第二章　关系

2.1　二元关系

2.2　关系的性质

2.3　关系的运算

2.4　关系数据库的一个实例

2.5　关系的闭包

2.6　等价关系与划分

2.7　次序关系

引言

- 在现实生活中, 集合与集合之间还存在着某种联系。
- 现实世界中的二元关系

1，同一个集合中的二元关系：同学关系、同桌关系……

2，两个不同集合之间的二元关系：师生关系、学生和选修课程的关系……

- 现实世界中的多元关系

学生、课程和任课教师的关系

关系在现实世界和信息世界中的表示

- 关系在现实世界中的表示：

  表格

- 关系在信息世界中的表示

  数据库

形式化和非形式化的描述

- 形式化描述

数学、精确无二义、难理解

- 非形式化描述

自然语言、不精确、易理解

2.1　二元关系

- 一　定义2.1（二元关系）

　　设A和B是任意两个集合，$A\times B$的子集R称为从A到B的二元关系。当$A=B$时，称R为A上的二元关系。若$(a, b)\in R$，则称a与b有关系R，记为aRb。

术语：

$(a, b)\notin R$：a与b没有关系R

$R=\varnothing$：空关系

$R=A\times B$：全关系

- 由定义2.1，得出：
- 1）二元关系是集合；
- 2）二元关系的元素是有序对。

2.1　二元关系

- 例：设$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，A上共有多少个二元关系？

- *因为*A上的二元关系R是$A\times A$的子集，是$A\times A$的幂集中的元素。
- *<u>西安交通大学1998考研</u>*

- 解：
- 因为A上的二元关系R是$A \times A$的子集，$|A \times A|=25$，$|P(A \times A)|=2^{25}$
- 所以A上的二元关系R的个数是2^{25}。

2.1　二元关系

- 二　　定义2.2（定义域，值域）

　　设R是从A到B的二元关系，A的一个子集$\{a|$存在b，使得$(a, b)\in R\}$称为R的定义域，记为$Dom\ R$。B的一个子集$\{b|$存在a，使得$(a, b)\in R\}$称为R的值域，记为$Ran\ R$。

　　A称为R的前域，B称为R的陪域，并且$Dom\ R\subseteq A$，$Ran\ R\subseteq B$。

例2.1, 2.2, 2.3

- 例2.1　整除关系

  设$A=\{2, 3, 4\}$, $B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$, 定义从A到B的二元关系R: $(a, b)\in R \Leftrightarrow a$整除$b$。

  $$R=\{(2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$$

  $$Dom\ R=\{2, 3, 4\},\ Ran\ R=\{3, 4, 6\}.$$

- 例2.2　A={1, 2, 3, 4}上的小于关系R: $(a, b)\in R \Leftrightarrow a<b$.
- R={(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)}
- 练习：
- A={1, 2, 3, 4}上的小于等于关系：R'={(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)}
- A={1, 2, 3, 4}上的不等关系: R"={(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3)}

2.1　二元关系

- 三　定义2.3 （n元关系）

　　设$A_1,\ldots\ldots,A_n$是n个任意集合，定义$A_1\times\ldots\ldots\times A_n$的子集$R$为$A_1,\ldots\ldots,A_n$的$n$元关系。

　　当$A_1=\ldots\ldots=A_n$时，R称为A上的n元关系。

实例：表格

2.2 关系的性质

- 一　定义2.4(关系的性质)

　　设R是集合A上的二元关系。

(1)如果对任意$a \in A$，有aRa，则称R是自反的。

(2)如果对任意$a \in A$，有$(a, a) \notin R$，则称R是反自反的。

(3)对任意$a, b \in A$，如果aRb必有bRa，则称R是对称的。

(4)对任意$a, b \in A$，如果aRb且bRa，必有$a=b$，则称R是反对称的。

如果aRb且$a \neq b$，必有$(b, a) \notin R$，则称R是反对称的。

(5)对任意$a, b, c \in A$，如果aRb且bRc，必有aRc，则称R是传递的。

- 实例1：<u>*自反与反自反*</u>
- 自反：小于等于关系
- 反自反：小于关系
- $A=\{1, 2, 3, 4\}$上的关系$R=\{(1, 1), (1, 2)\}$, 则R既不是自反，也不是反自反；所以，A上的二元关系R可以既不是自反，也不是反自反

