沿 z 方向（$\vec{k} \parallel \vec{e}_z$）穿过厚度为 d 的 Faraday 介质后偏振状态变成什么？

2) 设有一种介质，其 $\varepsilon_r < 0, \mu_r < 0$，证明

（i）在此介质中存在传播模式的电磁波（即 k 为实数）

（ii）这种传播波的能流方向与波传播的方向相反，即 $\vec{S} \parallel (-\hat{k})$

（iii）根据这个结论，重新讨论当电磁波由空气入射到这种介质上时所满足的 Snell 定律，画出折射光的方向，并重新推导折射角与入射角之间的关系。

（提示：此处要用到因果律 – 即反射波和折射波的能流一定要离开界面！）

3) 推导 P 波的菲涅耳公式（8.6.16）式。