电动力学习题课（六）

Jun 12th, 2009

1 Example 1

如Fig1所示，一对半径为r_1和r_2的同轴导体构成了一个波导，其中$r \in (r_1, r_2)$的区域，$z < 0$的部分是真空，$z > 0$的部分是相对介电常数为ϵ_r的电介质，试求：
(a) 此波导中的TEM波模；
(b) 假如有一束TEM模电磁波从$-z$方向入射，求体系的反射系数和透射系数。

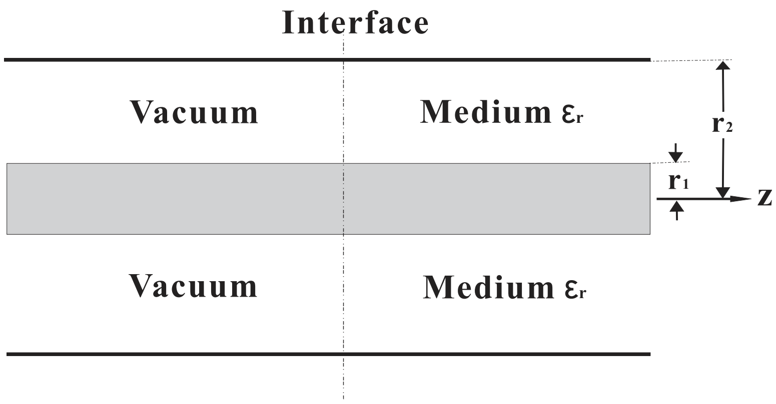

Figure 1: 例一示意图

解：(a) 先讨论$z > 0$的区域，由于考虑的是TEM模，即$E_z = B_z = 0$，故可设：

$$\vec{E}_2(\vec{r}, \omega) = \vec{E}_{\parallel}(x, y) \exp\{i(k_2 z - \omega t)\} \tag{1.1}$$
$$\vec{B}_2(\vec{r}, \omega) = \vec{B}_{\parallel}(x, y) \exp\{i(k_2 z - \omega t)\} \tag{1.2}$$

其中$\vec{E}_{\parallel}, \vec{B}_{\parallel}$表示电场和磁场在xy平面内，

$$(k_2)^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot \epsilon_r \tag{1.3}$$

那么[1]

$$\nabla \cdot \vec{E}_2(\vec{r}, \omega) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{E}_{\parallel}(x, y) = 0 \tag{1.4}$$
$$\nabla \times \vec{E}_2(\vec{r}, \omega) = i\omega \vec{B}_2(\vec{r}, \omega) \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{E}_{\parallel}(x, y) = 0 \tag{1.5}$$

[1] 柱坐标(ρ, ϕ, z)下，

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{A} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\nabla \times \vec{A} &= \hat{e}_\rho\Big(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\Big) + \hat{e}_\phi\Big(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\Big) + \hat{e}_z\frac{1}{\rho}\Big(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\Big) \\
\nabla \psi &= \hat{e}_\rho\frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \hat{e}_\phi\frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \hat{e}_z\frac{\partial \psi}{\partial z}
\end{aligned}$$

由Eq.(1.5)知，可以引入一标量函数φ，有

$$\vec{E}_{\parallel} = \nabla\varphi \tag{1.6}$$

联立Eq.(1.6,1.4)得：

$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{1.7}$$

Eq.(1.7)是泊松方程，其解为：

$$\varphi = \mathrm{C}_2 \ln r + \mathrm{D} \tag{1.8}$$

那么

$$\vec{E}_2 = \hat{e}_\rho \frac{\mathrm{C}_2}{r} \exp\{i(k_2 z - \omega t)\} \tag{1.9}$$

进而

$$\vec{B}_2 = \frac{1}{\omega}\vec{k}_2 \times \vec{E}_2 = \hat{e}_\phi \frac{\mathrm{C}_2\sqrt{\epsilon_r}}{rc} \exp\{i(k_2 z - \omega t)\} \tag{1.10}$$

其中C_2是一常数，c是光速。Eq.(1.9,1.10)就是此波导$z > 0$区域的TEM模式的电磁场，类似可求出波导$z < 0$区域的TEM模式的电磁场：

$$\vec{E}_1 = \hat{e}_\rho \frac{\mathrm{C}_1}{r} \exp\{i(k_1 z - \omega t)\} \tag{1.11}$$

$$\vec{B}_1 = \hat{e}_\phi \frac{\mathrm{C}_1}{rc} \exp\{i(k_1 z - \omega t)\} \tag{1.12}$$