- 实例2：对称与反对称
- 对称：不等关系
- 反对称：小于关系
- A={1, 2, 3, 4}上的关系R={(2, 1), (1, 2), (1, 3)}, 则R既不是对称，也不是反对称；所以，A上的二元关系R可以既不是对称，也不是反对称

- 实例3：传递关系

$R_1=\{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$是传递的；

$R_2=\{(1, 2), (1, 3)\}$是传递的；

$R_3=\{(1, 2)\}$是传递的；

$R_4=\{(1, 2), (2, 3)\}$不是传递的；

如果在A上的二元关系R中，aRb且bRc，但$(a, c)\notin R$，则R不是传递的；否则R是传递的。

A上的二元关系R，或者是传递的，或者不是传递的，两者必居其一。

- 例2.6 集合A的幂集P(A)的性质：
- *自反，反对称，传递*

- 下面的二元关系哪个是传递的？（　　）
- A) 父子关系
- B) 朋友关系
- C) 集合的包含关系
- D) 实数的不等关系

- */*重庆大学1998年考研试题*/*

2.2 关系的性质

- 二 定义2.5（关系矩阵）

  设A和B是两个有限集$A=\{a_1, \ldots\ldots, a_m\}$，$B=\{b_1, \ldots\ldots, b_n\}$，$R$是从$A$到$B$的二元关系，称$m \times n$阶矩阵$M_R=(m_{ij})$为$R$的关系矩阵，其中

若$(a_i, b_j) \in R$，$m_{ij}=1$

若$(a_i, b_j) \notin R$，$m_{ij}=0$

- 例2.7 整除关系的关系矩阵
- *A={2, 3, 4}, B={3, 4, 5, 6, 7}*

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2 关系的性质

- 三 关系图

设$A=\{a_1, \ldots\ldots, a_n\}$，$R$是$A$上的二元关系。$A$中每个元素$a_i$用一个点表示，称该点为顶点$a_i$。

如果a_iRa_j，则从顶点a_i到顶点a_j存在一条弧。

如果a_iRa_i，则从顶点a_i到顶点a_i存在一条封闭弧。

这样表示R中关系的图形，称为R的关系图。

例2.8

2.3 关系的运算

- 定义2.6

  设R_1和R_2是从A到B的两个二元关系，对于$a\in A$，$b\in B$，定义：

$R_1\cup R_2$：$a(R_1\cup R_2)b\Leftrightarrow aR_1b$或$aR_2b$;

$R_1\cap R_2$：$a(R_1\cap R_2)b\Leftrightarrow aR_1b$且$aR_2b$;

R_1-R_2：$a(R_1-R_2)b\Leftrightarrow aR_1b$且$(a, b)\notin R_2$;

$\check{R}_1$：$a\,\check{R}_1b\Leftrightarrow(a,b)\in(A\times B)-R_1$。

2 .3 关系的运算

- 一　　逆运算
- 定义2.7（逆关系）　设R是从A到B的二元关系，则从B到A的二元关系记为R^{-1}，定义为$R^{-1}=\{(b,a)|(a,b)\in R\}$，称为$R$的逆关系。
- 例如

2.3 关系的运算

- 定理2.1

（1）$(R^{-1})^{-1}=R$;

（2）$(R_1\cup R_2)^{-1}= R_1^{-1}\cup R_2^{-1}$;

（3）$(R_1\cap R_2)^{-1}= R_1^{-1}\cap R_2^{-1}$;

（4）$(A\times B)^{-1}= B\times A$;

（5）$\varnothing^{-1}=\varnothing$;

（6）$(\check{R})^{-1}=\overline{(R^{-1})}$;

（7）$(R_1-R_2)^{-1}= R_1^{-1}-R_2^{-1}$;

