高维微分学——无限小增量公式

复旦力学　谢锡麟

2016 年 3 月 15 日

1　知识要素

1.1　按单参数直线化思想进行，可有结论：

按一维函数的无限小增量公式

定理 1.1 (一元函数的无限小增量公式)**.** 如果 $f(x) \in \mathbb{R}$ 在 $x_o \in \mathbb{R}$ 点具有直至 p 阶导数, 则有

$$f(x_o + \lambda) = f(x_o) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} \frac{d^k f}{dx^k}(x_o)\lambda^k + o(\lambda^p) \in \mathbb{R},$$

可有多元函数的无限小增量公式

定理 1.2 (多元函数的无限小增量公式)**.** 如果 $f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ 在 $\boldsymbol{x}_o \in \mathbb{R}^m$ 点具有直至 p 阶沿 $\boldsymbol{e}$ 的方向导数, 则有

$$f(\boldsymbol{x}_o + \lambda \boldsymbol{e}) = f(\boldsymbol{x}_o) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial \boldsymbol{e}^k}(\boldsymbol{x}_0)\lambda^k + o(\lambda^p) \in \mathbb{R}.$$

证明 引入 $\phi(\lambda) = f(\boldsymbol{x}_o + \lambda \boldsymbol{e})$, 则有 $\exists\, \phi^{(p)}(0) = \dfrac{\partial^k f}{\partial \boldsymbol{e}^k}(\boldsymbol{x}_o)$. 故按一维函数的无限小增量公式, 有

$$\phi(\lambda) = \phi(0) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} \phi^{(k)}(0)\lambda^k + o(\lambda^p) \in \mathbb{R}.$$

□

为将上述表达式中的各阶方向导数由偏导数表示, 可做如下考虑

1. 如有 $f(\boldsymbol{x})$ 在开线段 $(\boldsymbol{x}_o - \delta \boldsymbol{e}, \boldsymbol{x}_o - \delta \boldsymbol{e})$ 上可微, 则有

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i_1=1}^{M} \frac{\partial f}{\partial x^{i_1}}(\boldsymbol{x}) e^{i_1}, \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{x}_o - \delta \boldsymbol{e}, \boldsymbol{x}_o - \delta \boldsymbol{e}).$$

2. 进一步, 如有 $f(\boldsymbol{x})$ 的一阶偏导数在开线段 $(\boldsymbol{x}_o - \delta \boldsymbol{e},\, \boldsymbol{x}_o - \delta \boldsymbol{e})$ 上可微, 则有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{e}^2}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i_2, i_1=1}^{M} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i_2} x^{i_1}}(\boldsymbol{x}) e^{i_2} e^{i_1}, \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{x}_o - \delta \boldsymbol{e}, \boldsymbol{x}_o - \delta \boldsymbol{e}).$$

3. 依次类推, 如有 $f(\boldsymbol{x})$ 的所有 $p-2$ 阶偏导数在开线段 $(\boldsymbol{x}_o-\delta\boldsymbol{e},\boldsymbol{x}_o-\delta\boldsymbol{e})$ 上可微, 则有

$$\frac{\partial^{p-1}f}{\partial\boldsymbol{e}^{p-1}}(\boldsymbol{x})=\sum_{i_{p-1},\cdots,i_1=1}^{M}\frac{\partial^{p-1}f}{\partial x^{i_{p-1}}\cdots x^{i_1}}(\boldsymbol{x})e^{i_{p-1}}\cdots e^{i_1},\quad \forall\,\boldsymbol{x}\in(\boldsymbol{x}_o-\delta\boldsymbol{e},\boldsymbol{x}_o-\delta\boldsymbol{e}).$$

另一方面, 按可微性的定义, 对开线段上的任意一点 $\boldsymbol{x}$，都会存在对应的球形领域 $B_{\lambda_x}(\boldsymbol{x})$, 其上存在 $p-2$ 阶偏导数且都在球心连续①. 按可微性的充分性条件, 有 $p-3$ 阶偏导数在 $\boldsymbol{x}$ 点可微. 由此, 如有 $f(\boldsymbol{x})$ 的所有 $p-2$ 阶偏导数在开线段 $(\boldsymbol{x}_o-\delta\boldsymbol{e},\boldsymbol{x}_o-\delta\boldsymbol{e})$ 上可微, 对应有 $f(x)$ 及其 $1,\cdots,p-3$ 阶偏导数在开线段 $(\boldsymbol{x}_o-\delta\boldsymbol{e},\boldsymbol{x}_o-\delta\boldsymbol{e})$ 上可微.

