电动力学习题课（五）

May 22th, 2009

1 Example 1

如Fig1所示，线密度为μ_1和μ_2的两根弦相连于$z = 0$，现有一列波从弦1入射，若忽略连接点质量，试求反射波和透射波的振幅和相位。

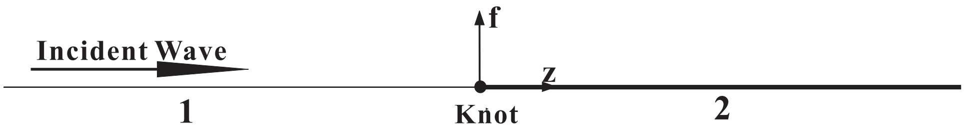

Figure 1: 例一示意图

解：1维绳波的运动方程为：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)f(z,t) = 0 \tag{1.1}$$

其中$f(z,t)$是位置为z处的弦在t时刻的横向位移，$v = \sqrt{T/\mu}$是波速。
取体系的试探解为：

$$f(z,t) = \begin{cases} A_I e^{i(k_1 z - \omega t)} + A_R e^{i(-k_1 z - \omega t)} & \text{for } z < 0 \\ A_T e^{i(k_2 z - \omega t)} & \text{for } z > 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

下面考虑边界条件，首先$f(z,t)$在$z = 0$处连续：

$$\lim_{z\to 0^-} f(z,t) = \lim_{z\to 0^+} f(z,t) \tag{1.3}$$

其次，如果忽略连接点的质量，$f(z,t)$的一阶导数在$z = 0$处也连续：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z\to 0^-} = \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z\to 0^+} \tag{1.4}$$

联立Eq.(1.2-1.4)：

$$A_I + A_R = A_T \tag{1.5}$$
$$k_1(A_I - A_R) = k_2 A_T \tag{1.6}$$

解得：

$$A_R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right) A_I \tag{1.7}$$
$$A_T = \left(\frac{2k_1}{k_1 + k_2}\right) A_I \tag{1.8}$$

又

$$k_1 v_1 = k_2 v_2 \tag{1.9}$$

故：

$$A_R = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}\right) A_I \tag{1.10}$$

$$A_T = \left(\frac{2v_2}{v_2 + v_1}\right) A_I \tag{1.11}$$

进一步假定：

$$A_I \equiv \mathbf{A}_I e^{i\delta_I} \qquad A_R \equiv \mathbf{A}_R e^{i\delta_R} \qquad A_T \equiv \mathbf{A}_T e^{i\delta_T} \tag{1.12}$$

Eq.(1.12)代入Eq.(1.10,1.11):

$$\left(\frac{\mathbf{A}_R}{\mathbf{A}_I}\right) e^{i(\delta_R - \delta_I)} = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \tag{1.13}$$

$$\left(\frac{\mathbf{A}_T}{\mathbf{A}_I}\right) e^{i(\delta_T - \delta_I)} = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} \tag{1.14}$$

- 若$\mu_1 > \mu_2$，即$v_1 < v_2$，那么

$$\sin(\delta_R - \delta_I) = 0 \quad \cos(\delta_R - \delta_I) > 0 \quad \Rightarrow \delta_R - \delta_I = 0 \tag{1.15}$$

$$\sin(\delta_T - \delta_I) = 0 \quad \cos(\delta_T - \delta_I) > 0 \quad \Rightarrow \delta_T - \delta_I = 0 \tag{1.16}$$

  即$\delta_I = \delta_R = \delta_T$，反射位相为0，故称无半波损失。
  物理上来说，经典力学中的金弦带着棉线振动，电动力学中的电磁波从光密介质到光疏介质，对应着这种情况。

- 若$\mu_1 < \mu_2$，即$v_1 > v_2$，那么

$$\sin(\delta_R - \delta_I) = 0 \quad \cos(\delta_R - \delta_I) < 0 \quad \Rightarrow \delta_R - \delta_I = -\pi \tag{1.17}$$

$$\sin(\delta_T - \delta_I) = 0 \quad \cos(\delta_T - \delta_I) > 0 \quad \Rightarrow \delta_T - \delta_I = 0 \tag{1.18}$$

  即$\delta_I = \delta_R + \pi = \delta_T$，反射位相为$\pi$，故称半波损失。
  物理上来说，经典力学中的棉线带着金弦振动，电动力学中的电磁波从光疏介质到光密介质，对应着这种情况。

讨论：
1) 根据Eq.(1.13,1.14)可以得到：

- 全反射：$v_2 = 0$，即$\mu_2 \to \infty$;
- 全透射：$v_2 = v_1$，即$\mu_2 = \mu_1$。

2) 若将弦2浸入一无穷大的粘滞流体中，粘滞阻力为：

$$\Delta F_{drag} = -\gamma \frac{\partial f}{\partial t} \Delta z \tag{1.19}$$

其中γ为粘滞系数，试求透射波的行为。

Answer:

$$f(z,t) = A e^{-\frac{\omega\gamma}{2k_2 T} z} e^{i(k_2 z - \omega t)} \tag{1.20}$$

