电动力学习题课（二）

Mar 20th, 2009

1 Example 1

如Fig1所示，空间中$r < r_0$的区域内存在着随时间线性变化、沿着z方向的均匀磁场，即$\vec{B} = B_0\hat{z} = \alpha t\hat{z}$，试求：
a）若在$(0,a,0)$处置一点电荷q，施加一外力$\vec{F}$保持其静止，求t时间内外力的冲量并讨论之；
b）若在空间连接一电路（图(b)），求电压表V_1, V_2的读数并讨论之。

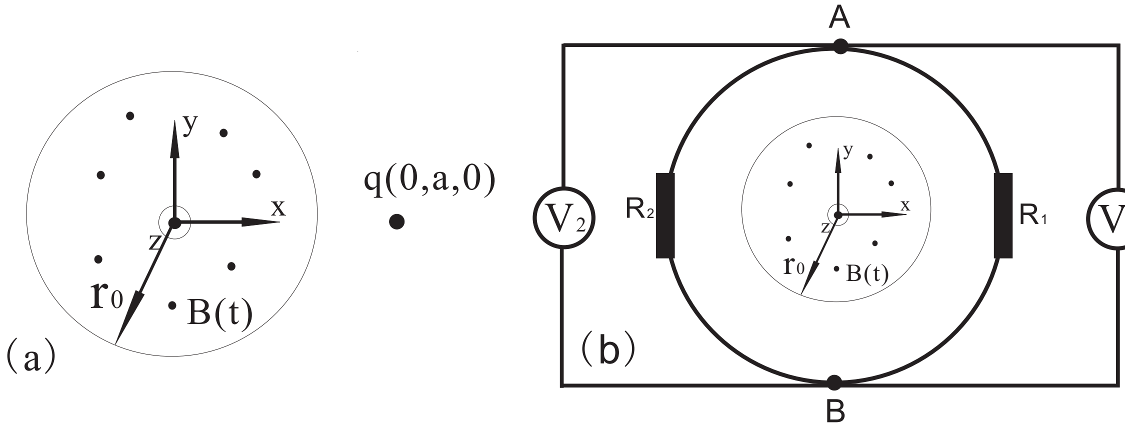

Figure 1: 例一示意图

解：(a) 根据题意：

$$\vec{B} = \begin{cases} \alpha t\hat{z} & r < r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases} \Rightarrow \vec{A} = \begin{cases} \frac{\alpha r}{2}t\hat{\phi} & r < r_0 \\ \\ \frac{\alpha r_0^2}{2r}t\hat{\phi} & r > r_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

由法拉第定律：

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{1.2}$$

取半径为r的圆形截面，则：

$$\vec{E} = -\frac{\alpha r_0^2}{2r}\hat{\phi} \tag{1.3}$$

那么点电荷q在t时间内受到的冲量为：

$$\vec{I} = \int \vec{F}\mathrm{d}t' = \int_0^t \frac{q\alpha r_0^2}{2r}\hat{\phi}\mathrm{d}t' = \frac{q\alpha r_0^2}{2r}t\hat{\phi} \tag{1.4}$$

t时刻点电荷的正则动量：

$$\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A} = \frac{q\alpha r_0^2}{2r}t\hat{\phi} \equiv \vec{I} \tag{1.5}$$

(b) 磁通量：

$$\Phi \equiv \int \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \begin{cases} \alpha\pi r^2 t & r<r_0 \\ \alpha\pi r_0^2 t & r>r_0 \end{cases} \tag{1.6}$$

则电路中的电动势：

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\alpha\pi r_0^2 \tag{1.7}$$

注意Eq.(1.7)中是对时间的全微分。进一步，电流为：

$$\mathrm{I} = \frac{\varepsilon}{R_1+R_2} = -\frac{\alpha\pi r_0^2}{R_1+R_2} \tag{1.8}$$

这里负号表示电流是顺时针方向的。
电压表V_1的读数为：

$$V_1 = \mathrm{I}R_1 = \frac{\alpha\pi r_0^2}{R_1+R_2}R_1 \qquad \text{A点电势高于B点} \tag{1.9}$$

电压表V_2的读数为：

$$V_2 = \mathrm{I}R_2 = \frac{\alpha\pi r_0^2}{R_1+R_2}R_2 \qquad \text{B点电势高于A点} \tag{1.10}$$