4. 最后, 如有 $f(\boldsymbol{x})$ 的所有 $p-1$ 阶偏导数在 $\boldsymbol{x}_o$ 点可微, 则有

$$\frac{\partial^{p}f}{\partial\boldsymbol{e}^{p}}(\boldsymbol{x}_o)=\sum_{i_{p},\cdots,i_1=1}^{M}\frac{\partial^{p}f}{\partial x^{i_{p}}\cdots x^{i_1}}(\boldsymbol{x}_0)e^{i_{p}}\cdots e^{i_1}.$$

就混合偏导数是否可以交换次序，可做如下考虑

1. 按条件，$f(\boldsymbol{x})$ 的所有 k 阶偏导数（$k=1,\cdots,p-1$）在开线段 $(\boldsymbol{x}_o-\delta\boldsymbol{e},\boldsymbol{x}_o-\delta\boldsymbol{e})$ 上可微. 按可微性的定义, 对开线段上的任意一点 $\boldsymbol{x}$, 都会存在对应的球形领域 $B_{\lambda_x}(\boldsymbol{x})$, 其上存在 k 阶偏导数且都在球心连续, 由此在 $\boldsymbol{x}$ 点 k 阶偏导数（$k=1,\cdots,p-1$）可以交换次序.

2. 如进一步要求, 对 $\boldsymbol{x}_o$ 点, 存在对应的球形领域 $B_{\lambda_x}(\boldsymbol{x}_o)$, 其上存在 p 阶混合偏导数且在球心连续, 则在 $\boldsymbol{x}_o$ 点 p 阶混合偏导数可以交换次序.

综述所述，可得

定理 1.3 (多元函数沿某方向的无限小增量公式). 设有包含 $\boldsymbol{x}_0$ 的线段 $(\boldsymbol{x}_o-\delta\boldsymbol{e},\boldsymbol{x}_o-\delta\boldsymbol{e})\subset\mathscr{D}_x$，满足条件：$f(x)$ 在 $(\boldsymbol{x}_o-\delta\boldsymbol{e},\boldsymbol{x}_o-\delta\boldsymbol{e})$ 上具有 $p-2$ 阶可微的偏导数；$\boldsymbol{x}_o$ 点具有可微的 $p-1$ 阶偏导数；另在 $\boldsymbol{x}_o$ 的一个球形领域 $B_\lambda(\boldsymbol{x}_o)$ 上存在 p 阶混合偏导数且在球心连续。则有：

$$f(\boldsymbol{x}_o+\lambda\boldsymbol{e})=f(\boldsymbol{x}_o)+\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k!}\left[\sum_{i_k,\cdots,i_1=1}^{m}\frac{\partial^k f}{\partial x^{i_k}\cdots\partial x^{i_1}}(\boldsymbol{x}_o)e^{i_k}\cdots e^{i_1}\right]\lambda^k+o(\lambda^p)\in\mathbb{R}$$

式中各阶混合偏导数都可交换次序。

可引入 $\boldsymbol{h}:=\lambda\boldsymbol{e}=\left[\lambda e^1,\cdots,\lambda e^m\right]^T$, 上述展开式往往又表示为

$$f(\boldsymbol{x}_o+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{x}_o)+\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k!}\left[\sum_{i_k,\cdots,i_1=1}^{m}\frac{\partial^k f}{\partial x^{i_k}\cdots\partial x^{i_1}}(\boldsymbol{x}_o)h^{i_k}\cdots h^{i_1}\right]\lambda^k+o(|\boldsymbol{h}|_{\mathbb{R}^m}).$$

另, 可引入更强的条件 $f(x)\in\mathscr{C}^p(B_\lambda(\boldsymbol{x}_0);\mathbb{R})$②,$B_\lambda(\boldsymbol{x}_o)\subset\mathbb{D}_x$, 则就 $\boldsymbol{x}_o$ 的各个方向都存在无限小增量公式. 但需指出, 展开式的“收敛速度”实际上依赖于方向而非形式上所表示的对所有方向都有统一的“控制速度”, 亦即并非存在对所有方向都适用的 p 阶无穷小量.

