

# 第九讲 动态最优问题求解： (II) 最优控制

樊清彦

复旦大学经济学院

# 本讲主要内容

## 1. 离散时间的最优控制问题

- 1.1 从拉格朗日方法到最大值原理
- 1.2 离散时间最大值原理：表述与经济含义
- 1.3 应用：离散时间最优增长问题

## 2. 连续时间的最优控制问题

- 2.1 连续时间的最大值原理：表述与经济含义
- 2.2 应用：企业进入阻挠

## 3. 最大值原理的证明（选读）

# 离散时间的最优控制：以生命周期储蓄问题为例

对于生命周期储蓄问题：

$$\max \sum_{t=1}^T \beta^t \ln c_t$$

$$s.t. k_t - k_{t-1} = w + rk_{t-1} - c_t$$

$$k_0 = k_T = 0$$

拉格朗日函数为：

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^T \beta^t \ln c_t - \sum_{t=1}^T \lambda_t (k_t - k_{t-1} - w - rk_{t-1} + c_t)$$

其中：

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \lambda_t (k_t - k_{t-1}) &= \lambda_1 (k_1 - k_0) + \lambda_2 (k_2 - k_1) + \dots + \lambda_T (k_T - k_{T-1}) \\ &= \sum_{t=1}^T k_t (\lambda_t - \lambda_{t+1}) - \lambda_1 k_0 + \lambda_{T+1} k_T \end{aligned}$$

# 汉密尔顿函数和一阶条件

拉格朗日方程可以改写为下式，并定义汉密尔顿函数（Hamiltonian）：

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^T \left[ \underbrace{\beta^t \ln c_t + \lambda_t (w + rk_{t-1} - c_t)}_{\equiv H(k_t, c_t, \lambda_t, t)} + k_t (\lambda_{t+1} - \lambda_t) \right] \\ + \lambda_1 k_0 - \lambda_{T+1} k_T$$

动态最优问题的一阶必要条件为：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H_t}{\partial c_t} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_t} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial H_{t+1}}{\partial k_t} = \lambda_{t+1} - \lambda_t \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = 0 \Rightarrow k_t - k_{t-1} = w + rk_{t-1} - c_t \tag{3}$$

以及基于边界条件的库恩-塔克条件（Kuhn-Tucker condition, KTC）：

$$\lambda_1 k_0 = \lambda_{T+1} k_T = 0 \tag{4}$$

# 离散时间最优控制问题的最大值原理

一般地，对于离散时间最优控制问题（discrete time optimal control problem），其中  $x_t$  为状态变量， $u_t$  为控制变量：

$$\begin{aligned} \max U &= \sum_{t=1}^T f(x_t, u_t) \\ s.t. \quad x_t - x_{t-1} &= g(x_{t-1}, u_t) \\ x_0 &= x_T = 0 \end{aligned}$$

定义汉密尔顿函数  $H(x, u, \lambda, t) = f(x_t, u_t) + \lambda_t g(x_{t-1}, u_t)$ 。庞特里雅金最大值原理（Pontryagin's maximum principle）指出， $\{x_t^*, u_t^*\}_{t=1}^T$  是上述最优控制问题内点解的一阶必要条件是，存在  $\lambda_t^*$  使得：

1. 对控制变量  $u_t$  (control variable) 求导有  $\frac{\partial H_t}{\partial u_t}|_* = 0$
2. 对状态变量  $x_t$  (state variable) 求导有  $-\frac{\partial H_t}{\partial x_{t-1}}|_* = \lambda_t^* - \lambda_{t-1}^*$
3. 对共态变量  $\lambda_t$  (costate variable) 求导有  $\frac{\partial H_t}{\partial \lambda_t}|_* = x_t - x_{t-1}$
4. 库恩-塔克条件 (KTC) 条件  $\lambda_1 x_0 = \lambda_{T+1} x_T = 0$

