# 第四章补充题目

1. 设

$V_1=\{\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_1, \cdots, x_n\in\mathbf{R}$ 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$,

$V_2=\{\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_1, \cdots, x_n\in\mathbf{R}$ 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1\}$,

问 $V_1$, $V_2$ 是不是向量空间？为什么？

解　$V_1$ 是向量空间，因为任取

$$\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T\in V_1,\ \beta=(b_1, b_2, \cdots, b_n)^T\in V_1,\ \lambda\in\in\mathbf{R},$$

有
$$a_1+a_2+\cdots+a_n=0,$$
$$b_1+b_2+\cdots+b_n=0,$$

从而
$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)$$
$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)=0,$$
$$\lambda a_1+\lambda a_2+\cdots+\lambda a_n=\lambda(a_1+a_2+\cdots+a_n)=0,$$

所以
$$\alpha+\beta=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)^T\in V_1,$$
$$\lambda\alpha=(\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n)^T\in V_1.$$

$V_2$ 不是向量空间，因为任取

$$\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T\in V_1,\ \beta=(b_1, b_2, \cdots, b_n)^T\in V_1,$$

有
$$a_1+a_2+\cdots+a_n=1,$$
$$b_1+b_2+\cdots+b_n=1,$$

从而 $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)=2,$

所以 $\alpha+\beta=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)^T \notin V_1$.

2．试证：由 $\boldsymbol{a}_1=(0, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(1, 0, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_3=(1, 1, 0)^T$ 所生成的向量空间就是 $\mathbf{R}^3$.

证明　设 $A=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$，由

$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=-2\neq 0,$$

知 $R(A)=3$，故 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 是三维空间 $\mathbf{R}^3$ 的一组基，因此由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 所生成的向量空间就是 $\mathbf{R}^3$.

3．由 $\boldsymbol{a}_1=(1, 1, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(1, 0, 1, 1)^T$ 所生成的向量空间记作 $V_1$,由 $\boldsymbol{b}_1=(2, -1, 3, 3)^T$, $\boldsymbol{b}_2=(0, 1, -1, -1)^T$ 所生成的向量空间记作 $V_2$，试证 $V_1=V_2$.

证明　设 $A=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, $B=(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$．显然 $R(A)=R(B)=2$，又由

$$(A,B)=\begin{pmatrix}1&1&2&0\\1&0&-1&1\\0&1&3&-1\\0&1&3&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&-1&-3&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

知 $R(A, B)=2$，所以 $R(A)=R(B)=R(A, B)$，从而向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 与向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ 等价. 因为向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 与向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ 等价，所以这两个向量组所生成的向量空间相同，即 $V_1=V_2$.

4. 验证 $\boldsymbol{a}_1=(1, -1, 0)^T, \boldsymbol{a}_2=(2, 1, 3)^T, \boldsymbol{a}_3=(3, 1, 2)^T$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，并把 $\boldsymbol{v}_1=(5, 0, 7)^T, \boldsymbol{v}_2=(-9, -8, -13)^T$ 用这个基线性表示.

解　设 $A=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$. 由

$$|(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)|=\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&1&1\\0&3&2\end{vmatrix}=-6\neq 0,$$

知 $R(A)=3$，故 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基.

设 $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+x_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{v}_1$，则

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=5\\-x_1+x_2+x_3=0\\3x_2+2x_3=7\end{cases},$$

解之得 $x_1=2, x_2=3, x_3=-1$，故线性表示为 $\boldsymbol{v}_1=2\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$.

设 $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+x_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{v}_2$，则

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=-9 \\ -x_1+x_2+x_3=-8 \\ 3x_2+2x_3=-13 \end{cases},$$

解之得 $x_1=3, x_2=-3, x_3=-2$，故线性表示为 $\boldsymbol{v}_2=3\boldsymbol{a}_1-3\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3$.

5．已知 $\mathbf{R}^3$ 的两个基为

$\boldsymbol{a}_1=(1, 1, 1)^T, \boldsymbol{a}_2=(1, 0, -1)^T, \boldsymbol{a}_3=(1, 0, 1)^T,$

$\boldsymbol{b}_1=(1, 2, 1)^T, \boldsymbol{b}_2=(2, 3, 4)^T, \boldsymbol{b}_3=(3, 4, 3)^T.$

求由基 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 到基 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ 的过渡矩阵 $P$.

解　设 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 是三维单位坐标向量组，则

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

于是　$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{pmatrix},$$

由基 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 到基 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ 的过渡矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}.$$

6. 试用施密特法把下列向量组正交化:

(1) $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$;

解　根据施密特正交化方法,

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1-\frac{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2]}\boldsymbol{b}_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

(2) $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

解　根据施密特正交化方法,

$$b_1=a_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$b_2=a_2-\frac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$b_3=a_3-\frac{[b_1,a_3]}{[b_1,b_1]}b_1-\frac{[b_2,a_3]}{[b_2,b_2]}b_2=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix}.$$

7. 下列矩阵是不是正交阵:

(1) $\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1\end{pmatrix}$;

解　此矩阵的第一个行向量非单位向量, 故不是正交阵.

(2) $\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9}\\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9}\\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9}\end{pmatrix}$.

解　该方阵每一个行向量均是单位向量，且两两正交，故为正交阵.

8. 设 $\boldsymbol{x}$ 为 $n$ 维列向量, $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}=1$, 令 $H=E-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T$, 证明 $H$ 是对称的正交阵.

证明　因为

$$H^T=(E-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T)^T=E-2(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T)^T=E-2(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T)^T$$

$$=E-2(\boldsymbol{x}^T)^T\boldsymbol{x}^T=E-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T,$$

所以 $H$ 是对称矩阵.

因为

$$H^TH=HH=(E-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T)(E-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T)$$

$$=E-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T+(2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T)(2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T)$$

$$=E-4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T+4\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}^T$$

$$=E-4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T+4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T$$

$$=E,$$

所以 $H$ 是正交矩阵.

9. 设 $A$ 与 $B$ 都是 $n$ 阶正交阵, 证明 $AB$ 也是正交阵.

证明　因为 $A$, $B$ 是 $n$ 阶正交阵, 故 $A^{-1}=A^T$, $B^{-1}=B^T$,

$$(AB)^T(AB)=B^TA^TAB=B^{-1}A^{-1}AB=E,$$

故 $AB$ 也是正交阵.