① 因为 $p-2$ 阶偏导数都在球心可微, 而可微性对应连续性.

② 指 $f(x)$ 在 $B_\lambda(\boldsymbol{x}_o)$ 中存在 p 阶偏导数且都在球中每一点都连续.

1.2 多项式逼近的唯一性

性质 1.4 (多项式逼近的唯一性). 多项式逼近的唯一性可归纳为如下结论

1. 设 $\sum\limits_{i+j=0}^{n} A_{ij}x^i y^j + o(\rho^n) = 0(\rho \to 0)$，此处 $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, 则有

$$A_{ij} = 0, \quad 此处 i,j 为非负整数而且 i+j = 0,1,2,\cdots,n;$$

2. 设 $P_n(\boldsymbol{x}) + o(\rho^n) = 0(\rho \to 0)$，此处 $\rho = |\boldsymbol{x}|_{\mathbb{R}^n}$，$P_n(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{|k|\leqslant n} a_k \boldsymbol{x}^k$，$a_k = a_{k_1 k_2 \cdots k_n}$，$|k| = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i$，$\boldsymbol{x}^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$，$k_1, \cdots, k_n$ 为非负整数, 则有

$$a_k = 0, \quad |k| \leqslant n.$$

证明 1. 由 $\sum\limits_{i+j=0}^{n} A_{ij}x^i y^j + o((x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}) = 0$，即有

$$A_{00} + \sum_{i+j=1}^{n} A_{ij}x^i y^j + o((x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}) = 0$$

取 $\sqrt{x^2+y^2} \to 0$，则有 $A_{00} = 0$。再考虑

$$(A_{10}x + A_{01}y) + \sum_{i+j=2}^{n} A_{ij}x^i y^j + o((x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}) = 0$$

所以有

$$A_{10}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + A_{01}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sum_{i+j=2}^{n} A_{ij}\frac{x^i y^j}{\sqrt{x^2+y^2}} + o((x^2+y^2)^{\frac{n-1}{2}}) = 0$$

取 $y = kx$ 在令 $x \to 0$，则有

$$A_{10}\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} + A_{01}\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} = 0, \quad \forall\, k \in \mathbb{R}$$

故有 $A_{10} = A_{01} = 0$。设有

$$\sum_{i+j=k} A_{ij}x^i y^j + \sum_{i+j=k+1}^{n} A_{ij}x^i y^j + o((x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}) = 0$$

引入 $y = \lambda x$，则有

$$\sum_{i+j=k} A_{ij}\lambda^j x^{i+j} + \sum_{i+j=k+1}^{n} A_{ij}\lambda^j x^{i+j} + o((1+\lambda^2)^{\frac{n}{2}} x^n) = 0$$

由此有

$$\sum_{i+j=k} A_{ij}\lambda^j + \sum_{i+j=k+1}^{n} A_{ij}\lambda^j x^{i+j-k} + o((1+\lambda^2)^{\frac{n}{2}} x^{n-k}) = 0$$

取 $x \to 0$ 可有

$$\sum_{i+j=k} A_{ij}\lambda^j = \sum_{j=0}^{k} A_{k-j,j}\lambda^j = 0$$

用矩阵可以表示为

$$\begin{bmatrix}\lambda^0, \lambda^1, \cdots, \lambda^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{k0} \\ A_{k-1,1} \\ \vdots \\ A_{0k}\end{bmatrix} = 0$$

将 λ 分别取为 $1, 2, \cdots, k+1$，即有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & k+1 & \cdots & (k+1)^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{k0} \\ A_{k-1,1} \\ \vdots \\ A_{0k}\end{bmatrix} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{k+1}$$

此处系数矩阵为范德蒙行列式非奇异，故有 $A_{k0} = A_{k-1,1} = \cdots = A_{0k} = 0$。

2. 考虑高维情形

$$\sum_{k_1+\cdots+k_n=0}^{p} A_{k_1\cdots k_n} x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n} + o((x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{p}{2}}) = 0, \quad p \in \mathbb{N}$$

则有

$$A_{0\cdots 0} + \sum_{k_1+\cdots+k_n=1}^{p} A_{k_1\cdots k_n} x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n} + o((x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{p}{2}}) = 0, \quad p \in \mathbb{N}$$

