电动力学习题课（一）

Feb 20th, 2009

1 特殊函数与爱因斯坦求和约定

1) Kronecker delta函数δ_{ij}:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{1.1}$$

2) Levi-civita张量ε_{ijk}:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & [ijk]\text{是偶置换，即}ijk = 123, 231, 312 \\ -1 & [ijk]\text{是奇置换，即}ijk = 213, 132, 321 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1.2}$$

3) 爱因斯坦求和约定：公式中重复指标自动求和，略去求和号。

$$\sum_{i=1}^{3} A_i B_i \equiv A_i B_i \tag{1.3}$$

注意：以上的定义只适用于平直空间，而不适用于弯曲空间（广义相对论考虑的空间）。

Levi-civita张量的性质：

- Levi-civita张量对于下标反称：$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$
- 下标重复，Levi-civita张量为0：$\varepsilon_{iik} = 0$
- 单重求和：$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} \equiv \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} \end{vmatrix}$
- 两重求和：$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mjk} = \delta_{im}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jm} = 3\delta_{im} - \delta_{im} = 2\delta_{im}$
- 三重求和：$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 2\delta_{ii} = 6$

2 标量，矢量和张量的引入

2.1 定义

讨论物理量是标量还是矢量的大前提是物理规律的**协变性**，即描述物理规律的方程在惯性系变换下形式不变。
由于运动总是在四维时空中进行，所以不妨设四维空间惯性系的变换为：

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu \tag{2.1}$$

那么物理量可按如下分类：

- 标量C：不同惯性系变换下的不变量。
- 矢量$\vec{A}$：由四个分量组成，且不同惯性系变换下按如下方式变换的量：$A'_\mu = a_{\mu\nu} A_\nu$
- 二阶张量$\vec{\vec{T}}$：由十六个分量组成，不同惯性系变换下按如下方式变换的量：$T'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda} a_{\nu\delta} T_{\lambda\delta}$
- 类似可以知道n阶张量的定义。

注意：这里所提到的惯性系之间的变换并没有特指某种坐标变换，比如说伽利略变换或者洛伦兹变换。

2.2 从伽利略变换到洛伦兹变换

在19世纪末，很多人都认为经典力学是完美的，这是因为经典力学的基本方程Lagrange's Equation在伽利略变换下是协变的。
我们首先来验证这一点。为了简单，我们考虑下面的变换：

$$\begin{cases} x' &= x + vt \\ t' &= t \end{cases} \tag{2.2}$$

从Eq.(2.2)可以得到：

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x} \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = -v\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{2.4}$$

进一步，可得：

$$\frac{\partial x'}{\partial t'} = \frac{\partial x}{\partial t} \tag{2.5}$$

注意：Eq.(2.5)并不表示不同参考系下的速度相等，因为速度是位移对时间的全微分。
又经典力学的时间观是绝对的，其数学表示为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tag{2.6}$$

综合Eq.(2.3,2.5,2.6)可知：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(\frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial \dot{x}'}) - \frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial x'} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}}) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} = 0 \tag{2.7}$$

Eq.(2.7)说明Lagrange's Equation在变换Eq.(2.2)下是协变的。
然而由麦克斯韦方程组推出的达朗贝尔方程：

$$\nabla^2\varphi - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{2.8}$$

显然在伽利略变换下是不协变的，那么现在的问题就是如果承认伽利略变换，麦克斯韦方程组就是错误的；如果承认麦克斯韦方程组，伽利略变换就是不正确的。Einstein选择了后者，用洛伦兹变换取代伽利略变换作为惯性系之间变换，进而建立了狭义相对论。
也许你会问：四维时空除了上面两类变换，还有别的变换么？
幸运的是数学上可以严格证明$\mathbb{R}^4$只有两种微分结构。

3 正交曲线坐标系

3.1 基本概念

定义：三维空间$\mathbb{R}^3$，如果$\forall p \in \mathbb{R}^3$，$\exists$一组独立、连续、单值函数：

$$u_1 = \mathrm{f}_1(x, y, z), \quad u_2 = \mathrm{f}_2(x, y, z), \quad u_3 = \mathrm{f}_3(x, y, z) \tag{3.1}$$

