

电动力学学习题课（四）

Apr 28th, 2009

1 Example 1

如Fig(1)所示, (a) 课件十五讲第3页;
(b) 课件十三讲选做题。

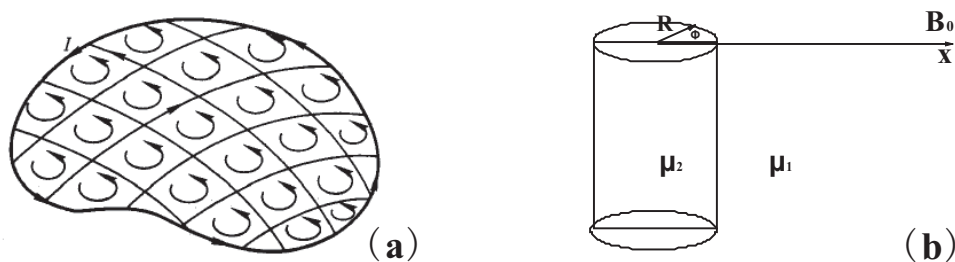


Figure 1: 例一示意图

解: 我们将严格解和等效解两种方法来求解此题。

(a) §严格解

根据Biot-Savart定律:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{P}} I d\vec{\ell}' \times \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \quad (1.1)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} (d\vec{S}' \times \nabla') \times \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \quad (1.2)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} (d\vec{S}' \times \nabla) \times \left(\frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} \right) \quad (1.3)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \left\{ \nabla \left(\frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} \cdot d\vec{S}' \right) - \left(\nabla \cdot \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} \right) d\vec{S}' \right\} \quad (1.3)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \left\{ \int_{\mathcal{S}} \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} \cdot d\vec{S}' \right\} \quad (1.4)$$

其中Eq.(1.2)和Eq.(1.3)应用了公式:

$$\oint_{\mathcal{P}} d\vec{\ell} \times \vec{A} = \int_{\mathcal{S}} (d\vec{S} \times \nabla) \times \vec{A} \quad (1.5)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{B}(\vec{C} \cdot \vec{A}) - \vec{A}(\vec{C} \cdot \vec{B}) \quad (1.6)$$

下面来考虑立体角，根据定义：

$$\Omega = \int d\Omega = \int_s \frac{d\vec{S} \cdot \vec{R}}{R^3} \quad (1.7)$$

$$= \int_s \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot d\vec{S}' \quad (1.8)$$

联立Eq.(1.4)和Eq.(1.8)：

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \Omega \quad (1.9)$$

§等效解 详细过程参见课件，基本思想如图(1a)所示，把整个电流回路等效成一系列微小电路回路的叠加，然后利用磁标势方法得到总磁场。很明显，两种方法的结果一致。

(b) §严格解 详细过程参见课件十三讲的例3，思路就是严格求解泊松方程。

§等效解 下面给出两种方法：

1. (3维磁偶极子等效)根据严格解的结果，可以算出介质的表面磁化线电流密度：

$$\vec{\alpha} = \hat{e}_z \alpha_0 \sin \phi \quad (1.10)$$

其中

$$\alpha_0 = 2B_0 \frac{1}{\mu_1} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \quad (1.11)$$