引入 $\begin{cases} x_1 = \lambda_1\theta \\ \cdots \\ x_n = \lambda_n\theta \end{cases}$ 则有

$$A_{0\cdots 0} + \sum_{k_1+\cdots+k_n=1}^{p} A_{k_1\cdots k_n}\left(\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_n^{k_n}\right)\theta^{k_1+\cdots+k_n} + o(\theta^p) = 0$$

取 $\theta \to 0$，则有 $A_{0\cdots 0} = 0$。由此可有

$$(A_{10\cdots 0}x_1 + \cdots + A_{0\cdots 01}x_n) + \sum_{k_1+\cdots+k_n=2}^{p} A_{k_1\cdots k_n} x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n} + o((x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{p}{2}}) = 0$$

同样引入 $\begin{cases} x_1 = \lambda_1\theta \\ \cdots \\ x_n = \lambda_n\theta \end{cases}$ 则有

$$(A_{10\cdots 0}\lambda_1 + \cdots + A_{0\cdots 01}\lambda_n)\,\theta + \sum_{k_1+\cdots+k_n=2}^{p} A_{k_1\cdots k_n}\left(\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_n^{k_n}\right)\theta^{k_1+\cdots+k_n} + o(\theta^p) = 0$$

由此有

$$(A_{10\cdots0}\lambda_1+\cdots+A_{0\cdots01}\lambda_n)+\sum_{k_1+\cdots+k_n=2}^{p}A_{k_1\cdots k_n}\left(\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_n^{k_n}\right)\theta^{k_1+\cdots+k_n-1}+o(\theta^{p-1})=0$$

取 $\theta\to0$，则有 $A_{10\cdots0}\lambda_1+\cdots+A_{0\cdots01}\lambda_n=0$，亦即

$$[\lambda_1,\cdots,\lambda_n]\begin{bmatrix}A_{10\cdots0}\\ \vdots\\ A_{0\cdots01}\end{bmatrix}=0$$

可有 $A_{10\cdots0}=\cdots=A_{0\cdots01}=0$。设有

$$\sum_{k_1+\cdots+k_n=q}A_{k_1\cdots k_n}x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}+\sum_{k_1+\cdots+k_n=q+1}^{p}A_{k_1\cdots k_n}x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}+o((x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{p}{2}})=0$$

引入 $\begin{cases}x_1=\lambda_1\theta\\ \cdots\\ x_n=\lambda_n\theta\end{cases}$ 则有

$$\sum_{k_1+\cdots+k_n=q}A_{k_1\cdots k_n}\left(\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_n^{k_n}\right)\theta^q+\sum_{k_1+\cdots+k_n=q+1}^{p}A_{k_1\cdots k_n}\left(\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_n^{k_n}\right)\theta^{k_1+\cdots+k_n}+o(\theta^p)=0$$

可以得到

$$\sum_{k_1+\cdots+k_n=q}A_{k_1\cdots k_n}\left(\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_n^{k_n}\right)=0$$

考虑

$$\sum_{k_n=0}^{q}\left(\sum_{k_1+\cdots+k_{n-1}=q-k_n}^{p}A_{k_1\cdots k_{n-1}k_n}\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_{n-1}^{k_{n-1}}\right)\lambda_n^{k_n}=\sum_{k_n=0}^{q}C_{k_n}\lambda_n^{k_n}=0$$

可有

$$\sum_{k_1+\cdots+k_{n-1}=q-k_n}A_{k_1\cdots k_{n-1}k_n}\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_{n-1}^{k_{n-1}}=0,\quad\forall\,k_n=0,1,\cdots,q$$

再考虑

$$\sum_{k_{n-1}=0}^{q-k_n}\left(\sum_{k_1+\cdots+k_{n-2}=q-k_n-k_{n-1}}^{p}A_{k_1\cdots k_{n-2}k_{n-1}k_n}\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_{n-2}^{k_{n-2}}\right)\lambda_{n-1}^{k_{n-1}}=0$$

以此类推至二次式，即

$$\sum_{k_1+k+2=q-(k_n+k_{n-1}+\cdots+k_3)}A_{k_1k_2}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}=0$$

