电动力学习题课（三）

Apr 10th, 2009

1 Example 1

如Fig1所示，两个半径均为R的导体球相互接触形成一个孤立导体，求此体系的电容。

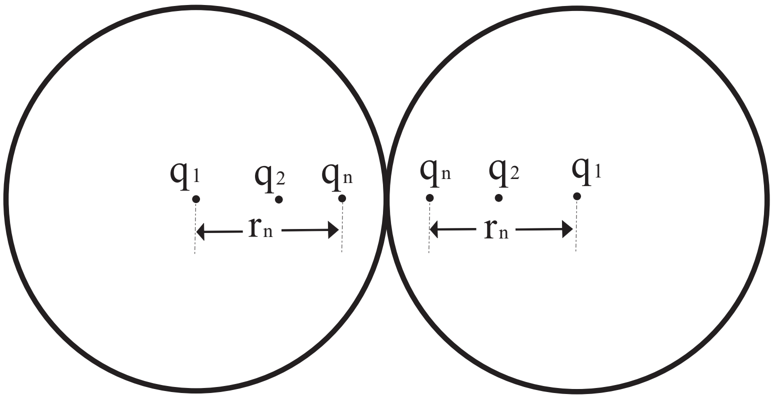

Figure 1: 例一示意图

解：假定系统的电势为U_0，那么计算出达到此电势所需充电的电量Q便可以求得电容C。

利用电像法，首先在两球的球心处置一对象电荷$q_1 = 4\pi\epsilon_0 R U_0$，它们使得各自球壳的电势为$U_0$，但是它们却会在相邻的球壳上产生附加电势，因此我们需要置第二对象电荷以消除q_1产生的附加电势：

$$q_2 = -\frac{R}{2R}q_1 = -\frac{1}{2}q_1 \qquad r_2 = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2} \tag{1.1}$$

其中q_2表示象电荷的电量，r_2表示象电荷离各自球心的距离。

这对象电荷q_2可以抵消q_1产生的附加电势，但是它们本身也会带来附加电势，因此我们还需引入第三对象电荷$\{q_3, r_3\}$，依次类推，我们需要无穷多对象电荷才能使得体系为等势体，而这些电荷总和即为导体上的总电量。根据上述原理，显然有：

$$q_n = -\frac{R}{2R - r_{n-1}} q_{n-1} \tag{1.2}$$

$$r_n = \frac{R^2}{2R - r_{n-1}} \tag{1.3}$$

进一步，Eq.(1.3)可化为：

$$\frac{1}{b_n} = 1 + \frac{1}{b_{n-1}} \tag{1.4}$$

其中

$$b_n = 1 - \frac{r_n}{R} \tag{1.5}$$

那么

$$r_n = (1 - \frac{1}{n})R \tag{1.6}$$

将Eq.(1.6)代入Eq.(1.2)可得

$$nq_n = -(n-1)q_{n-1} \tag{1.7}$$

那么

$$q_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} q_1 \tag{1.8}$$

因此总电量

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2q_n & (1.9) \\ &= 2q_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \\ &= 2q_1 \ln 2 & (1.10) \end{aligned}$$

故体系的电容为

$$C = \frac{Q}{U_0} = 8\pi\epsilon_0 R \ln 2 \tag{1.11}$$

讨论：
1）若体系是由两个圆柱形导体接触组成的孤立系统，其电容应该如何求出？为什么看上去相似的两个问题求解的差别非常大？
2）若两球不接触而是稍微分离，它们之间的作用力如何？
参考J.A.Soules, *Am. J. Phys.* **58**, 1195 (1990).

2 Example 2

如Fig2所示，两个无穷大接地的导体平面相互平行，距离为a，中间有一条无穷长且线密度为λ的均匀带电导线，它与导体平面平行，且距下导体为b，试求两导体平面之间的电势分布。

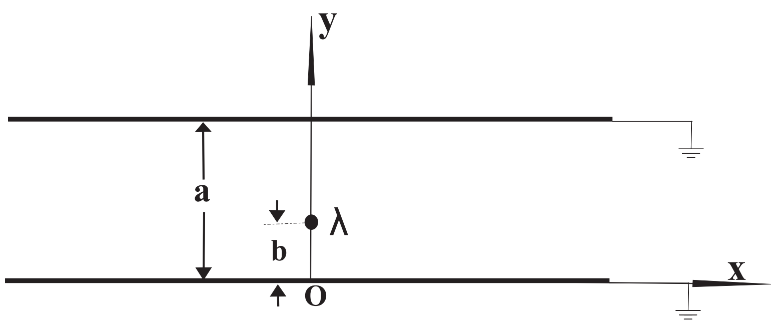

Figure 2: 例二示意图

解：首先建立如图所示的坐标系，那么电势φ满足

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\lambda}{\epsilon_0} \delta(x) \delta(y-b) \tag{2.1}$$

和边界条件：

$$\varphi = 0 \qquad y = 0, a \tag{2.2}$$
$$\varphi \to 0 \qquad x \to \pm\infty \tag{2.3}$$