基于Eq.(1.10)所示的电流分布，可做如下等效：

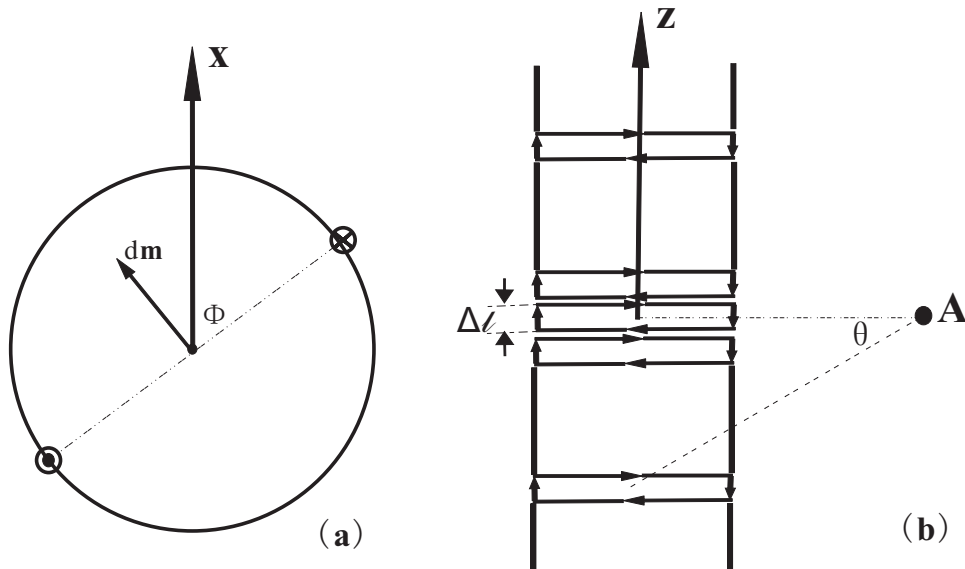


Figure 2: 等效原理图1

那么高度为 $\Delta\ell$ 的扁平盒所对应的磁偶极子为：

$$\Delta\vec{m} = \int d\vec{m} = \int_0^\pi \alpha_0 \sin \phi R d\phi \cdot 2R\Delta\ell (\sin \phi \hat{e}_x - \cos \phi \hat{e}_y) \quad (1.12)$$

$$= \hat{e}_x \pi R^2 \alpha_0 \Delta\ell \quad (1.13)$$

进一步磁化强度为：

$$\vec{M} \equiv \frac{\vec{m}}{V} = 2B_0 \frac{1}{\mu_1} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \hat{e}_x \quad (1.14)$$

2. (2维偶极子等效)关于2维磁偶极子的定义参看教材P141习题5.3。等效方法如下:

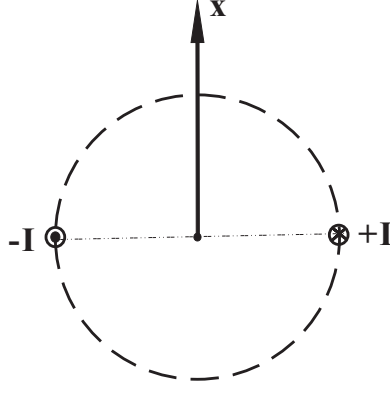


Figure 3: 等效原理图2

即用yz平面内的两条无穷长直导线代替介质表面磁化电流对空间磁场的贡献。2维磁偶极子的矢势为:

$$\vec{A} = \hat{e}_z \frac{\mu_1 I}{4\pi} \ln \frac{r^2 + 2rR \sin \phi}{r^2 - 2rR \sin \phi} \quad (1.15)$$

$$= \hat{e}_z \frac{\mu_1 I}{4\pi} \ln \left(1 + \frac{4rR \sin \phi}{r^2 - 2rR \sin \phi} \right)$$

$$\approx \hat{e}_z \frac{\mu_1 I}{4\pi} \frac{4R \sin \phi}{r} \quad (1.16)$$

$$= \hat{e}_z \frac{\mu_1 |\vec{m}_{2d}| \sin \phi}{2\pi r} \quad (1.17)$$

$$(1.18)$$

其中

$$\vec{m}_{2d} = \hat{e}_x I \cdot 2R \quad (1.19)$$

对比严格结果和Eq.(1.17), 得:

$$\vec{m}_{2d} = \hat{e}_x B_0 R^2 \frac{2\pi \mu_2 - \mu_1}{\mu_1 \mu_2 + \mu_1} \quad (1.20)$$

进一步磁化强度为:

$$\vec{M} \equiv \frac{\vec{m}}{S} = 2B_0 \frac{1}{\mu_1} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \hat{e}_x \quad (1.21)$$

Eq.(1.14)和Eq.(1.21)得到的结果一致, 即这两种等效方法是等价的。

那么下面来考虑圆柱内外的磁场和矢势(下面计算基于第一种等效方法)。

对于圆柱外A点, 其矢势为:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_1}{4\pi r^2} \int \Delta \vec{m} \times \hat{e}_r \quad (1.22)$$

$$= \frac{\mu_1}{4\pi r^2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \pi R^2 \alpha_0 r d\theta (\cos \theta \sin \phi \hat{e}_z - \sin \theta \hat{e}_y) \quad (1.23)$$

$$= B_0 R^2 \frac{\sin \phi}{r} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \hat{e}_z \quad (1.24)$$