# 条件的经济学含义

汉密尔顿函数是当期价值  $f$  和状态变量变化带来的价值之和，后者等于变化单位乘以影子价格  $\lambda_t \cdot (x_t - x_{t-1})$ 。

$$H(x, u, \lambda, t) = f(x_t, u_t) + \lambda_t g(x_{t-1}, u_t)$$

- ▶ 最优选择应使总价值最大，此时改变控制变量的边际收益为零  $\frac{\partial H_t}{\partial u_t}|_* = 0$ 。
- ▶  $\frac{\partial H_t}{\partial x_{t-1}}$  是状态变量变动一单位所带来的边际收益， $\lambda_t - \lambda_{t-1}$  则是状态变量影子价格的变化，可以理解为放弃一单位状态变量的边际成本，达到最优时两者数量相等符号相反。 $-\frac{\partial H_t}{\partial x_{t-1}}|_* = \lambda_t - \lambda_{t-1}$  也被称为状态变量的跨期无套利条件。
- ▶  $\frac{\partial H_t}{\partial \lambda_t}|_* = g = x_t - x_{t-1}$  是定义方程，例如预算约束方程。
- ▶ 前面三个条件给出了最优路径的“形状”（上升、下降或其他变化规则），但如果  
没有起点和终点的限制，还是有无穷多的、相同形状的路径都符合条件。为了最  
终确定某条路径，需要加上终端条件。

# 应用：离散时间最优增长问题

对于无限期界的最优增长问题：

$$\begin{aligned} & \max \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \ln c_t \\ & s.t. k_t = zk_{t-1}^{\alpha} - c_t \\ & \quad k_0 = 1, \lim_{t \rightarrow \infty} \beta^{t+1} u'(c_{t+1}) k_t = 0 \end{aligned}$$

写出汉密尔顿函数  $H_t = \beta^t \ln c_t + \lambda_t (zk_{t-1}^{\alpha} - k_{t-1} - c_t)$ , 直接利用最大值原理的条件求出最优解：

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_t}{\partial c_t} &= 0 \Rightarrow \frac{\beta^t}{c_t} = \lambda_t \\ -\frac{\partial H_t}{\partial k_{t-1}} &= \lambda_t - \lambda_{t-1} \Rightarrow \lambda_t \alpha z k_{t-1}^{\alpha-1} = \lambda_{t-1} \\ \frac{\partial H_t}{\partial \lambda_t} &= g = k_t - k_{t-1} \Rightarrow k_t = zk_{t-1}^{\alpha} - c_t \\ k_0 &= 1, \lim_{t \rightarrow \infty} \beta^{t+1} u'(c_{t+1}) k_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_{t+1} k_t = 0 \end{aligned}$$

# 连续时间的最大值原理

对于连续时间最优控制问题 (continuous time optimal control problem), 其中  $x(t)$  为状态变量,  $u(t)$  为控制变量:

$$\begin{aligned} & \max \int_0^T f(x(t), u(t), t) dt \\ s.t. \quad & \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x} = g(x(t), u(t), t) \\ & x(0) = x_0 \end{aligned}$$

定义汉密尔顿函数  $H(x, u, \lambda, t) = f(x, u, t) + \lambda(t) \cdot g(x, u, t)$ , 根据最大值原理,  $\{x^*(t), u^*(t)\}$  是上述最优控制问题内点解的一阶必要条件是存在  $\lambda^*(t)$  满足:

1. 对控制变量  $u(t)$  (control variable) 求导有  $\frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial u}|_* = 0$
2. 对状态变量  $x(t)$  (state variable) 求导有  $\frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial x}|_* = -\dot{\lambda}|_*$
3. 对共态变量  $\lambda(t)$  (costate variable) 求导有  $\frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial \lambda}|_* = \dot{x}|_*$
4. 终端条件  $\lambda(T) = 0$  或  $H(T) = 0$

# 条件的经济含义：以企业投资的最优控制问题为例

假定企业面临下述最优投资问题：

$$\begin{aligned} \max \quad & \Pi(u) = \int_0^T \pi(k, I, t) dt \\ \text{s.t. } & \dot{k} = f(k, I, t), \quad k(0) = k_0 \end{aligned}$$

汉密尔顿方程为  $H(k, I, \lambda, t) = \pi(k, I, t) + \lambda(t) f(k, I, t)$ 。第一项  $\pi$  为企业的“当期利润”，第二项中  $\lambda$  为状态变量资本的影子价格，乘以资本的变化量等于“资本价值的变化”，两项之和为企业每一期的总收益。