考虑到电势φ与z无关，所以问题可简化为一个两维问题，先来考虑无源区

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{2.4}$$

用分离变量法

$$\varphi(x, y) = X(x)Y(y) \tag{2.5}$$

Eq.(2.5)代入Eq.(2.4)，可得

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = 0 \tag{2.6}$$

考虑到边界条件，显然

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = k^2 \qquad \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = -k^2 \tag{2.7}$$

进而

$$\varphi = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{-\frac{n\pi}{a}|x|} \sin(\frac{n\pi}{a} y) \tag{2.8}$$

为了确定C_n，必须考虑源。由Eq.(2.8)得：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\pi}{a} C_n e^{-\frac{n\pi}{a}|x|} \sin(\frac{n\pi}{a} y)[h(x) - h(-x)] \tag{2.9}$$

其中$h(x)$是阶跃函数。进一步计算可知

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\pi}{a} C_n e^{-\frac{n\pi}{a}|x|} \sin(\frac{n\pi}{a} y)[\frac{n\pi}{a} - 2\delta(x)] \tag{2.10}$$
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{n\pi}{a})^2 C_n e^{-\frac{n\pi}{a}|x|} \sin(\frac{n\pi}{a} y) \tag{2.11}$$

Eq.(2.10)和Eq.(2.11)代入Eq.(2.1):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n\pi}{a} C_n e^{-\frac{n\pi}{a}|x|} \sin(\frac{n\pi}{a} y)\delta(x) = \frac{\lambda}{\epsilon_0}\delta(x)\delta(y-b) \tag{2.12}$$

Eq.(2.12)两边同乘$\sin(\frac{m\pi}{a} y)$然后对x, y积分便可得：

$$C_n = \frac{\lambda}{n\pi\epsilon_0} \sin(\frac{n\pi}{a} b) \tag{2.13}$$

故板间的电势分布为：

$$\varphi = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(\frac{n\pi b}{a}) e^{-\frac{n\pi}{a}|x|} \sin(\frac{n\pi}{a} y) \tag{2.14}$$

讨论： 除了分离变量之外，能否用其他方法（保角变换法、电像法等）求解该问题？

3 Example 3

介电常数ϵ的均匀球壳，内外径分别为R, R'，将其放在均匀外电场$\vec{E}_0$中，求空间的电势分布。

解：约定

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1 & r > R' \\ \varphi_2 & R' > r > R \\ \varphi_3 & r < R \end{cases} \tag{3.1}$$

那么电势φ满足

$$\nabla^2 \varphi = 0 \tag{3.2}$$

和边界条件：

$$r \to \infty \qquad \varphi_1 \to -E_0 r \cos\theta \tag{3.3}$$

$$r = R' \qquad \varphi_1 = \varphi_2 \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \epsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \tag{3.4}$$

$$r = R \qquad \varphi_2 = \varphi_3 \qquad \epsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} \tag{3.5}$$

$$r = 0 \qquad \varphi_3 \text{ is finite.} \tag{3.6}$$

首先写出φ的通解：

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1 &=& (A_1 r + B_1 r^{-2}) \cos\theta \\ \varphi_2 &=& (A_2 r + B_2 r^{-2}) \cos\theta \\ \varphi_3 &=& (A_3 r + B_3 r^{-2}) \cos\theta \end{cases} \tag{3.7}$$

然后由Eq.(3.3)和Eq.(3.6)得：

$$A_1 = -E_0 \qquad B_3 = 0 \tag{3.8}$$

接着由Eq.(3.4)和Eq.(3.5)可得到下面的方程组：

$$-E_0 R' + \frac{B_1}{R'^2} = A_2 R' + \frac{B_2}{R'^2} \tag{3.9}$$

$$-E_0 - \frac{2B_1}{R'^3} = \epsilon (A_2 - \frac{2B_2}{R'^3}) \tag{3.10}$$

$$A_2 R + \frac{B_2}{R^2} = A_3 R \tag{3.11}$$

$$\epsilon (A_2 - \frac{2B_2}{R^3}) = A_3 \tag{3.12}$$

联立上述四个方程解得：

$$B_1 = -\frac{R'^3}{2}[1 + \frac{6\epsilon(\epsilon-1)R^3 - 3\epsilon(2\epsilon+1)R'^3}{9\epsilon R'^3 + 2(\epsilon-1)^2(R'^3 - R^3)}]E_0 \tag{3.13}$$

$$A_2 = -\frac{3(2\epsilon+1)R'^3}{9\epsilon R'^3 + 2(\epsilon-1)^2(R'^3 - R^3)} E_0 \tag{3.14}$$

$$B_2 = -\frac{3(\epsilon-1)R^3 R'^3}{9\epsilon R'^3 + 2(\epsilon-1)^2(R'^3 - R^3)} E_0 \tag{3.15}$$

$$A_3 = -\frac{9\epsilon R'^3}{9\epsilon R'^3 + 2(\epsilon-1)^2(R'^3 - R^3)} E_0 \tag{3.16}$$

讨论： 根据上面的结果，写出球内电场分布以及等效偶极矩。