3) 总结上题，对比经典绳波和电磁波的异同，并写出对应关系。

4) 进一步，考虑下面的体系：

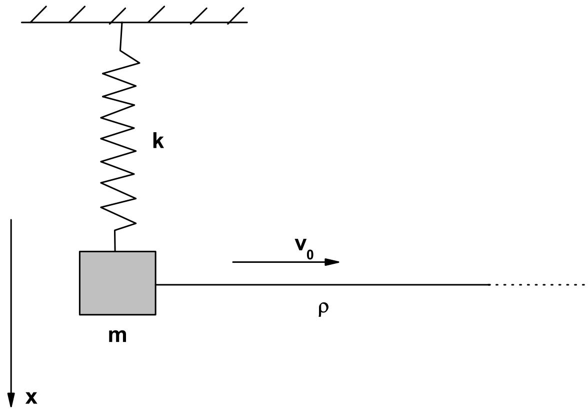

Figure 2: 示意图

质量为m的物体悬于弹性系数为k的弹簧一端，连着一根无穷长线密度为ρ的弦，试求此物体的振动行为（忽略重力）。

Answer: 体系的衰减常数为：

$$\beta = \frac{\rho v_0}{2m} \tag{1.21}$$

- 弱阻尼，即β小，物体仍在振荡：波速慢，弦质轻和物体重，比如说铁球系着棉线；
- 过阻尼，即β大，物体不振荡：波速快，弦质重和物体轻，比如说纸球系着铁线。

思考：这个例子对应电动力学中的什么体系？

2 Example 2

求证： 对于两种各向同性均匀介质的交界面，若入射电磁波是TE(TM)极化，则反射波和透射波也是TE(TM)极化。

证： 建立坐标系，取介质的交界面为xy平面。
考虑TE极化波，不妨设入射波电场$\vec{E}$沿y方向，波矢$\vec{k}$在xz平面内，即：

$$\vec{E} = E_i \hat{e}_i \exp\{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)\} \tag{2.1}$$

其中

$$\vec{k}_i = k_x \hat{x} + k_{zi} \hat{z} \tag{2.2}$$
$$\hat{e}_i = \hat{y} \tag{2.3}$$

$\hat{e}_i$为表示入射电场方向的单位矢量。类似可以写出反射波和透射波的电场$\vec{E}$：

$$\vec{k}_r = k_x \hat{x} + k_{zr} \hat{z} \tag{2.4}$$
$$\hat{e}_r = \sin\theta_r \cos\phi_r \hat{x} + \sin\theta_r \sin\phi_r \hat{y} + \cos\theta_r \hat{z} \tag{2.5}$$

$$\vec{k}_t = k_x \hat{x} + k_{zt} \hat{z} \tag{2.6}$$
$$\hat{e}_t = \sin\theta_t \cos\phi_t \hat{x} + \sin\theta_t \sin\phi_t \hat{y} + \cos\theta_t \hat{z} \tag{2.7}$$

然后写出$\vec{H}$场：

$$\vec{H}_i = \frac{1}{\omega\mu_1}\vec{k}_i \times \vec{E}_i \equiv \frac{E_i}{\omega\mu_1}\hat{h}_i \exp\{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)\} \tag{2.8}$$

其中

$$\hat{h}_i = \vec{k}_i \times \hat{e}_i = -k_{zi}\hat{x} + k_x\hat{z} \tag{2.9}$$

类似写出反射波和透射波的$\vec{H}$场：

$$\hat{h}_r = -k_{zr}\sin\theta_r\sin\phi_r\hat{x} + (k_{zr}\sin\theta_r\cos\phi_r - k_x\cos\theta_r)\hat{y} + k_x\sin\theta_r\sin\phi_r\hat{z} \tag{2.10}$$

$$\hat{h}_t = -k_{zt}\sin\theta_t\sin\phi_t\hat{x} + (k_{zt}\sin\theta_t\cos\phi_t - k_x\cos\theta_t)\hat{y} + k_x\sin\theta_t\sin\phi_t\hat{z} \tag{2.11}$$

下面考虑边界条件：

$$\vec{E}_1^{\parallel} = \vec{E}_2^{\parallel} \tag{2.12}$$

$$\vec{H}_1^{\parallel} = \vec{H}_2^{\parallel} \tag{2.13}$$

得到：

$$E_r\sin\theta_r\cos\phi_r = E_t\sin\theta_t\cos\phi_t \tag{2.14}$$

$$\frac{E_r}{\mu_1}(k_{zr}\sin\theta_r\cos\phi_r - k_x\cos\theta_r) = \frac{E_t}{\mu_2}(k_{zt}\sin\theta_t\cos\phi_t - k_x\cos\theta_t) \tag{2.15}$$

