电动力学习题课（七）

Jun 16th, 2009

1 Example 1

有一个电量为q的粒子处在直角坐标系xyz的原点，空间中存在电场$\vec{E} = E_0\hat{z}$和磁场$\vec{B} = B_0\hat{x}$ $(E_0 < cB_0)$，然后释放粒子，求粒子的运动轨迹。

分析：此题可以完全通过粒子的运动方程来求解，但是这里我们换种思路：先找到一个运动坐标系$\mathbb{S}$，使得在$\mathbb{S}$中电场$\vec{\mathbb{E}} = 0$，只有磁场，然后在$\mathbb{S}$中求出粒子的运动轨迹，最后再换回静止坐标系S中得到原坐标系下粒子的运动轨迹。

解：在静止坐标系S中，电场$\vec{E} = (0, 0, E_0)$和磁场$\vec{B} = (B_0, 0, 0)$，粒子的初始位置$\vec{r} = (0, 0, 0)$和初始速度$\vec{s} = (0, 0, 0)$。

现考虑沿$+y$轴以速率v运动的坐标系$\mathbb{S}$，在$\mathbb{S}$中电场为：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x &= \gamma[E_x + (\vec{v}\times\vec{B})_x] = 0 && (1.1)\\
\mathbb{E}_y &= E_y = 0 && (1.2)\\
\mathbb{E}_z &= \gamma[E_z + (\vec{v}\times\vec{B})_z] = \gamma(E_0 - vB_0) && (1.3)
\end{aligned}$$

要求$\vec{\mathbb{E}} = 0$得：

$$\gamma(E_0 - vB_0) = 0 \Rightarrow v = \frac{E_0}{B_0} \tag{1.4}$$

进一步可得磁场：

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}_x &= \gamma[B_x - \frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E})_x] = \frac{1}{\gamma}B_0 && (1.5)\\
\mathbb{B}_y &= B_y = 0 && (1.6)\\
\mathbb{B}_z &= \gamma[B_z - \frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E})_z] = 0 && (1.7)
\end{aligned}$$

下面来计算粒子在$\mathbb{S}$中的初始位置

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= x = 0 && (1.8)\\
\mathbf{y} &= \gamma(y - vt) = 0 && (1.9)\\
\mathbf{z} &= z = 0 && (1.10)\\
\mathbf{t} &= \gamma(t - \frac{v}{c^2}y) = 0 && (1.11)
\end{aligned}$$

和速度

$$
\begin{aligned}
\mathbf{s}_x &= \frac{s_x}{\gamma(1-\frac{vs_y}{c^2})}=0 && (1.12)\\
\mathbf{s}_y &= \frac{s_y-v}{1-\frac{vs_y}{c^2}}=-v && (1.13)\\
\mathbf{s}_z &= \frac{s_z}{\gamma(1-\frac{vs_y}{c^2})}=0 && (1.14)
\end{aligned}
$$

即在$\mathbb{S}$中，电场$\vec{\mathbb{E}}=(0,0,0)$和磁场$\vec{\mathbb{B}}=(\frac{1}{\gamma}B_0,0,0)$，粒子的初始位置$\vec{\mathbf{r}}=(0,0,0)$和初始速度$\vec{\mathbf{s}}=(0,-v,0)$。

下面来考虑$\mathbb{S}$中粒子的运动，由于只有磁场，粒子运动轨迹为圆。

$$
\begin{aligned}
& F=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=p\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=p\frac{v}{R} && (1.15)\\
\Rightarrow\ & qv\mathbb{B}=\gamma mv\frac{v}{R}\\
\Rightarrow\ & R=\frac{\gamma mv}{q\mathbb{B}}=\frac{\gamma^2 mv}{qB_0} && (1.16)
\end{aligned}
$$