（8）若$R_1\subseteq R_2$，则$R_1^{-1}\subseteq R_2^{-1}$。

证明方法

（1）证明两个关系相等，因为关系是集合，采用基本法证明关系相等：

证明：

$(a, b)\in$左式$\Rightarrow(a, b)\in$右式; 则左式$\subseteq$右式；

$(a, b)\in$右式$\Rightarrow(a, b)\in$左式; 则右式$\subseteq$左式；

则左式=右式。

（2）证明满足某一性质

根据该性质的定义进行求证。

例如，要证明集合A上的二元关系R是自反的，就是证明对于任意的$a\in A$，$(a, a)\in R$。

证明两个关系相等

- (3) 基本法证明：
- $(a, b)\in(R_1\cap R_2)^{-1} \Leftrightarrow (b, a)\in (R_1\cap R_2) \Leftrightarrow (b, a)\in R_1$且 $(b, a)\in R_2 \Leftrightarrow (a, b)\in R_1^{-1}$且$(a, b)\in R_2^{-1}$。所以，$(R_1\cap R_2)^{-1}= R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$。
- (1), (2)同理, 证明见书。
- (4)同理。

- (5)反证法。
- 设$\varnothing^{-1}\neq\varnothing$，则存在$(a, b)\in\varnothing^{-1}$, 那么$(b, a)\in\varnothing$. 导致矛盾。
- (6), (7), (8)基本法或公式法证明。

2 .3 关系的运算

- 定理2.2

R是A上的二元关系，则R是对称的$\Leftrightarrow R=R^{-1}$。

证明：

R是对称的 $\Rightarrow R=R^{-1}$：（*证明两个集合相等*）

$(a, b)\in R$, 因为R是对称的，所以$(b, a)\in R$, 则$(a, b)\in R^{-1}$; 所以$R\subseteq R^{-1}$。同理， $R^{-1}\subseteq R$。则$R=R^{-1}$。

$R=R^{-1} \Rightarrow R$是对称的：（*证明满足某一性质*）

如果$(a, b)\in R$, 因为$R=R^{-1}$，所以$(a, b)\in R^{-1}$，则$(b, a)\in R$。所以R是对称的。（***根据对称的定义***）

2.3 关系的运算

- 二　复合运算
- 定义2.8（复合关系）　设R_1是从A到B的二元关系，　R_2是从B到C的二元关系，则从A到C的二元关系记为$R_1 \circ R_2$，定义为$R_1 \circ R_2 =\{(a, c) \mid a \in A, c \in C$, 且存在$b \in B$使$(a, b) \in R_1, (b, c) \in R_2\}$称为$R_1$和$R_2$的复合关系。

2.3 关系的运算

- 定理2.3（结合律）

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

- 证明方法：

采用基本法，证明两个关系相等。

即：$(a, d) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3 \Rightarrow (a, d) \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$，
  则$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 \subseteq R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$；

$(a, d) \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3) \Rightarrow (a, d) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$，
  则$R_1 \circ (R_2 \circ R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \circ R_3$。

具体证明步骤见书中证明。

- 不满足交换律，即$R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1$

2.3 关系的运算

- 三　幂运算
- 定义2.9（幂运算）　设R是A上的二元关系，$n\in N$，R的n次幂记为R^n，定义如下：

  (1) R^0是A上的恒等关系（即$R^0 =\{(a, a) | a\in A\}$），记为I_A，又$R^1=R$;

  (2) $R^{n+1}= R^n \circ R$。

定理2.4

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

证明方法：采用归纳法进行证明

设性质为P。

归纳基础：证明$P(1)$为真；

归纳步骤：对每一个$i \geq 1$，假设$P(i)$为真，并且利用这一假设证明$P(i+1)$为真。

- 证明：(1)
- 归纳基础：设$n=1$, 则根据幂运算的定义，$R^m \circ R^1 = R^{m+1}$;
- 归纳步骤：设$n=k$, $R^m \circ R^k = R^{m+k}$成立；设$n=k+1$, $R^m \circ R^{k+1} = R^m \circ R^k \circ R^1 = R^{m+k} \circ R^1 = R^{m+k+1}$。
- 所以$R^m \circ R^n = R^{m+n}$。
- (2)归纳基础：设$n=1$, 则根据幂运算的定义，$(R^m)^1 = R^m$。
- 归纳步骤：设$n=k$, $(R^m)^k = R^{mk}$成立；设$n=k+1$, $(R^m)^{k+1} = (R^m)^k \circ (R^m) = R^{mk} \circ R^m = R^{mk+m} = R^{m(k+1)}$.