Eq.(1.24)和课件上的结果一致。

再考虑圆柱体内部，对比严格解的结果可知：

$$\vec{B}_2 = \vec{B}_0 + \frac{1}{2}\mu_1\vec{M} \quad (1.25)$$

显然在横向外场条件下，无穷长柱的退极化因子是 $\frac{1}{2}$ 。

讨论：

- 1) 在纵向外场条件下，无穷长柱的退极化因子是多少？
- 2) 题(b)的等效解法实际上参考了严格解的结果，如果我们不知道严格解，该怎样用等效解法？
- 3) 这两道题是关于磁场等效解法的，对比以前的电场等效解法，有什么相同和不同之处？
- 4) 对比Eq.(1.25)和介质球的退极化电场：

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_0 - \frac{1}{3\epsilon_0}\vec{P} \quad (1.26)$$

我们会发现退极化场的符号一正一负，为什么？

2 Example 2

(磁像法) 无限大平面上下分别充满磁导率为 μ_1 和 μ_2 的均匀线性介质，在 μ_1 区距离界面为 a 的地方有一无限长且平行于界面的导线，电流为 I ，求空间磁场。

解：以介质分界面为 xy 平面，导线所在的平面簇中垂直于介质分界面的平面为 xz 平面，建立坐标系。

由于体系在 x 方向是平移不变的，因此只需考虑 yz 平面即可。类比电像法知：

- 对于 $z > 0$ 区，磁场强度等效为原导线 $\{I, (x, 0, a)\}$ 和像导线 $\{I', (x, 0, -a)\}$ 的叠加。
- 对于 $z < 0$ 区，磁场强度等效为像导线 $\{I'', (x, 0, a)\}$ 的贡献。

那么体系的磁场强度为：

$$z > 0 \quad \vec{H}_1 = \frac{I}{2\pi r}\hat{e}_1 + \frac{I'}{2\pi r}\hat{e}_2 \quad (2.1)$$

$$z < 0 \quad \vec{H}_2 = \frac{I''}{2\pi r}\hat{e}_1 \quad (2.2)$$

其中

$$\hat{e}_1 = \left(0, \frac{a - r \cos \theta}{r \sin \theta} A_1, A_1\right) \quad A_1 = \left\{1 + \frac{(a - r \cos \theta)^2}{r^2 \sin^2 \theta}\right\}^{-1/2} \quad (2.3)$$

$$\hat{e}_2 = \left(0, -\frac{a + r \cos \theta}{r \sin \theta} A_2, A_2\right) \quad A_2 = \left\{1 + \frac{(a + r \cos \theta)^2}{r^2 \sin^2 \theta}\right\}^{-1/2} \quad (2.4)$$

下面来匹配边界条件：在 $z = 0$ ，即 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，有

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \quad (2.5)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (2.6)$$

联立Eq.(2.1,2.2,2.5,2.6)得：

$$\begin{cases} I - I' = I'' \\ \mu_1(I + I') = \mu_2 I'' \end{cases} \quad (2.7)$$

解得：

$$I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I \quad (2.8)$$

$$I'' = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I \quad (2.9)$$

讨论：

- 1) 讨论 I, I' 和 I'' 方向的关系。
- 2) 若界面为PMC和真空的交界面，求出此时的像电流并与电像法比较。
- 3) 综合例1和例2，电介质与磁介质之间有什么异同？

3 Example 3

在准静态近似下，考虑下面的问题：

- (a) 类比电容系数 C_{ij} ，引入电感系数 L_{ij} ；
- (b) 如Fig(3)所示，电源为 $V_0 e^{-i\omega t}$ ，求这两个电路中的电流。