讨论：
1）第一小题的Eq.(1.5)说明在该过程中外力的冲量实际上以电磁动量的形式储存在了电磁场中。
2）第二小题的$V_1 \neq V_2$的原因是：

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \neq 0 \tag{1.11}$$

换句话说，此时电势多值，没有明确意义。
3）如果大家有兴趣，可以尝试画出此题中的能流。

2 Example 2

如Fig2所示，空间中有一长度为ℓ的同轴电缆，内导体半径为a，外导体半径为b，其两端一端连接电压为V的直流电源，另一端连接阻值为R的电阻。内导体电荷线密度为λ，电流大小I，外导体带反号的电荷和反向的电流。试求该电磁场的能量，动量以及内外导体之间的作用力。

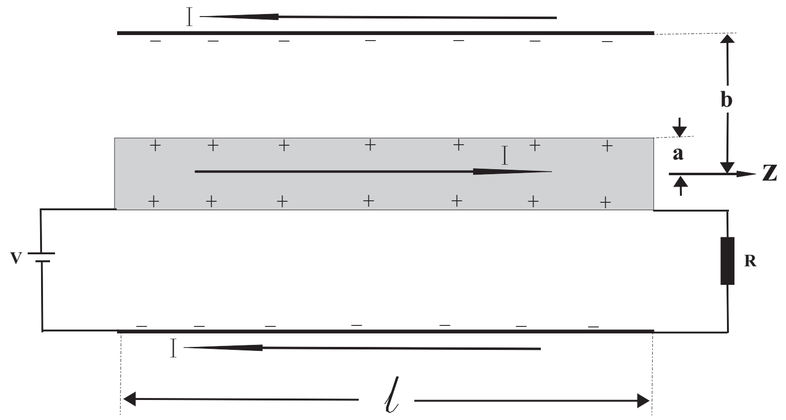

Figure 2: 例二示意图

解：易求得：

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}\hat{r} \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mathrm{I}}{r}\hat{\phi} \tag{2.1}$$

首先考虑能量，能流和能量密度分别为：

$$\vec{S} = \frac{\lambda \mathrm{I}}{4\pi^2\epsilon_0 r^2}\hat{z} \tag{2.2}$$

$$\omega_{em} = \frac{1}{8\pi^2 r^2}(\frac{\lambda^2}{\epsilon_0} + \mu_0 \mathrm{I}^2) \tag{2.3}$$

很明显，能量是从电池流向电阻的。可以算出单位时间内通过同轴电缆截面的能量：

$$P = \int \vec{S}\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \int \frac{\lambda \mathrm{I}}{4\pi^2\epsilon_0 r^2}\hat{z}\cdot\hat{z} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{\lambda \mathrm{I}}{2\pi\epsilon_0}\ln(b/a) \tag{2.4}$$

又

$$V = \int \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}\hat{r}\cdot\hat{r}\mathrm{d}r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln(b/a) \tag{2.5}$$

那么

$$P = \mathrm{I}V \tag{2.6}$$

Eq.(2.6)的物理意义十分明确，单位时间内通过同轴电缆截面的能量等于电路的功率。
存储在电磁场中的总能量为：

$$\mathrm{E} = \int \omega_{em}\mathrm{d}\tau = \int \frac{1}{8\pi^2 r^2}(\frac{\lambda^2}{\epsilon_0} + \mu_0 \mathrm{I}^2) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \frac{\ell}{4\pi}(\frac{\lambda^2}{\epsilon_0} + \mu_0 \mathrm{I}^2)\ln(b/a) \tag{2.7}$$

接下来考虑动量，动量流密度和动量密度分别为：

$$\vec{g} = \frac{1}{\mathrm{c}^2}\vec{S} = \frac{\mu_0 \lambda \mathrm{I}}{4\pi^2 r^2}\hat{z} \tag{2.8}$$

$$\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{8\pi^2 r^2}(\frac{\lambda^2}{\epsilon_0} + \mu_0 \mathrm{I}^2)\overleftrightarrow{\mathrm{I}} - \frac{1}{4\pi^2\epsilon_0}\frac{\lambda^2}{r^2}\hat{r}\hat{r} - \frac{\mu_0}{4\pi^2}\frac{\mathrm{I}^2}{r^2}\hat{\phi}\hat{\phi} \tag{2.9}$$