按 (1) 中分析即可得所有系数均为零。

□

1.3 多元函数多项式逼近的实际获得方法

1.3.1 乘积函数的多项式逼近

如有

$$\begin{cases} f(x,y) = A_{00} + (A_{10}x + A_{01}y) + (A_{20}x^2 + A_{11}xy + A_{02}y^2) + o(x^2+y^2) \\ g(x,y) = B_{00} + (B_{10}x + B_{01}y) + (B_{20}x^2 + B_{11}xy + B_{02}y^2) + o(x^2+y^2) \end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned} (fg)(x,y) &= \big[A_{00} + (A_{10}x + A_{01}y) + (A_{20}x^2 + A_{11}xy + A_{02}y^2) + o(x^2+y^2)\big] \\ &\qquad \cdot \big[B_{00} + (B_{10}x + B_{01}y) + (B_{20}x^2 + B_{11}xy + B_{02}y^2) + o(x^2+y^2)\big] \\ &= A_{00}B_{00} + \big[(A_{00}B_{10} + B_{00}A_{10})x + (B_{00}A_{01} + A_{00}B_{01})y\big] \\ &\quad + \big[(A_{00}B_{20} + A_{10}B_{10} + B_{00}A_{20})x^2 + (A_{10}B_{01} + B_{10}A_{01})xy \\ &\quad + (A_{00}B_{02} + A_{01}B_{01} + B_{00}A_{02})y^2\big] + o(x^2+y^2) \end{aligned}$$

相关分析中，利用关系式

$$x^p y^q = o\left(\left(x^2+y^2\right)^{\frac{p+q-1}{2}}\right), \quad \forall\, p,q \in \mathbb{N}$$

分析：考虑到

$$\frac{|x^p y^q|}{(x^2+y^2)^{\frac{p+q-1}{2}}} = \frac{|x^p|}{(x^2+y^2)^{\frac{p}{2}}} \frac{|y^q|}{(x^2+y^2)^{\frac{q}{2}}} (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$$

1.3.2 除法函数的多项式逼近

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)(x,y) &= \frac{A_{00} + (A_{10}x + A_{01}y) + (A_{20}x^2 + A_{11}xy + A_{02}y^2) + o(x^2+y^2)}{B_{00} + (B_{10}x + B_{01}y) + (B_{20}x^2 + B_{11}xy + B_{02}y^2) + o(x^2+y^2)} \\ &= \frac{A_{00} + (A_{10}x + A_{01}y) + (A_{20}x^2 + A_{11}xy + A_{02}y^2) + o(x^2+y^2)}{B_{00}\left[1 + \dfrac{(B_{10}x + B_{01}y) + (B_{20}x^2 + B_{11}xy + B_{02}y^2) + o(x^2+y^2)}{B_0}\right]} \\ &= \frac{A_{00} + (A_{10}x + A_{01}y) + (A_{20}x^2 + A_{11}xy + A_{02}y^2) + o(x^2+y^2)}{B_{00}\left[1 + \theta(x,y)\right]} \end{aligned}$$

而

$$[1+\theta(x,y)]^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!}\binom{p}{k}\theta^k(x,y) + o(\theta^p(x,y))$$

1.3.3 复合函数的多项式逼近

如有

$$\begin{cases} f(x,y) = (A_{10}x + A_{01}y) + (A_{20}x^2 + A_{11}xy + A_{02}y^2) + o(x^2+y^2) \\ \varTheta(z) = C_0 + \sum_{k=1}^{p} C_k z^k + o(z^p) \end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned}\Theta(f(x,y)) = C_0 + \sum_{k=1}^{p} C_k \left[(A_{10}x + A_{01}y) + (A_{20}x^2 + A_{11}xy + A_{02}y^2) + o(x^2+y^2)\right]^k \\ + o\left((x^2+y^2)^{\frac{p}{2}}\right)\end{aligned}$$

2 应用事例

3 建立路径

- 多元函数无限小增量公式的获得基于单参数直线化的基本思想, 由此利用一维函数的无限小增量公式.
- 类同于一维函数的无限小增量公式, 多元函数的无限小增量公式提供了利用多项式局部逼近原函数的基本方法. 当限定误差为二阶无穷小量, 则对于二维函数局部逼近为二次曲线, 而对三维函数局部逼近可为二次曲面, 便于把握多元函数的局部特征.