那么轨迹方程为：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} &= 0 && (1.17)\\
\mathbf{y} &= -R\sin\omega\mathbf{t} && (1.18)\\
\mathbf{z} &= R(1-\cos\omega\mathbf{t}) && (1.19)
\end{aligned}
$$

其中$\omega=v/R$。

接着把Eq.(1.17,1.18,1.19)换回静止坐标系S，即

$$
\begin{aligned}
x &= \mathbf{x}=0 && (1.20)\\
y &= \gamma(\mathbf{y}+v\mathbf{t})=\gamma\big\{-R\sin\big[\omega\gamma(t-\frac{v}{c^2}y)\big]+v\gamma(t-\frac{v}{c^2}y)\big\} && (1.21)\\
z &= \mathbf{z}=R\big[1-\cos\omega\gamma(t-\frac{v}{c^2}y)\big] && (1.22)
\end{aligned}
$$

根据Eq.(1.21)得：

$$
\begin{aligned}
y+\gamma^2\frac{v^2}{c^2}y &= \gamma\big\{v\gamma t-R\sin\big[\omega\gamma(t-\frac{v}{c^2}y)\big]\big\} && (1.23)\\
\gamma^2 y(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{v^2}{c^2}) &= \gamma\big\{v\gamma t-R\sin\big[\omega\gamma(t-\frac{v}{c^2}y)\big]\big\}\\
y &= vt-\frac{R}{\gamma}\sin\big[\omega\gamma(t-\frac{v}{c^2}y)\big] && (1.24)
\end{aligned}
$$

联立Eq.(1.20,1.22,1.24)得：

$$\gamma^2(y-vt)^2+(z-R)^2=R^2 \qquad (1.25)$$

Eq.(1.25)的轨迹是*elliptical cycloid*。

讨论：
1) 尝试用经典运动方程的方法求解此题；
2) 尝试变换到$\vec{\mathbb{B}}=0$的坐标系来求解此题；
3) 比较这三种解法的结果，思考为什么会有异同？

2 Example 2

(简答题，4') 一个长宽高分别为10mm, 10mm, 6mm的长方体谐振腔，试求其中最低频共振模式所对应的波长。假设激发此电磁谐振腔中的这个最低频模式，试问辐射出来的电磁波能否通过一个横截面为$4\text{mm}\times 4\text{mm}$的波导？为什么？

解：根据驻波条件：

$$k_x a = n\pi \quad k_y b = m\pi \quad k_z c = p\pi \tag{2.1}$$

其中n, m, p为整数，$a = 10\text{mm}, b = 10\text{mm}, c = 6\text{mm}$。进而

$$\omega \equiv 2\pi f \equiv ck = c\pi\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2} \tag{2.2}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{c}{f} = \frac{2}{\sqrt{(\frac{n}{a})^2 + (\frac{m}{b})^2 + (\frac{p}{c})^2}} \quad ---- \quad (1') \tag{2.3}$$

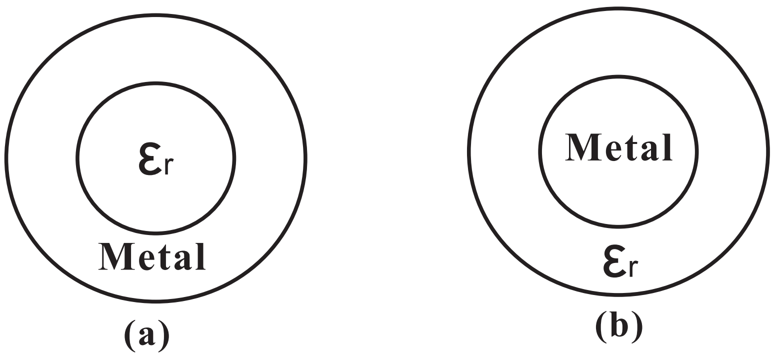
由于(m, n, p)只能有一个为0，故当$(mnp) = (110)$时，是最低频的共振模式，其波长为：