另外根据横波条件：

$$\vec{k}_r \cdot \vec{E}_r = \vec{k}_t \cdot \vec{E}_t = 0 \tag{2.16}$$

得到：

$$k_x\sin\theta_r\cos\phi_r + k_{zr}\cos\theta_r = 0 \tag{2.17}$$

$$k_x\sin\theta_t\cos\phi_t + k_{zt}\cos\theta_t = 0 \tag{2.18}$$

联立Eq.(2.14,2.17,2.18)得：

$$k_{zr}E_r\cos\theta_r = k_{zt}E_t\cos\theta_t \tag{2.19}$$

联立Eq.(2.15,2.17,2.18)得：

$$\frac{k_1^2}{\mu_1}E_r\cos\theta_r = \frac{k_2^2}{\mu_2}E_t\cos\theta_t \tag{2.20}$$

联立Eq.(2.19,2.20)得：

$$(\frac{k_1^2}{\mu_1}\frac{k_{zt}}{k_{zr}} - \frac{k_2^2}{\mu_2})E_t\cos\theta_t = 0 \tag{2.21}$$

那么

$$\cos\theta_t = 0 \Rightarrow \theta_t = \frac{\pi}{2} \tag{2.22}$$

进而

$$\theta_r = \theta_t = \phi_r = \phi_t = \frac{\pi}{2} \tag{2.23}$$

换言之

$$\hat{e}_r = \hat{e}_t = \hat{y} \tag{2.24}$$

即反射波和透射波都是TE极化。

讨论：
1) 类似TE极化的证明，给出TM极化的证明。
2) 证明中其实用到了材料是各向同性且均匀这个条件，思考为什么？

3 Example 3

如Fig3所示，空间中有厚度为h的一层膜置于另外一种背景材料中，现有一束电磁波从介质1入射到体系中，求结构的反射系数。

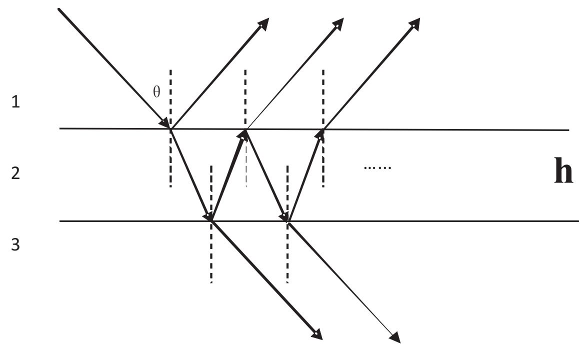

Figure 3: 例三示意图

解： 若光从介质i入射到介质i与j 的表面，记反射系数为r_{ij}, 透射系数为t_{ij}，类似地我们可以定义r_{ji}和t_{ji} (定义针对于逆光路)，那么我们可以通过Fresnel's Law 和能量守恒得到下面的两个关系：

$$t_{ij}t_{ji} - r_{ij}r_{ji} = 1 \tag{3.1}$$

$$r_{ij} = -r_{ji} \tag{3.2}$$

那么计及多次反射和透射我们可以写出该体系的反射系数（出射电场振幅与入射电场振幅之比）r:

$$\begin{aligned} r &= r_{12} + \sum_{n=1}^{+\infty} t_{21} r_{23}^{n} r_{21}^{n-1} t_{12} \exp(-i * 2nk_z h) \qquad (3.3)\\ &= r_{12} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} r_{23}^{n} r_{12}^{n-1} (1 - r_{12}^2) \exp(-i * 2nk_z h) \\ &= r_{23} \exp(-i * 2k_z h) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} r_{23}^{n-1} r_{12}^{n-1} \exp(-i * 2(n-1)k_z h) \\ &\quad + r_{12} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n} r_{23}^{n} r_{12}^{n} \exp(-i * 2nk_z h) \\ &= \frac{r_{12} + r_{23} \exp(-i * 2k_z h)}{1 + r_{12} r_{23} \exp(-i * 2k_z h)} \qquad (3.4) \end{aligned}$$

其中

$$k_z = \frac{\omega}{c} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta} \tag{3.5}$$

注：推导中利用了下面的级数展开

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}\bigg|_{x=0} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n n! (1+x)^{-(1+n)}\bigg|_{x=0} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \tag{3.6}$$

讨论：
1) 根据Eq.(3.4)，思考是否在某些条件下体系是全反射或者全透射？
2) 这里的推导默认入射波是平面波，而实际中大部分光源是激光，因此如果将入射波改为高斯光束，结果如何？