其中C_1是一常数，c是光速，$k_1 = \omega/c$。

(b) 现有一束TEM模式的电磁波从真空入射到交界面$z = 0$，不妨假设反射波和透射波还是TEM模式，那么入射波用Eq.(1.11,1.12)来表示，透射波用Eq.(1.9,1.10)来表示，反射波记为：

$$\vec{E}_r = \hat{e}_\rho \frac{\mathrm{C}_3}{r} \exp\{-i(k_1 z + \omega t)\} \tag{1.13}$$

$$\vec{B}_r = -\hat{e}_\phi \frac{\mathrm{C}_3}{rc} \exp\{-i(k_1 z + \omega t)\} \tag{1.14}$$

然后根据E,H场的切向分量连续，可得：

$$\frac{\mathrm{C}_1}{r} + \frac{\mathrm{C}_3}{r} = \frac{\mathrm{C}_2}{r} \tag{1.15}$$

$$\frac{\mathrm{C}_1}{rc} - \frac{\mathrm{C}_3}{rc} = \frac{\mathrm{C}_2\sqrt{\epsilon_r}}{rc} \tag{1.16}$$

解Eq.(1.15,1.16)可得：

$$\mathrm{C}_2 = \frac{2}{1+\sqrt{\epsilon_r}}\mathrm{C}_1 \tag{1.17}$$

$$\mathrm{C}_3 = \frac{1-\sqrt{\epsilon_r}}{1+\sqrt{\epsilon_r}}\mathrm{C}_1 \tag{1.18}$$

那么反射系数R和透射系数T为：

$$\mathrm{R} = \left|\frac{\mathrm{C}_3}{\mathrm{C}_1}\right|^2 = \left(\frac{1-\sqrt{\epsilon_r}}{1+\sqrt{\epsilon_r}}\right)^2 \tag{1.19}$$

$$\mathrm{T} = \left|\frac{\mathrm{C}_2}{\mathrm{C}_1}\right|^2 \cdot \sqrt{\epsilon_r} = \frac{4\sqrt{\epsilon_r}}{(1+\sqrt{\epsilon_r})^2} \tag{1.20}$$

讨论：

1) 试通过边界条件确定$\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3$。

2) 题(b)的解答中假定了反射波和透射波都是TEM波，能否证明？

3) 一般的圆柱形、矩形波导都是不支持TEM模的，而此题的同轴电缆支持TEM模，实际上可以证明：金属封闭单连通截面波导不支持TEM模式的电磁波，试证明之并思考物理上的理解。

2 Example 2

如Fig2所示，空间有一无穷长带电导线，电荷线密度为λ，原来静止，后突然以恒定速率v沿着z轴正向运动，求空间P点$(x_0,0,0)$的磁场。

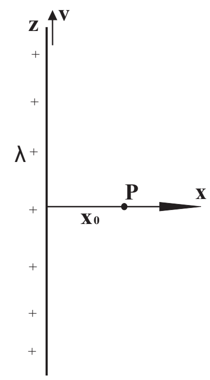

Figure 2: 例二示意图

解：根据题意，电流分布为：

$$\vec{j}(\vec{r},t)=\lambda v\delta(x)\delta(y)\theta(t)\hat{z} \tag{2.1}$$

其中$\theta(t)$为阶跃函数。那么P点的失势$\vec{A}$：

$$\begin{aligned}
\vec{A}_P(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}',t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}\vec{r}' && (2.2)\\
&= \hat{z}\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\lambda v\delta(x')\delta(y')\theta(t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}\vec{r}'\\
&= \hat{z}\frac{\mu_0\lambda v}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\theta(t-\frac{1}{c}\sqrt{x_0^2+z'^2})}{\sqrt{x_0^2+z'^2}}\mathrm{d}z' && (2.3)
\end{aligned}$$

a) 如果$t<x_0/c$，则

$$\vec{A}_P=0 \tag{2.4}$$

b) 如果$t>x_0/c$，则[2]

$$\begin{aligned}
\vec{A}_P(\vec{r},t) &= \hat{z}\frac{\mu_0\lambda v}{4\pi}\int_{-\sqrt{(ct)^2-x_0^2}}^{+\sqrt{(ct)^2-x_0^2}}\frac{1}{\sqrt{x_0^2+z'^2}}\mathrm{d}z' && (2.5)\\
&= \hat{z}\frac{\mu_0\lambda v}{4\pi}\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-(\frac{x_0}{ct})^2}}{1-\sqrt{1-(\frac{x_0}{ct})^2}}\right| && (2.6)
\end{aligned}$$