单位时间通过截面的动量为：

$$\vec{\mathrm{P}} = \int \overleftrightarrow{T}\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \int \overleftrightarrow{T}\cdot \hat{z} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4\pi}(\frac{\lambda^2}{\epsilon_0} + \mu_0 \mathrm{I}^2)\ln(b/a)\hat{z} \tag{2.10}$$

存储在电磁场中的总动量为：

$$\vec{P}_{em} = \int \vec{g}\mathrm{d}\tau = \frac{\mu_0 \lambda \mathrm{I}\ell}{2\pi}\ln(b/a)\hat{z} \tag{2.11}$$

最后来考虑内外导体之间的作用力：

$$\vec{F} = \oint \overleftrightarrow{T}\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \oint \overleftrightarrow{T}\cdot \hat{r} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = 0 \tag{2.12}$$

讨论与思考：
1）电阻的能量来自空间电磁场，所以电路中能量的传播速度(电场建立的速度)为光速。
2）整个体系静止，为什么会有电磁动量？
3）能流密度和动量密度之差一常数c^2，是不是有深刻的物理？

3 Example 3

例三：利用格林互易定理求解下面的问题，
a）半径为a和b的两个同心导体球壳，在其之间放一点电荷q，求两个球壳上的感应电荷；
b）半径为a的导体球外ℓ处放一点电荷q，求该球的感应电荷。
（注意：两题中的导体均接地。）

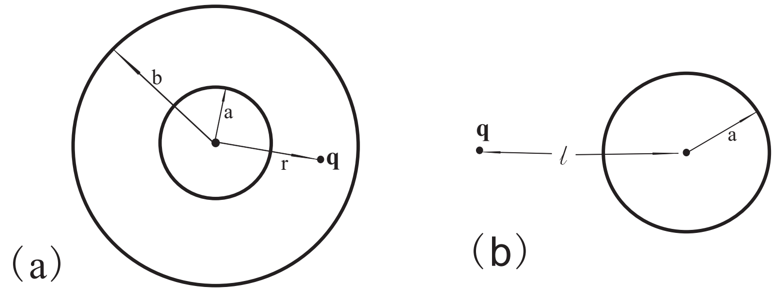

Figure 3: 例三示意图

解： (a) **第一种情况：** 电荷分布为q, Q_1, Q_2，其中Q_1, Q_2分别为内球壳和外球壳的感应电荷，电势分布为$\varphi, 0, 0$；
第二种情况： 电荷密度分布为$0, +\sigma, -\frac{a^2}{b^2}\sigma$，电势分布为$\frac{\sigma a^2}{\epsilon_0}(\frac{1}{b}-\frac{1}{r}), \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0}(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}), 0$。
那么由格林互易定理：

$$q\frac{\sigma a^2}{\epsilon_0}(\frac{1}{b}-\frac{1}{r})+Q_1\frac{\sigma a^2}{\epsilon_0}(\frac{1}{b}-\frac{1}{a})=0 \tag{3.1}$$

可得：

$$Q_1=-q\frac{a}{r}\frac{b-r}{b-a} \tag{3.2}$$

类似可得：

$$Q_2=-q\frac{b}{r}\frac{r-a}{b-a} \tag{3.3}$$

容易验证

$$Q_1+Q_2=-q \tag{3.4}$$

(b) **第一种情况：** 电荷分布为q, Q，其中Q为球壳的感应电荷，电势分布为$\varphi, 0$；
第二种情况： 电荷密度分布为$0, +\sigma$，电势分布为$\frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 \ell}, \frac{\sigma a}{\epsilon_0}$。
那么由格林互易定理：

$$q\frac{\sigma a^2}{\epsilon_0\ell}+Q\frac{\sigma a}{\epsilon_0}=0 \tag{3.5}$$

可得：

$$Q=-\frac{a}{\ell}q \tag{3.6}$$

Eq.(3.6)正是电像法中象电荷的电量，但是这并不意味着电像法中像电荷的电荷就是感应电荷。
讨论与思考：
1）接地的物理意义；
2）格林互易定理的物理内涵。