并且其反函数

$$x = \varphi_1(u_1, u_2, u_3),\ y = \varphi_2(u_1, u_2, u_3),\ z = \varphi_3(u_1, u_2, u_3) \tag{3.2}$$

也独立连续单值，则称(u_1, u_2, u_3)为p点的**曲线坐标(Curvilinear Coordinates)**，$\{(u_1, u_2, u_3)\}$为**一般曲线坐标系**。
在曲线坐标系中，位置矢量为$\vec{r}(u_1, u_2, u_3)$，那么微分线元为：

$$\mathrm{d}\vec{\ell} \equiv \mathrm{d}\vec{r} = \vec{a}_1 \mathrm{d}u_1 + \vec{a}_2 \mathrm{d}u_2 + \vec{a}_3 \mathrm{d}u_3 \tag{3.3}$$

如果$\forall \vec{r}$，$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$两两垂直，则称此曲线坐标系为**正交曲线坐标系(Orthogonal Curvilinear Coordinates)**。

下面考虑正交曲线坐标系的微分线元和基矢：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{\ell} &\equiv \hat{e}_x \mathrm{d}x + \hat{e}_y \mathrm{d}y + \hat{e}_z \mathrm{d}z && (3.4)\\
&= \hat{e}_x(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu_1}\mathrm{d}\mu_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu_2}\mathrm{d}\mu_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu_3}\mathrm{d}\mu_3) + \hat{e}_y(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu_1}\mathrm{d}\mu_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu_2}\mathrm{d}\mu_2 \\
&\quad + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu_3}\mathrm{d}\mu_3) + \hat{e}_z(\frac{\partial \varphi_3}{\partial \mu_1}\mathrm{d}\mu_1 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \mu_2}\mathrm{d}\mu_2 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \mu_3}\mathrm{d}\mu_3) && (3.5)\\
&= (\hat{e}_x \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu_i} + \hat{e}_y \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu_i} + \hat{e}_z \frac{\partial \varphi_3}{\partial \mu_i})\mathrm{d}\mu_i \equiv g_i \hat{e}_i \mathrm{d}\mu_i && (3.6)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\text{度量因子}g_i \qquad g_i &= [(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu_i})^2 + (\frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu_i})^2 + (\frac{\partial \varphi_3}{\partial \mu_i})^2]^{\frac{1}{2}} && (3.7)\\
\text{基矢}\hat{e}_i \qquad \hat{e}_i &= \frac{1}{g_i}(\hat{e}_x \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu_i} + \hat{e}_y \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu_i} + \hat{e}_z \frac{\partial \varphi_3}{\partial \mu_i}) && (3.8)
\end{aligned}$$

3.2 基矢

$$\begin{aligned}
\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j &= \delta_{ij} && (3.9)\\
\hat{e}_i \times \hat{e}_j &= \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k && (3.10)
\end{aligned}$$

有了基矢的运算公式，便可以考虑矢量$\vec{A} = A_i \hat{e}_i$的运算：
1)点乘(dot product):

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = A_i B_i \tag{3.11}$$

2)叉乘(cross product):

$$\vec{A} \times \vec{B} = A_i B_j \hat{e}_i \times \hat{e}_j = \varepsilon_{ijk} A_i B_j \hat{e}_k \tag{3.12}$$

3)三重标积(scalar triple product)：

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = A_m \hat{e}_m \cdot \varepsilon_{ijk} B_i C_j \hat{e}_k = \varepsilon_{ijm} A_m B_i C_j \tag{3.13}$$

用Eq.(3.13)不难证明：

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) \tag{3.14}$$

4)三重矢积(vector triple product):

$$\begin{aligned}
& \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \\
= \;& A_m\hat{e}_m\times\varepsilon_{ijk}B_iC_j\hat{e}_k \\
= \;& A_mB_iC_j\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mkn}\hat{e}_n \\
= \;& A_mB_iC_j(\delta_{in}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jn})\hat{e}_n \\
= \;& A_mB_iC_m\hat{e}_i-A_mB_mC_j\hat{e}_j \\
= \;& (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