- ▶  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial u} = -\lambda \frac{\partial f}{\partial u}$ : 投资水平达到最优时，边际利润等于投资的机会成本。
- ▶  $-\frac{\partial H}{\partial k} = \dot{\lambda}$ : 资本影子价格的变化等于资本的边际总收益。
- ▶  $\frac{\partial H}{\partial \lambda} = f = \dot{k}$  为预算约束方程。
- ▶ 对于垂直终结线问题，有  $\lambda(T) = 0$ : 企业会充分利用资本，使最终时刻的资本价值为零。
- ▶ 对于水平终结线问题，有  $H(T) = 0$ : 表明企业将充分利用所有赢利机会，使最终达到  $k(T)$  时总收益为零。

## 企业进入阻挠（迪克西特，习题10.3）

给定市场总需求  $q(t) = a - bp(t)$  和小企业的产量变化率  $\dot{x}$ ，大企业通过价格策略阻止小企业进入的最优控制问题为（假定参数  $a, b, k > 0$ 、 $2(\frac{1}{\beta} - 1) < \frac{k}{b} < 2(\frac{1}{\beta} + 1)$ 、 $p_{min} > c > 0$ ）：

$$\begin{aligned} \max \quad & \int_{t=0}^{\infty} e^{-\beta t} [p(t) - c] [a - bp(t) - x(t)] dt \\ \text{s.t. } & \dot{x}(t) = k [p(t) - p_{min}] \end{aligned}$$

首先写出汉密尔顿函数  $H = e^{-\beta t} (p - c)(a - bp - x) + \lambda k (p - p_{min})$ ，其中  $x$  为状态变量， $p$  为控制变量。最大值原理给出的一阶条件为：

$$\frac{\partial H}{\partial p} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{e^{-\beta t}}{k} (a - 2bp + bc - x)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\lambda} \Rightarrow \dot{\lambda} = e^{-\beta t} (p - c)$$

两式联立再加上定义方程得到二元一阶微分方程组：

$$\dot{p} = \frac{1}{2b} [-\dot{x} - \beta (a - 2bp + bc - x) + k(p - c)]$$

$$\dot{x} = k(p - p_{min})$$

# 稳态与转移动态

令  $\dot{x} = \dot{p} = 0$ , 解出模型稳态:

$$p^* = p_{min}, \quad x^* = \left( \frac{(a+bc)\beta + kc}{k+2b\beta} - p_{min} \right) \left( \frac{k}{\beta} + 2b \right)$$

显然, 当大企业的定价  $p = p_{min} < \frac{(a+bc)\beta + kc}{k+2b\beta}$  时, 小企业会进入  $x^* > 0$ 。重写微分方程组:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & \frac{\beta}{2b} \\ k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k(p_{min}-c)-\beta(a+bc)}{2b} \\ -kp_{min} \end{bmatrix}$$

鞍点路径为 (其中  $\lambda = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 2\beta k/b}}{2} \in (-1, 0)$ ):

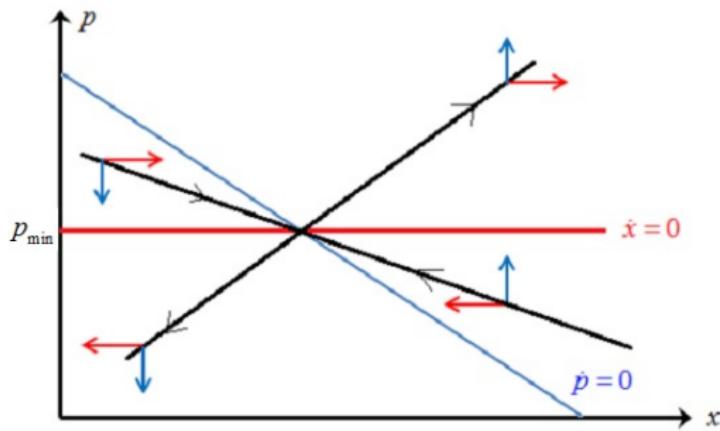
$$p(t) = (p_0 - p^*) e^{\lambda t} + p^*$$

$$x(t) = (x_0 - x^*) e^{\lambda t} + x^*$$

## 相图

$$\dot{p} = 0 \Rightarrow p^{ss} = -\frac{1}{2b}x^{ss} + \frac{k(p_{\min} - c) - \beta(a + bc)}{2b\beta} \Rightarrow x > x^{ss}, \dot{p} > 0$$

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow p^{ss} = p_{\min} \Rightarrow p > p^{ss}, \dot{x} > 0$$