进一步，P点的磁场可以得到：
a) 如果$t<x_0/c$，则

$$\vec{B}_P=0 \tag{2.7}$$

[2]积分公式：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right|$$

b) 如果$t > x_0/c$，则

$$\vec{B}_P = (\nabla \times \vec{A})_P = -\Big(\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\Big)\Big|_P \hat{\phi} \tag{2.8}$$
$$= \hat{\phi}\,\frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi}\,\frac{1}{x_0\sqrt{1-(\frac{x_0}{ct})^2}} \tag{2.9}$$

根据Eq.(2.7,2.9)可得到下图：

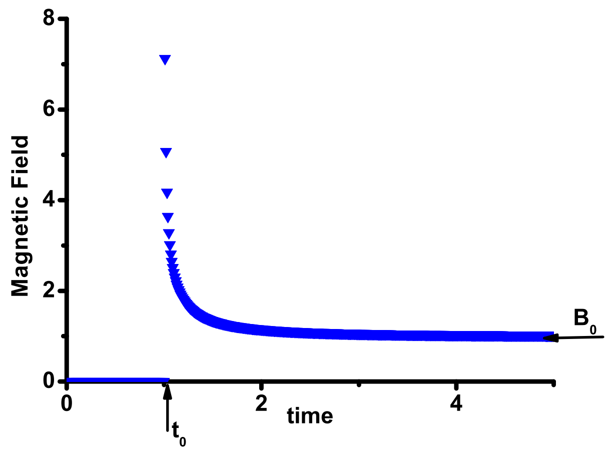

Figure 3: P点磁场随时间变化的关系图，其中$t_0 \equiv x_0/c, B_0 \equiv \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi x_0}$.

很明显，上图有三个区间：

- $t < t_0$，磁场为0，但是存在一定的推迟时间；
- $t \approx t_0$，磁场发散，思考为什么？
- $t \gg t_0$，磁场近似为静磁场：

$$\vec{B}_P \to \hat{\phi}\frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi x_0} = \hat{\phi}\frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi x_0} \equiv \vec{B}_0 \tag{2.10}$$

和安培定律的结果一致。

讨论：
1) 思考开关时间的物理意义，可参考Phys. Rev. B **74**, 045123 (2006)。
2) 试计算P点的电场强度和能流密度，进而算出辐射出去的能量，思考此能量的来源。

3 Example 3

(教材P281)若空间中的电磁场在静止坐标系S中可表示为$(\vec{E},\vec{B})$，在以速度$\vec{v}$的运动坐标系$\mathbb{S}$中可表示为$(\vec{\mathbb{E}},\vec{\mathbb{B}})$，求证：$(\vec{E},\vec{B})$和$(\vec{\mathbb{E}},\vec{\mathbb{B}})$的变换关系为

$$\vec{\mathbb{E}}_\parallel = \vec{E}_\parallel \tag{3.1}$$
$$\vec{\mathbb{E}}_\perp = \gamma(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})_\perp \tag{3.2}$$
$$\vec{\mathbb{B}}_\parallel = \vec{B}_\parallel \tag{3.3}$$
$$\vec{\mathbb{B}}_\perp = \gamma(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E})_\perp \tag{3.4}$$

证：由于电磁场$(\vec{E},\vec{B})$构成二阶张量$F_{\mu\nu}$，故不同参考系之间的变换关系为：

$$\mathbb{F}'_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\beta}\alpha_{\nu\gamma}F_{\beta\gamma} \tag{3.5}$$

其中$\alpha_{\mu\beta}$为洛伦兹变换。Eq.(3.5)写成矩阵方程为：

$$\overleftrightarrow{\mathbb{F}'} = \vec{\alpha}\cdot\overleftrightarrow{\mathrm{F}}\cdot\vec{\alpha}^T \tag{3.6}$$