利用Eq.(3.15)不难证明：

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})+\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A})+\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})=0 \tag{3.16}$$

5)并积(dyadic product):

$$\vec{\vec{T}}\equiv\vec{A}\vec{B}=A_iB_j\hat{e}_i\hat{e}_j \tag{3.17}$$

我们一般称$\vec{A}\vec{B}$为**并矢(dyad)**，一共9个分量，其中6个独立。
两个或两个以上的并矢之和称为**并矢式(dyadic)**，有9个独立分量，也称二阶张量。
并矢相关运算:
a)点乘：

$$\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j\hat{e}_k = \delta_{ij}\hat{e}_k \tag{3.18}$$
$$\hat{e}_m\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j\hat{e}_k = \delta_{ij}\hat{e}_m\hat{e}_k \tag{3.19}$$

b)叉乘：

$$\hat{e}_i\times\hat{e}_j\hat{e}_k = \varepsilon_{ijn}\hat{e}_n\hat{e}_k \tag{3.20}$$
$$\hat{e}_m\hat{e}_i\times\hat{e}_j\hat{e}_k = \varepsilon_{ij\ell}\hat{e}_m\hat{e}_\ell\hat{e}_k \tag{3.21}$$

事实上，在张量代数中只要知道了基矢的运算公式就可以计算任何矢量的运算结果了。
作为练习，大家可以验证下面的公式：

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \tag{3.22}$$
$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a}) \tag{3.23}$$
$$\vec{a}\times(\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} \tag{3.24}$$
$$(\vec{b}\vec{c})\times\vec{a} = \vec{b}(\vec{c}\times\vec{a}) \tag{3.25}$$

c)双点积(double dot product)：

$$(\hat{e}_i\hat{e}_j):(\hat{e}_k\hat{e}_\ell)\equiv(\hat{e}_j\cdot\hat{e}_k)(\hat{e}_i\cdot\hat{e}_\ell) \tag{3.26}$$

那么

$$\vec{\vec{A}}:\vec{\vec{B}}=(A_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j):(B_{k\ell}\hat{e}_k\hat{e}_\ell)=A_{ij}B_{ji} \tag{3.27}$$

很明显，双点积的作用相当于矩阵相乘再求迹(trace)。

3.3 梯度

根据我们已知的直角坐标下的运算可得：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}T &= \frac{\partial T}{\partial \mu_i}\mathrm{d}\mu_i \equiv (\nabla T)\cdot(\mathrm{d}\vec{\ell}) && (3.28)\\
\Rightarrow\quad \nabla T &= \frac{1}{g_i}\frac{\partial T}{\partial \mu_i}\hat{e}_i && (3.29)\\
\Rightarrow\quad \nabla &= \hat{e}_i\frac{1}{g_i}\frac{\partial}{\partial \mu_i} && (3.30)
\end{aligned}$$

虽然这里的推导∇是对于标量T而言的，但是实际上Eq.(3.30)确是恒成立的。
综合Eq.(3.9,3.10,3.29)可得到下面一些有用的公式：

$$\begin{aligned}
\hat{e}_j &= g_j\nabla\mu_j && (3.31)\\
\hat{e}_m &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijm}g_ig_j(\nabla\mu_i)\times(\nabla\mu_j) && (3.32)\\
(\nabla\mu_i)\times(\nabla\mu_j) &= \frac{\varepsilon_{ijk}}{g_ig_j}\hat{e}_k && (3.33)
\end{aligned}$$

细论∇：原则上来说，有了Eq.(3.30)以及前面张量分析的基矢运算法则，便可以计算正交曲线坐标系下任何形式的微分运算，但是这个过程中会涉及到联络的概念，比较难以计算，所以下面来介绍一种较为简单的算法。

$$\nabla = \hat{e}_i\frac{1}{g_i}\frac{\partial}{\partial \mu_i} \tag{3.34}$$

很明显，∇既是矢量又是线性算符，所以计算时可以分为两步：
1)忽略∇的矢量特征，仅把其当做算符作用于函数或矢量，但要保持等式的运算顺序；
2)再考虑∇是矢量，运用矢量公式进行计算，但要保证求导顺序的正确。