# 构造拉格朗日函数<sup>1</sup>

首先写出拉格朗日函数：

$$\mathcal{L} = \int_0^T f(x(t), u(t), t) dt + \int_0^T \lambda(t) [g(x(t), u(t), t) - \dot{x}] dt$$

利用分步积分公式  $\int_0^T \lambda(t) \dot{x} dt = \lambda(T)x(T) - \lambda(0)x(0) - \int_0^T \dot{\lambda}x(t) dt$  有：

$$\mathcal{L} = \int_0^T \left[ H(x(t), u(t), \lambda(t), t) + \dot{\lambda}x(t) \right] dt + \lambda(0)x(0) - \lambda(T)x(T)$$

由于积分不能对一瞬间的变量求导，因此我们在  $x^*(t)$ ,  $u^*(t)$  附近引入任意的、时间的实值函数（称为“扰动曲线”） $p(t), q(t)$ , 和任意实数  $\Delta T, \Delta x_T$ 。令  $\varepsilon$  是一个任意小的实数，我们记：

$$\begin{aligned} x(t) &= x^*(t) + \varepsilon p(t) & u(t) &= u^*(t) + \varepsilon q(t) \\ T &= T + \varepsilon \Delta T & x(T) &= x^*(T) + \varepsilon \Delta x_T \end{aligned}$$

拉格朗日函数可以重写为：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_0^{T(\varepsilon)} \left[ H(x^* + \varepsilon p(t), u^* + \varepsilon q(t), \lambda(t), t) + \dot{\lambda} \cdot (x^* + \varepsilon p(t)) \right] dt \\ &\quad - \lambda(T + \varepsilon \Delta T)(x^*(T) + \varepsilon \Delta x_T) + \lambda(0)x_0 \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> 蒋中一著, 1999:《动态最优化基础》, 王永宏译, 商务印书馆

# 一阶条件

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \int_0^{T(\varepsilon)} \left[ H(x^* + \varepsilon p(t), u^* + \varepsilon q(t), \lambda(t), t) + \dot{\lambda} \cdot (x^* + \varepsilon p(t)) \right] dt \\ & - \lambda(T + \varepsilon \Delta T) (x^*(T) + \varepsilon \Delta x_T) + \lambda(0) x_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon} = 0 \Rightarrow & \int_0^T \left[ \frac{\partial H}{\partial x} \cdot p(t) + \frac{\partial H}{\partial u} \cdot q(t) + \dot{\lambda} \cdot p(t) \right] dt \\ & + \left( H(T) + \dot{\lambda} x(T) \right) \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} - \left[ \dot{\lambda}(T) \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} x(T) + \lambda(T) \frac{\partial x(T)}{\partial \varepsilon} \right] = 0 \\ \Rightarrow & \int_0^T \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} \right) \cdot p(t) + \frac{\partial H}{\partial u} \cdot q(t) \right] dt + H(T) \Delta T - \lambda(T) \Delta x_T = 0\end{aligned}$$

由于  $p(t), q(t)$  是任意曲线，因此有  $\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial u} = 0$ ，即最大值原理的两个一阶条件。另外在构造拉格朗日方程时已经用到了  $\frac{\partial H}{\partial \lambda} = g = \dot{x}$  的定义方程。

# 终端条件

$$H(T)\Delta T = \lambda(T) \cdot \Delta x_T$$

- ▶ 终端时间固定、状态变量不确定的垂直终结线问题  $\Delta T = 0, \Delta x_T \neq 0$  要求  $\lambda(T) = 0$ , 特别地:
  - ▶ 对于附加状态变量下限要求  $x(T) > x_{min}$  的“截断垂直终结线”问题, 相应条件为  $\lambda(T)(x(T) - x_{min}) = 0$ 。
  - ▶ 对于无限期界问题的“截断垂直终结线”问题, 有**横截性条件**:
- $$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)(x(t) - x_{min}) = 0$$
- ▶ 终端时间不固定、状态变量确定的水平终结线问题  $\Delta T \neq 0, \Delta x_T = 0$  要求  $H(T) = 0$ 。此外对于有时间上限要求  $T > T_{max}$  的“截断水平终结线”问题, 终端条件为  $H(T)(T - T_{max}) = 0$ 。
- ▶ 终端时间和状态变量都不确定、但有等式约束  $x(T) = \phi(T)$  的终结曲面问题要求  $H(T) - \lambda(T)\phi'(T) = 0$ 。