复旦大学力学与工程科学系

2013 ～ 2014 学年第二学期期末考试试卷

□A 卷　　□B 卷

课程名称：连续介质力学基础　　课程代码：MECH130105

开课院系：力学与工程科学系　　考试形式：开卷/闭卷/课程论文

姓名：__________　学号：__________　专业：__________

题 号	1/(1)	1/(2)	1/(3)	2/(1)	2/(2)	2/(3)	2/(4)	2/(5)	2/(6)	
得 分										
题 号	3/(1)	3/(2)	3/(3)	3/(4)	3/(5)	3/(6)	3/(7)			
得 分										
得 分	4/(1)	4/(2)	4/(3)	4/(4)						总分
得 分										

问题 1 (二点形式张量场微分学)**.** 连续介质的有限变形理论，一般按运动性质引入介质的初始、当前物理构型，对应地按微分同胚引入初始、当前参数构型。由此，定义于介质之上的张量可有二点表示形式。

考虑如下四阶张量的二点表示形式

$$\boldsymbol{\Phi} = \Phi^{A\cdot j\cdot}_{\cdot i\cdot B}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{G}_A(\boldsymbol{\xi}) \otimes \boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{G}^B(\boldsymbol{\xi})$$

此处局部基 $\{\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})\}_{i=1}^m$ 对应曲线坐标系 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{C}^p(\mathscr{D}_x, \boldsymbol{X}(\mathscr{D}_x))$，局部基 $\{\boldsymbol{G}_A(x)\}_{A=1}^m$ 对应曲线坐标系 $\mathring{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{C}^p(\mathscr{D}_\xi, X(\mathscr{D}_\xi))$；上述二曲线坐标系具有关系式 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{C}^p(\mathscr{D}_\xi, \mathscr{D}_x)$。

1. 按上述张量场 $\boldsymbol{\Phi}$ 的二点形式，推导
$$\frac{\partial}{\partial \xi^L}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\xi})$$
的表达式。

2. 就完整的局部基 $\{\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})\}_{i=1}^m$ 引入其非完整基 $\{\boldsymbol{g}_{(i)}(\boldsymbol{x})\}_{i=1}^m$；就完整的局部基 $\{\boldsymbol{G}_A(\boldsymbol{\xi})\}_{A=1}^m$ 引入其非完整基局部基 $\{\boldsymbol{G}_{(A)}(\boldsymbol{\xi})\}_{A=1}^m$。推导
$$\boldsymbol{\Phi} \otimes \mathring{\Box} \equiv \boldsymbol{\Phi} \otimes \left(\boldsymbol{G}^L \frac{\partial}{\partial \xi^L}\right)(\boldsymbol{\xi}) \triangleq \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \xi^L}(\boldsymbol{\xi}) \otimes \boldsymbol{G}^L$$
相对于二点形式非完整基的表达式。

3. 设曲线坐标系 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{C}^p(\mathscr{D}_x, \boldsymbol{X}(\mathscr{D}_x))$ 为球坐标系，对应的非完整基为其单位正交基；设 $\mathring{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{C}^p(\mathscr{D}_\xi, \boldsymbol{X}(\mathscr{D}_\xi))$ 为柱坐标系，对应的非完整基为其单位正交基。以此，推导

$$(\Phi^i_{\cdot A}\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{G}^A) \cdot \mathring{\Box} = \boldsymbol{0}$$

相对于上述二点形式非完整基的表达式。

问题 2 (体积形态连续介质的有限变形理论)**.** 我们基于当前物理构型对应之曲线坐标系显含时间的情形，研究体积形态连续介质的有限变形理论。以下各问题都基于这种情形。

1. 举一个事例，说明引入当前物理构型对应之曲线坐标系显含时间的意义。注：需要明确给出显含时间曲线坐标系的定义，其物理域及参数域；但无需计算其几何量等。

2. 推导速度表达式。

3. 推导任意张量场的物质导数表达式。注：需要获得内蕴/整体形式。

4. 基于积分关系式，推导 Lagrange 型质量守恒微分方程。注：需明确所利用的变形梯度等的相关关系式，但无需证明。

5. 基于积分关系式，推导 Lagrange 型动量守恒微分方程，亦即第一类、第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量满足的微分方程。注：需明确所利用的变形梯度等的相关关系式，但无需证明。

6. 基于物质线变形的性质，推导第一类物质线输运方程，亦即推导

$$\frac{d}{dt}\int_{\overset{t}{\Gamma}} \boldsymbol{\Phi}$$

的积分恒等式，式中 $\boldsymbol{\Phi}$ 为定义于物质线上的任意张量场，$\overset{t}{\boldsymbol{\Gamma}}(\lambda) := \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}(\lambda)), t)$ 为当前物理构型中物质线的向量值映照表示。注：需明确所利用的变形梯度等的相关关系式，但无需证明。