下面来看两个例子：

$$\begin{aligned}
\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) &= \nabla_A(\vec{A}\cdot\vec{B})+\nabla_B(\vec{A}\cdot\vec{B}) && (3.35)\\
&= \vec{B}\times(\nabla_A\times\vec{A})+(\vec{B}\cdot\nabla_A)\vec{A}+\vec{A}\times(\nabla_B\times\vec{B})+(\vec{A}\cdot\nabla_B)\vec{B} && (3.36)\\
&= \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}+\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} && (3.37)
\end{aligned}$$

Eq.(3.35)利用了∇的算符特征，Eq.(3.36)利用了∇的矢量特性。

$$\begin{aligned}
\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) &= \nabla_\nabla\times(\nabla\times\vec{A})+\nabla_A\times(\nabla\times\vec{A}) && (3.38)\\
&= \nabla(\nabla_A\cdot\vec{A})-(\nabla\cdot\nabla_A)\vec{A} && (3.39)\\
&= \nabla(\nabla\cdot\vec{A})-(\nabla\cdot\nabla)\vec{A}\\
&\equiv \nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A} && (3.40)
\end{aligned}$$

Eq.(3.38)利用了∇的算符特征，Eq.(3.39)利用了∇的矢量特性。
一般我们用Eq.(3.40)来定义矢量的Laplacian。
因为电动力学经常碰到这类运算，所以应该熟悉这种计算方法，作为练习，大家可以尝试推导书后附录一中的公式。

3.4 散度和旋度

散度：

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{A} &= \nabla\cdot(A_m\hat{e}_m)\\
&= \frac{1}{g_1g_2g_3}[\frac{\partial(g_2g_3A_1)}{\partial\mu_1}+\frac{\partial(g_3g_1A_2)}{\partial\mu_2}+\frac{\partial(g_1g_2A_3)}{\partial\mu_3}] && (3.41)
\end{aligned}$$

旋度：

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{A} &= \nabla\times(A_m\hat{e}_m)\\ &= \frac{1}{g_1g_2g_3}\begin{vmatrix} g_1\hat{e}_1 & g_2\hat{e}_2 & g_3\hat{e}_3\\ \frac{\partial}{\partial\mu_1} & \frac{\partial}{\partial\mu_2} & \frac{\partial}{\partial\mu_3}\\ g_1A_1 & g_2A_2 & g_3A_3\end{vmatrix} \qquad (3.42)\end{aligned}$$

Eq.(3.41,3.42)的证明留给大家。
(提示：需要用到Eq.(3.35,3.36,3.37)。)

3.5 积分

曲线积分：

$$\int_{\mathbf{a}\mathcal{P}}^{\mathbf{b}}(\nabla T)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}=T(\mathbf{b})-T(\mathbf{a}) \qquad (3.43)$$

高斯定理：

$$\int_{\mathcal{V}}(\nabla\cdot\vec{v})\mathrm{d}\tau=\oint_{\mathcal{S}}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{a} \qquad (3.44)$$

斯托克斯定理：

$$\int_{\mathcal{S}}(\nabla\times\vec{v})\cdot\mathrm{d}\vec{a}=\oint_{\mathcal{P}}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} \qquad (3.45)$$

3.6 举例：球坐标系

坐标变换：

$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\phi\\ y &= r\sin\theta\sin\phi\\ z &= r\cos\theta\end{cases} \qquad (3.46)$$

易求得：

$$\begin{cases} g_1 &= 1\\ g_2 &= r\\ g_3 &= r\sin\theta\end{cases} \qquad (3.47)$$

将Eq.(3.47)代入Eq.(3.29,3.41,3.42)可得：

$$\nabla T=\frac{\partial T}{\partial r}\hat{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta}\hat{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial\phi}\hat{e}_\phi \qquad (3.48)$$