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{(\frac{1}{10})^2 + (\frac{1}{10})^2}} = 10\sqrt{2} = 14.14(\text{mm}) \quad ---- \quad (1') \tag{2.4}$$

而横截面为$4\text{mm}\times 4\text{mm}$的波导能通过的最大波长为8mm，$----\ (1')$
所以从谐振腔辐射的电磁波不能通过该波导，因为其频率在波导的截止频率以下。$----\ (1')$

3 Example 3

(16') 如图(a)所示，在一个半径为a的介电常数为ϵ_r的介质球外面包一层厚度为$(b-a)$的金属，将这宗半径为b的球体放置于均匀电场$E_0\hat{x}$中，求全空间的电势分布以及这个复合结构所带的有效电偶极距。若将电介质和金属位置互换，即由厚度为$(b-a)$的电介质层包裹半径为a的金属球，求此时这个结构所携带的有效电偶极距。



解：(a) 泊松方程：

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad ---- \quad (1') \tag{3.1}$$

边界条件：

$$\varphi\Big|_{r\to+\infty} = -E_0 r\cos\theta \quad ---- \quad (1') \tag{3.2}$$

$$\varphi\Big|_{r=b} = \varphi_0(\text{未知}) \quad ---- \quad (1') \tag{3.3}$$

$$\oint \frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=b}\cdot \mathrm{d}S = 0 \quad ---- \quad (1') \tag{3.4}$$

Eq.(3.1)在$r > b$区的通解为：

$$\varphi_{\text{out}} = A_0 + \frac{B_0}{r} + A_1 r\cos\theta + \frac{B_1\cos\theta}{r^2} \quad ---- \quad (1') \tag{3.5}$$

联立Eq.(3.2,3.5)：

$$A_0 + A_1 r\cos\theta = -E_0 r\cos\theta \tag{3.6}$$
$$\Rightarrow \quad A_0 = 0 \qquad A_1 = -E_0 \tag{3.7}$$

联立Eq.(3.3,3.5,3.7)：

$$\frac{B_0}{b} - E_0 b\cos\theta + \frac{B_1\cos\theta}{b^2} = \varphi_0 \tag{3.8}$$
$$\Rightarrow \quad B_1 = E_0 b^3 \tag{3.9}$$

联立Eq.(3.4,3.5,3.7,3.9)：

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} (-B_0 - 3E_0 b^2\cos\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta = -4\pi B_0 = 0 \tag{3.10}$$
$$\Rightarrow \quad B_0 = 0 \tag{3.11}$$

所以

$$\varphi = \begin{cases} 0 & r \le b \\ -E_0 r\cos\theta + \frac{E_0 b^3\cos\theta}{r^2} & r > b \end{cases} \quad ---- \quad (2') \tag{3.12}$$

而一个电偶极子的电势为：

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \tag{3.13}$$

对比Eq.(3.12,3.13)可知体系的等效电偶极距为：

$$\vec{p}_{\text{eff}} = 4\pi\epsilon_0 E_0 b^3 \hat{x} \quad ---- \quad (1') \tag{3.14}$$

(b) 泊松方程：

$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{3.15}$$

设通解为：

$$r < a \qquad \varphi_0 \quad \text{Const.} \tag{3.16}$$
$$a < r < b \qquad \varphi_1 = A_{10} + \frac{B_{10}}{r} + A_{11} r\cos\theta + \frac{B_{11}\cos\theta}{r^2} \tag{3.17}$$
$$r > b \qquad \varphi_2 = A_{20} + \frac{B_{20}}{r} + A_{21} r\cos\theta + \frac{B_{21}\cos\theta}{r^2} \tag{3.18}$$