归纳证明的思想 / 思维过程

- 归纳基础证明*P(1)*为真；
- 根据归纳步骤，因为*P(1)*为真，所以*P(2)*为真；因为*P(2)*为真，所以*P(3)*为真；……；这个过程对所有的自然数继续下去，对于所有的自然数，*P*为真。

2.3 关系的运算

- 四　　投影运算
- R为$A_1,\ldots\ldots,A_n$的n元关系，定义R在$A_{i1},\ldots\ldots,A_{im}$的投影是一个$m$元关系，它是通过选取$R$中的每个有序$n$元组的第$i_1,\ldots,i_m$个分量组成有序$m$元组作为$M$元关系中的元素，这个投影记为$\Pi_{Ai1,\ldots Aim}(R)$。

2.4 关系数据库

- 1. 术语

1）数据库：一个由计算机操纵的表格的汇集。

2）属性：事物某一方面的特征

3）属性域：属性所取值的变化范围

4）键：在一个关系中，单个或多个属性的值唯一地决定一个*n*元组

- 2. 实例

表2.3

2.4 关系数据库

- 3. 操作
- 查询：从数据库中取出满足一定条件的数据；
- 插入数据：将一些数据存放到数据库中；
- 修改数据：修改数据库中指定的数据；
- 删除数据：删除数据库中指定的数据；
- 投影：从一个关系中选出属性$A_{i1}, \ldots, A_{im}$对应的列，删去相同的行；
- 选择：从关系R中选出满足条件F的元组子集；
- 自然联接：$R \bowtie S = \Pi_{A_1,\ldots,A_n,B_{p+1},\ldots,B_m}\,\sigma_{(A_{n-p+1}=B_1)\wedge\ldots\wedge(A_n=B_p)}(R\times S)$

2.5 关系的闭包

- 一　自反，对称，传递闭包

定义2.11（自反，对称，传递闭包）

设R是A上的二元关系，定义R的自反（对称，传递）闭包记为 R'，满足下列三个条件：

（1）R'是自反的（对称的，传递的）；

（2）$R' \supseteq R$;

（3）对任一自反（对称，传递关系）R''，$R \subseteq R''$，则$R' \subseteq R''$。

分别记为$r(R)$，$s(R)$，$t(R)$。

2.5 关系的闭包

- 二　基本性质
- 定理2.5　设R是A上的二元关系，则

(1) R是自反的 $\Leftrightarrow r(R)=R$;

(2) R是对称的 $\Leftrightarrow s(R)=R$;

(3) R是传递的 $\Leftrightarrow t(R)=R$;

- 证明思想1：采用基本法、反证法进行证明，以R是自反的 $\Leftrightarrow r(R)=R$为例：
- R是自反的 $\Leftarrow r(R)=R$：因为根据$r(R)$的定义，$r(R)$是自反的，所以R是自反的；
- R是自反的 $\Rightarrow r(R)=R$：根据$r(R)$的定义，$R\subseteq r(R)$，证明$r(R)\subseteq R$; 假设$(x, y)\in r(R)$, 但$(x, y)\notin R$, 则$r(R)-\{(x, y)\}$是自反的，$r(R)-\{(x, y)\}\supseteq R$；那么对于$r(R)$，存在$r(R)-\{(x, y)\}\subseteq r(R)$，$R\subseteq r(R)-\{(x, y)\}$且$r(R)-\{(x, y)\}$是自反的；则与$r(R)$的定义矛盾。所以$r(R)=R$。

- 证明思想2: *（证明满足某一性质）*
- 根据自反，对称和传递闭包定义进行证明，以R是自反的 $\Leftrightarrow r(R)=R$为例的证明过程:
- R是自反的 $\Rightarrow r(R)=R$, 就是证明R符合R的自反闭包定义的3个条件: (1)R是自反的；(2) $R\supseteq R$；(3) 对任一自反关系R''，$R\subseteq R''$，则$R\subseteq R''$。
- $r(R)=R \Rightarrow R$是自反的, 就是证明R符合自反的定义, 即对于任意的$a\in A$, $(a, a)\in R$.
- (2), (3)的证明类似.