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\Big[\sin\theta\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r}+r\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta}+r\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\Big] \qquad (3.49)$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\Big[\frac{\partial(A_\phi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\Big]\hat{e}_r+\frac{1}{r}\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\Big]\hat{e}_\theta\\ &\quad+\frac{1}{r}\Big[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\Big]\hat{e}_\phi \qquad (3.50)\end{aligned}$$

下面我们来计算$\vec{v}=\frac{1}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}$的散度：
a)当$\vec{r}\neq 0$时，

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{v} &= \frac{1}{4\pi}[(\nabla\frac{1}{r^3})\cdot\vec{r}+\frac{1}{r^3}(\nabla\cdot\vec{r})] \qquad (3.51)\\ &= \frac{1}{4\pi}(-\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^3})=0 \qquad (3.52)\end{aligned}$$

b)当$\vec{r}=0$时，取球心为原点，半径为η的球形邻域$\Delta\mathcal{V}$，则

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{v} &\equiv \frac{1}{4\pi}\lim_{\Delta\mathcal{V}\longrightarrow 0}\frac{\oint_{\Delta\mathcal{S}}\vec{n}\cdot\vec{v}\mathrm{d}\sigma}{\Delta\mathcal{V}} \quad (3.53)\\ &= \frac{1}{4\pi}\lim_{\eta\longrightarrow 0^+}\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta(r^2\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\hat{e}_r)}{\frac{4}{3}\pi\eta^3}\\ &= \frac{1}{4\pi}\lim_{\eta\longrightarrow 0^+}\frac{3}{\eta^3}=+\infty \quad (3.54)\end{aligned}$$

若考虑球形邻域$\Delta\mathcal{V}$内的积分：

$$\begin{aligned}\int_{\Delta\mathcal{V}}\nabla\cdot\vec{v}\mathrm{d}\tau &= \oint_{\Delta\mathcal{S}}\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}\sigma\\ &= \oint_{\Delta\mathcal{S}}\frac{1}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\hat{e}_r\mathrm{d}\Omega\\ &= 1 \quad (3.55)\end{aligned}$$

因此我们定义：

$$\delta(\vec{r})\equiv\nabla\cdot\vec{v}=\frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} \quad (3.56)$$

称之为**Dirac Delta函数**。满足：

$$\delta(\vec{r})=\begin{cases}0 & \vec{r}\neq 0\\ +\infty & \vec{r}=0\end{cases} \quad (3.57)$$

$$\int\delta(\vec{r})\mathrm{d}\tau=1 \quad (3.58)$$

类似我们可以求出柱坐标系下的∇算符的Eq.(3.48,3.49,3.50)。

4 势定理

4.1 标量势存在定理

对于**无旋场**$\vec{F}$(Curl-less or irrotational fields)，下面说法等价：
(a) 场的旋度处处为零，即$\nabla\times\vec{F}=0$；
(b) $\int_{\mathbf{a}\mathcal{P}}^{\mathbf{b}}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$的值与积分路径$\mathcal{P}$无关；
(c) 对任意闭合路径$\oint_{\mathbf{a}\mathcal{P}}^{\mathbf{b}}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}=0$;
(d) $\vec{F}$可以表示为某标量函数的梯度，即$\vec{F}=-\nabla V$，其中V称为标（量）势。
注意：标量势不唯一，可以差一常数。
在物理上，比如说漩涡、电场。

4.2 矢量势存在定理

对于**无散场**$\vec{F}$(Divergence-less or solenoidal fields)，下面说法等价：
(a) 场的散度处处为零，即$\nabla\cdot\vec{F}=0$;
(b) 给定积分表面$\mathcal{S}$的边界线，面积分值$\int_{\mathcal{S}}\vec{F}\cdot\hat{n}\mathrm{d}\sigma$与积分表面$\mathcal{S}$无关；
(c) 对任意闭合曲面$\oint\vec{F}\cdot\hat{n}\mathrm{d}\sigma=0$;
(d) $\vec{F}$可以表示为某矢量函数的旋度，即$\vec{F}=\nabla\times\vec{A}$，其中$\vec{A}$称为矢（量）势。
注意：矢量势不唯一，可以差一标量函数的梯度∇V。
在物理上，比如说水杯中旋转的水、磁场。