边界条件为：

$$\varphi_2\Big|_{r\to+\infty} = -E_0 r\cos\theta \tag{3.19}$$
$$\varphi_1\Big|_{r\to b^-} = \varphi_2\Big|_{r\to b^+} \tag{3.20}$$
$$\epsilon_r \frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\Big|_{r\to b^-} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\Big|_{r\to b^+} \tag{3.21}$$
$$\varphi_1\Big|_{r\to a^+} = \varphi_0(\text{未知}) \tag{3.22}$$
$$\oint \frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\Big|_{r\to a^+} \cdot \mathrm{d}S = 0 \tag{3.23}$$

$$---- \quad (4')$$

联立通解和边界条件可解得：

$$A_{10} = B_{10} = A_{20} = B_{20} = 0 \tag{3.24}$$

$$A_{11} = -\frac{3E_0 b^3}{\epsilon_r(b^3+2a^3)+2(b^3-a^3)} \tag{3.25}$$

$$B_{11} = \frac{3E_0 a^3 b^3}{\epsilon_r(b^3+2a^3)+2(b^3-a^3)} \tag{3.26}$$

$$A_{21} = -E_0 \tag{3.27}$$

$$B_{21} = E_0 b^3\Big\{1-\frac{3(b^3-a^3)}{\epsilon_r(b^3+2a^3)+2(b^3-a^3)}\Big\} \tag{3.28}$$

$$----\quad (3')$$

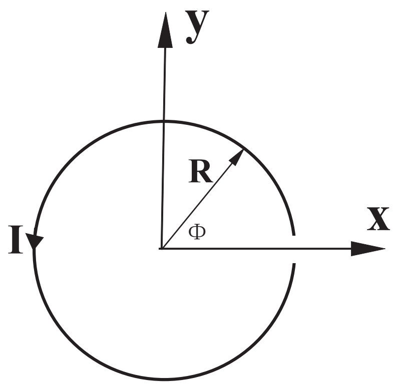
对比Eq.(3.18,3.13)可知体系的等效电偶极距为：

$$\vec{p}_{\text{eff}} = 4\pi\epsilon_0 B_{21}\hat{x} \tag{3.29}$$

$$= 4\pi\epsilon_0 E_0 b^3\Big\{1-\frac{3(b^3-a^3)}{\epsilon_r(b^3+2a^3)+2(b^3-a^3)}\Big\}\hat{x}\quad ----\quad (1') \tag{3.30}$$

4 Example 4

(14') 如下图所示，在xy平面圆心处放置一个半径为R的金属圆环，金属线的半径可以忽略，金属圆环在$\phi = 0$处断开了一个非常小的缝隙，其宽度可以忽略不计，这个结构就是著名的开口谐振环，是形成负折射介质的结构单元。假设在结构中流着频率为ω的交变电流，其分布为$\mathrm{I}(\phi) = \mathrm{I}_0(1-\cos\phi)e^{i\omega t}$，求这个共振结构所携带的电偶极距$\vec{p}$和磁偶极距$\vec{m}$，并计算这个结构在$\vec{r} = x\hat{e}_x$处的辐射场。



解：根据题意，电流分布为：

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \mathrm{I}_0(1-\cos\phi)e^{i\omega t}\hat{\phi} \tag{4.1}$$

其中

$$\hat{\phi} = -\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y} \tag{4.2}$$

那么磁偶极距为：

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,',t)\mathrm{d}\vec{r}\,' \quad ----\quad (1') \tag{4.3}$$

$$= \frac{1}{2}\int (R\hat{r}) \times [\mathrm{I}_0(1-\cos\phi')e^{i\omega t}\hat{\phi}]R\mathrm{d}\phi'$$

$$= \hat{z}\frac{\mathrm{I}_0 R^2}{2}e^{i\omega t}\int_0^{2\pi}(1-\cos\phi')\mathrm{d}\phi'$$

$$= \hat{z}\pi\mathrm{I}_0 R^2 e^{i\omega t} \quad ----\quad (2') \tag{4.4}$$

根据电荷守恒：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{j}=0 \tag{4.5}$$

$$\Rightarrow\quad i\omega\rho+\nabla\cdot\vec{j}=0 \tag{4.6}$$

$$\Rightarrow\quad \rho=-\frac{1}{i\omega}\nabla\cdot\vec{j}\quad ----\quad (2') \tag{4.7}$$