问题 3 (曲面形态连续介质的变形运动学)**.** 对曲面形态的连续介质，可类比体积形态的连续介质，建立其变形理论。

1. 曲面形态连续介质的变形梯度定义为

$$\boldsymbol{F} \triangleq \frac{\partial x^i_\Sigma}{\partial \xi^A_\Sigma}(\boldsymbol{\xi}_\Sigma, t)\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{G}^A$$

基于微分学解释其意义。

2. 证明变形相关的基本关系式

$$\left(\frac{\partial \overset{t}{\boldsymbol{\Sigma}}}{\partial \lambda} \times \frac{\partial \overset{t}{\boldsymbol{\Sigma}}}{\partial \mu}\right)(\lambda, \mu) = |\boldsymbol{F}| \left|\frac{\partial \mathring{\boldsymbol{\Sigma}}}{\partial \lambda} \times \frac{\partial \mathring{\boldsymbol{\Sigma}}}{\partial \mu}\right|_{\mathbb{R}^3} (\lambda, \mu)\, \overset{t}{\boldsymbol{n}}(\lambda, \mu)$$

式中变形梯度的行列式定义为

$$|\boldsymbol{F}| \triangleq \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G}} \det \left[\frac{\partial x_{\Sigma}^{i}}{\partial \xi_{\Sigma}^{A}} \right] (\boldsymbol{\xi}_{\Sigma}, t)$$

$\overset{t}{\boldsymbol{\Sigma}}(\lambda, \mu) := \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_{\Sigma}(\boldsymbol{\xi}_{\Sigma}(\lambda, \mu)), t)$ 为当前物理构型中物质面的向量值映照表示；$\overset{\circ}{\boldsymbol{\Sigma}}(\lambda, \mu) := \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\xi}_{\Sigma}(\lambda, \mu)), t_0)$ 为初始物理构型中物质面的向量值映照表示。

3. 证明变形梯度的基本关系式

$$\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_{\Sigma}^{l}}(\boldsymbol{x}_{\Sigma}, t) = g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_{\Sigma}^{l}}(\boldsymbol{x}_{\Sigma}, t), \quad g := \det[g_{ij}]$$

   式中 $\{g_{ij}\}_{i,j=1}^{3}$ 为曲面的度量。

4. 证明：

$$\frac{d}{dt}|\boldsymbol{F}| = \theta |\boldsymbol{F}|, \quad \theta := \boldsymbol{V} \cdot \overset{\Sigma}{\boldsymbol{\nabla}}$$

5. 按上述相关结论，已有变形相关的基本关系式

$$\frac{d}{dt} \left| \frac{\partial \overset{t}{\boldsymbol{\Sigma}}}{\partial \lambda} \times \frac{\partial \overset{t}{\boldsymbol{\Sigma}}}{\partial \mu} \right|_{\mathbb{R}^3} (\lambda, \mu) = \theta \left| \frac{\partial \overset{t}{\boldsymbol{\Sigma}}}{\partial \lambda} \times \frac{\partial \overset{t}{\boldsymbol{\Sigma}}}{\partial \mu} \right|_{\mathbb{R}^3} (\lambda, \mu), \quad \theta := \boldsymbol{V} \cdot \overset{\Sigma}{\boldsymbol{\nabla}}$$

   以此，推导第一类物质面输运方程，亦即推导

$$\frac{d}{dt} \int_{\overset{t}{\Sigma}} \boldsymbol{\Phi} \, d\sigma$$

   的积分恒等式，式中 $\boldsymbol{\Phi}$ 为定义于曲面介质上的任意张量场。

6. 推导一般形式的质量守恒微分方程。注：微分方程中包含力学 -几何耦合量。

7. 就质量守恒微分方程中的力学 -几何耦合量，说明在何种运动形式下耦合量自然为零，何种运动形式下非自然为零。

问题 4 (曲面形态连续介质的守恒律方程)**.** 曲面形态连续介质的守恒律方程，可基于下述内蕴形式的第二类广义 Stokes 公式获得

$$\oint_{C} (\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{n}) \circ - \boldsymbol{\Phi} \, dl = \int_{\Sigma} \left(\overset{\Sigma}{\boldsymbol{\nabla}} \circ - \boldsymbol{\Phi} + H \boldsymbol{n} \circ - \boldsymbol{\Phi} \right) d\sigma$$

以下各问题都基于上述 Stokes 公式。

1. 直接推导固定曲面上二维不可压缩流动的连续性方程。注：要求给出微分形式的连续性方程。

2. 比较固定曲面上二维不可压缩流动的连续性方程与三维不可压缩连续性方程的数学形式，并给与相应的说明。注：可基于数学与力学的融合进行说明。

3. 设曲面应力具有如下形式

$$\boldsymbol{t} = t^i_{\cdot j}\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j + t^i_{\cdot 3}\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{n}$$

且设其作用形式为

$$\oint_{\partial \Sigma}^{t} (\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{t}\, dl$$

推导一般形式的动量守恒微分方程。

4. 按上述曲面应力形式，推导动量矩守恒的微分形式，并给与相应的力学解释。注：可按是否考虑面力偶情形，进行说明。

注：给出推导及计算过程的细节；批阅上注重思想及方法的反映。