进而假定$\vec{v}$沿x方向，那么

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{B}_3 & -\mathbb{B}_2 & -i\mathbb{E}_1/c \\ -\mathbb{B}_3 & 0 & \mathbb{B}_1 & -i\mathbb{E}_2/c \\ \mathbb{B}_2 & -\mathbb{B}_1 & 0 & -i\mathbb{E}_3/c \\ i\mathbb{E}_1/c & i\mathbb{E}_2/c & i\mathbb{E}_3/c & 0 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1/c \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2/c \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3/c \\ iE_1/c & iE_2/c & iE_3/c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \gamma(B_3-\frac{v}{c^2}E_2) & -\gamma(B_2+\frac{v}{c^2}E_3) & -iE_1/c \\ -\gamma(B_3-\frac{v}{c^2}E_2) & 0 & B_1 & -i\gamma(E_2-vB_3)/c \\ \gamma(B_2+\frac{v}{c^2}E_3) & -B_1 & 0 & -i\gamma(E_3+vB_2)/c \\ iE_1/c & i\gamma(E_2-vB_3)/c & i\gamma(E_3+vB_2)/c & 0 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

写成具体分量形式：

$$\mathbb{B}_1 = B_1 \tag{3.10}$$
$$\mathbb{B}_2 = \gamma(B_2+\frac{v}{c^2}E_3) \tag{3.11}$$
$$\mathbb{B}_3 = \gamma(B_3-\frac{v}{c^2}E_2) \tag{3.12}$$
$$\mathbb{E}_1 = E_1 \tag{3.13}$$
$$\mathbb{E}_2 = \gamma(E_2-vB_3) \tag{3.14}$$
$$\mathbb{E}_3 = \gamma(E_3+vB_2) \tag{3.15}$$

一般来说，可以把矢量场按平行和垂直于相对运动速度的方向分解，则Eq.(3.10∼3.15)可写成：

$$\vec{\mathbb{E}}_\parallel = \vec{E}_\parallel \tag{3.16}$$
$$\vec{\mathbb{E}}_\perp = \gamma(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})_\perp \tag{3.17}$$
$$\vec{\mathbb{B}}_\parallel = \vec{B}_\parallel \tag{3.18}$$
$$\vec{\mathbb{B}}_\perp = \gamma(\vec{B}-\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E})_\perp \tag{3.19}$$

证毕。

4 Example 4

(教材P281)试求匀速运动点电荷的场。

解：设$\mathbb{S}$系的原点固定在点电荷q上，则该点电荷相对于$\mathbb{S}$是静止的, 其场为

$$\vec{\mathbb{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{r}'}{r'^3} \qquad \vec{\mathbb{B}} = 0 \tag{4.1}$$

再设S系为实验室参考系，$\mathbb{S}$系随着点电荷q相对于S系沿x轴以速度$\vec{v}$运动，则由上题的结论得S系中的场强：

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx'}{r'^3}, E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\gamma\frac{qy'}{r'^3}, E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\gamma\frac{qz'}{r'^3} \tag{4.2}$$

$$B_x = 0, B_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\gamma\frac{vqz'}{c^2r'^3}, B_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\gamma\frac{vqy'}{c^2r'^3}. \tag{4.3}$$

现在必须把$\vec{r}'$用S系中的坐标来表示，为此，设$t=0$时点电荷q正好与S系的原点重合，并且我们在这一时刻测量空间的场，于是，根据洛伦兹变换有

$$x' = \gamma x, y' = y, z' = z \tag{4.4}$$

所以，从$\mathbb{S}$系的原点到观察点的距离r'可表示成

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \gamma[x^2 + (\frac{y}{\gamma})^2 + (\frac{z}{\gamma})^2]^{1/2} \tag{4.5}$$

这样，S系中的电场强度为

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{r}}{\gamma^2[x^2 + (\frac{y}{\gamma})^2 + (\frac{z}{\gamma})^2]^{3/2}} && (4.6)\\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(1-\frac{v^2}{c^2})\vec{r}}{[(1-\frac{v^2}{c^2})r^2 + \frac{v^2}{c^2}x^2]^{3/2}} && (4.7)\\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(1-\frac{v^2}{c^2})\vec{r}}{[(1-\frac{v^2}{c^2})r^2 + (\frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{c})^2]^{3/2}} && (4.8)\\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(1-\beta^2)\vec{r}}{r^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} && (4.9)
\end{aligned}$$

式中θ是$\vec{r}$与$\vec{v}$的夹角。不难算出磁感应强度

$$\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E} \tag{4.10}$$

根据Eq.(4.9,4.10)知道匀速运动的点电荷场的特点是：

- 场分布不再是球对称的，而是与θ有关；
- 没有能流沿着径向方向辐射出去，而是在以电荷为中心的球面上流动；
- 虽然能量并不沿着$\vec{r}$方向辐射出去，但在实验室系看，能流仍在做定向流，只伴随着电荷一起运动。