那么电偶极距为：

$$\begin{aligned}
\vec{p} &= \int\rho(\vec{r}\,')\vec{r}\,'\mathrm{d}\vec{r}\,' \quad ----\quad (1') && (4.8)\\
&= -\frac{1}{i\omega}\int(\nabla'\cdot\vec{j})\vec{r}\,'\mathrm{d}\vec{r}\,' && (4.9)\\
&= -\frac{1}{i\omega}\int(\frac{\mathrm{I}_0e^{i\omega t}}{R}\sin\phi')R(\cos\phi'\hat{x}+\sin\phi'\hat{y})R\mathrm{d}\phi'\\
&= -\hat{y}\frac{\pi\mathrm{I}_0Re^{i\omega t}}{i\omega}\quad ----\quad (2') && (4.10)
\end{aligned}$$

考虑远区辐射，先来计算$\vec{r}=x\hat{e}_x$处电偶极距辐射场：

$$\begin{aligned}
\vec{E}_p &= -\frac{\omega^2}{4\pi\epsilon_0c^2r}\,\hat{r}\times(\hat{r}\times[\,\vec{p}\,]) && (4.11)\\
&= -\hat{y}\,\frac{\omega^2\mathrm{I}_0R}{4\epsilon_0c^2x}\,\frac{\exp\{i\omega(t-\frac{x}{c})\}}{i\omega}\quad ----\quad (1') && (4.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{B}_p &= \frac{\omega^2\mu_0}{4\pi cr}\,\hat{r}\times[\,\vec{p}\,] && (4.13)\\
&= -\hat{z}\,\frac{\mu_0\omega^2\mathrm{I}_0R}{4cx}\,\frac{\exp\{i\omega(t-\frac{x}{c})\}}{i\omega}\quad ----\quad (1') && (4.14)
\end{aligned}$$

类似可算出$\vec{r}=x\hat{e}_x$处磁偶极距辐射场：

$$\begin{aligned}
\vec{E}_m &= -\frac{\omega^2}{4\pi\epsilon_0c^3r}\,\hat{r}\times[\,\vec{m}\,] && (4.15)\\
&= \hat{y}\,\frac{\omega^2\mathrm{I}_0R^2}{4\epsilon_0c^3x}\,\exp\{i\omega(t-\frac{x}{c})\}\quad ----\quad (1') && (4.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{B}_m &= -\frac{\omega^2\mu_0}{4\pi c^2r}\,\hat{r}\times(\hat{r}\times[\,\vec{m}\,]) && (4.17)\\
&= \hat{z}\,\frac{\mu_0\omega^2\mathrm{I}_0R^2}{4c^2x}\,\exp\{i\omega(t-\frac{x}{c})\}\quad ----\quad (1') && (4.18)
\end{aligned}$$

所以$\vec{r}=x\hat{e}_x$处总辐射场为：

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{\mathrm{total}} &= \hat{y}\exp\{i\omega(t-\frac{x}{c})\}\,\frac{\omega^2\mathrm{I}_0R}{4\epsilon_0c^2x}\Big(\frac{R}{c}-\frac{1}{i\omega}\Big)\quad ----\quad (1') && (4.19)\\
\vec{B}_{\mathrm{total}} &= \hat{z}\exp\{i\omega(t-\frac{x}{c})\}\,\frac{\mu_0\omega^2\mathrm{I}_0R}{4cx}\Big(\frac{R}{c}-\frac{1}{i\omega}\Big)\quad ----\quad (1') && (4.20)
\end{aligned}$$

讨论：
关于此结构的一般本征模解法可参考：
APL **90**, 041903 (2007).
PRB **77**, 235105 (2008).
JAP **104**, 034305 (2008).