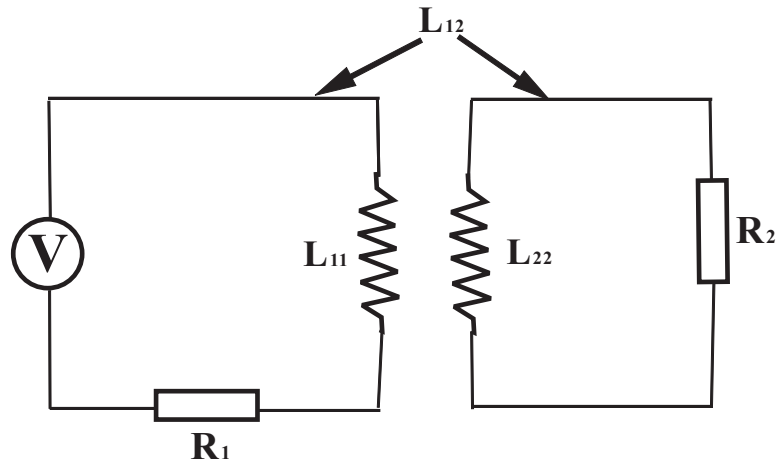


Figure 4: 例三示意图

解：(a) 考虑空间有 n 个电流回路，在准静态近似下，第 k 个回路满足：

$$I_k R_k = (V_e)_k - \frac{d\Phi_k}{dt} \quad (3.1)$$

其中 Φ_k 表示第 k 个回路的磁通量，可以由第 k 个回路本身的磁场带来，也可以通过别的回路在第 k 个回路处的磁场带来。因此类比电容系数，定义电感系数：

$$\Phi_k \equiv \sum_{i=1}^n L_{ki} I_i = L_{ki} I_i \quad (3.2)$$

很明显， L_{ii} 是自感系数， $L_{ij} (i \neq j)$ 是互感系数，可以证明 $L_{ij} = L_{ji}$ (不是易证)。Eq.(3.2)代入Eq.(3.1)得：

$$I_k R_k + L_{ki} \frac{dI_i}{dt} = (V_e)_k \quad (3.3)$$

Eq.(3.3)就是电工学中的基本方程。

(b) 根据Eq.(3.3):

$$I_1 R_1 + L_{11} \dot{I}_1 + L_{12} \dot{I}_2 = V_0 e^{-i\omega t} \quad (3.4)$$

$$I_2 R_2 + L_{22} \dot{I}_2 + L_{21} \dot{I}_1 = 0 \quad (3.5)$$

设

$$I_1 = i_1 e^{-i\omega t} \quad I_2 = i_2 e^{-i\omega t} \quad (3.6)$$

Eq.(3.6)代入Eq.(3.4)和Eq.(3.5)得:

$$i_1 R_1 - i\omega L_{11} i_1 - i\omega L_{12} i_2 = V_0 \quad (3.7)$$

$$i_2 R_2 - i\omega L_{22} i_2 - i\omega L_{21} i_1 = 0 \quad (3.8)$$

令

$$Z_1 = R_1 - i\omega L_{11} \quad Z_2 = R_2 - i\omega L_{22} \quad t = -i\omega L_{12} = -i\omega L_{21} \quad (3.9)$$

则Eq.(3.7)和Eq.(3.8)化为:

$$i_1 Z_1 + i_2 t = V_0 \quad (3.10)$$

$$i_1 t + i_2 Z_2 = 0 \quad (3.11)$$

解得:

$$i_1 = -\frac{Z_2}{t^2 - Z_1 Z_2} V_0 \quad i_2 = \frac{t}{t^2 - Z_1 Z_2} V_0 \quad (3.12)$$

进一步得到:

$$\frac{i_2}{i_1} = -\frac{t}{Z_2} = \frac{i\omega L_{12}}{R_2 - i\omega L_{22}} = \frac{-\omega^2 L_{12} L_{22} + i\omega L_{12} R_2}{R_2^2 + \omega^2 L_{22}^2} \quad (3.13)$$

即:

$$\left| \frac{i_2}{i_1} \right| = \frac{\omega L_{12}}{\sqrt{R_2^2 + \omega^2 L_{22}^2}} \quad (3.14)$$

$$\arg\left(\frac{i_2}{i_1}\right) = \arctan\left(-\frac{R_2}{\omega L_{22}}\right) \quad (3.15)$$

显然, 两电路的耦合越大, 即 L_{12} 越大, 电路2中的电流越大。

讨论:

- 1) 为什么说Eq.(3.1)是准静态近似下成立的?
- 2) 考虑Eq.(3.13)的几种极限情况并讨论之。