- 定理2.6　设R_1和R_2是A上的二元关系，若$R_1 \subseteq R_2$则

(1)$r(R_1) \subseteq r(R_2)$;

(2)$s(R_1) \subseteq s(R_2)$;

(3)$t(R_1) \subseteq t(R_2)$。

- 证明思想：反证法：
- （1）假设$(x, y)\in r(R_1)$, 但$(x, y)\notin r(R_2)$，则$r(R_1) - \{(x, y)\}$也是自反的，即$x\neq y$; 如果$(x, y)\in R_1$, 则$(x, y)\in R_2$，那么$(x, y)\in r(R_2)$，导致矛盾，所以$(x, y)\notin R_1$。则$r(R_1) - \{(x, y)\}\supseteq R_1$，则$r(R_1)$不是$R_1$的自反闭包。矛盾。$(x, y)\in r(R_2)$。$r(R_1)\subseteq r(R_2)$。
- （2），（3）证明类似。

2.5 关系的闭包

- 三 计算
- 定理2.7 $r(R)=R\cup I_A$

- *证明思想：根据自反闭包定义要满足的性质进行证明。*

- 证明：设$R'=R\cup I_A$，所以$R\subseteq R'$，而且R'是自反的；假设R''是A上的自反关系并且$R\subseteq R''$，对于$(a, b)\in R'$，因为$R'=R\cup I_A$，所以$(a, b)\in R$或者$(a, b)\in I_A$；如果$(a, b)\in R$，则$(a, b)\in R''$；如果$(a, b)\in I_A$，因为R''是自反的，所以$(a, b)\in R''$，即$R'\subseteq R''$。
- 所以$R'=r(R)=R\cup I_A$。

- 定理2.8 $s(R)=R\cup R^{-1}$

- *证明思想：根据对称闭包定义要满足的性质进行证明。*

- 证明：令$R'=R\cup R^{-1}$。由于$(R\cup R^{-1})^{-1}=R\cup R^{-1}$，根据定理2.2，可知$R'=R\cup R^{-1}$是对称的，且$R\subseteq R'$。假设$R''$是$A$上的对称关系，并且$R\subseteq R''$。对于$(a, b)\in R'$有$(a, b)\in R$或者$(a, b)\in R^{-1}$。如果$(a, b)\in R$，由于$R\subseteq R''$，那么$(a, b)\in R''$；如果$(a, b)\in R^{-1}$，则$(b, a)\in R$，所以$(b, a)\in R''$。因为$R''$是对称的，所以$(a, b)\in R''$。因此$R'\subseteq R''$。所以$R'=s(R)= R\cup R^{-1}$。

- 设$A=\{a, b, c\}$，R是A上的二元关系，且$R=\{(a, b), (b, c), (c, a)\}$，则$s(R)=$______。

- */*重庆大学1999考研*/*

- 定理2.9 $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

- *<u>/*证明思想：根据传递闭包定义要满足的性质进行证明：令$R'=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$，证明$R'$满足传递闭包定义的3个条件。*/</u>*

- 证明：
- /*R'是传递的，即如果$(a, b)\in R'$, $(b, c)\in R'$，则$(a, c)\in R'$ */
- 因为$(a, b)\in R'$，必存在整数n，使$(a, b)\in R^n$；同理，因为$(b, c)\in R'$，必存在整数k，使$(b, c)\in R^k$；因为$R^n \circ R^k=R^{n+k}$，所以$(a, c)\in R^{n+k}$，所以$(a, c)\in R'$。

- 证明：（续）
- /* $R \subseteq R'$ */
- 因为$R' = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$，所以$R \subseteq R'$。

- 证明：（续）
- /*对于传递关系R''，如果$R''\supseteq R$, 则$R''\supseteq R'$. */
- 如果$a,b\in A$, $(a, b)\in R'$, 则存在正整数j，使$(a, b)\in R^j$, 即存在j-1个元素$c_1, c_2,\ldots,c_{j-1}$使得$(a, c_1)\in R$, $(c_1, c_2)\in R$, $\ldots(c_{j-1}, b)\in R$. 由于$R''\supseteq R$, 所以$(a, c_1)\in R''$, $(c_1, c_2)\in R''$, $\ldots(c_{j-1}, b)\in R''$. 又因为$R''$是传递的，因此$(a,b)\in R''$。由此证得$R''\supseteq R'$。由传递闭包的定义可知：$R'=t(R)$，即$t(R) =R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$。

- 定理2.10 R是A上的二元关系，且$|A|=n$，则$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^n$

- <u>*/* 证明思想：基本法：由定理2.9可知，$R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^n\subseteq t(R)$；只要证明对任意的$k>0$，$R^k\subseteq R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^n$。 */*</u>

- 证明：/*分而治之*/
- 对于$k \le n$，必有$R^k \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n$ 。
- 对于$k > n$，若$(a, b) \in R^k$，则存在元素个数为$k+1$的元素序列$c_0, c_1, \ldots, c_k$, $c_0 = a$, $c_k = b$, 并且对$1 \le i \le k$，$(c_{i-1}, c_i) \in R$。由于$k > n$，所以在元素序列中必有元素c_i不止出现一次，即$(a, c_1), (c_1, c_2), \ldots, (c_{i-1}, c_i), (c_i, c_p), \ldots, (c_q, c_i), (c_i, c_{i+1}), \ldots, (c_{k-1}, b) \in R$，在删去$(c_i, c_p), \ldots, (c_q, c_i)$这一段后，如果序列中元素个数仍大于$n$，则继续上述过程，直到序列中元素个数$k' \le n$为止。此时有$(a, b) \in R^{k'}$，所以$(a, b) \in R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n$。

2.5 关系的闭包

- 四　其他性质
- 定理2.11　设*R*是*A*上的二元关系。

(1) 若*R*是自反的，则$s(R)$和$t(R)$都是自反的；

(2) 若*R*是对称的，则$r(R)$和$t(R)$都是对称的；

(3) 若*R*是传递的，则$r(R)$是传递的。

- 证明思想：根据自反，对称和传递定义所满足的性质进行证明

- 定理2.12　　设R是A上的二元关系。

(1)$rs(R)=sr(R)$

(2)$rt(R)=tr(R)$

(3)$ts(R) \supseteq st(R)$

公式法：等式推导；基本法

- 证明：（公式法：等式推导）
- （1）右式= $sr(R)$

$= s(R \cup I_A)$

$= (R \cup I_A) \cup (R \cup I_A)^{-1}$

$= R \cup I_A \cup R^{-1} \cup I_A^{-1}$

$= R \cup R^{-1} \cup I_A$

$= r(R \cup R^{-1})$

$=rs(R)=$左式

- 证明：（公式法：等式推导）
- （2）右式$=tr(R)=t(R\cup I_A)$

$= (R\cup I_A) \cup (R\cup I_A)^2 \cup (R\cup I_A)^3 \cup \ldots\ldots$

/*可以证明$(R\cup I_A)^n = I_A\cup R\cup R^2\cup\ldots \cup R^n$*/

$= I_A\cup R\cup R^2\cup\ldots\ldots$

$= I_A\cup t(R)$

$=rt(R)=$左式

- 证明：　（公式法：等式推导）
- （3）由于$s(R)=R\cup R^{-1}\supseteq R$, 根据定理2.6，有$ts(R)\supseteq t(R)$，　$sts(R)\supseteq st(R)$。而由定理2.11可知，$ts(R)$是对称的，所以$sts(R)=ts(R)$。因此$ts(R)\supseteq st(R)$。

2.6 等价关系与划分

- 一　　等价关系与划分
- 1　定义2.12（划分）
- 设A是一个集合。$A_i \subseteq A$, $A_i \neq \varnothing$, $i=1, \ldots, n$。若$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A$，$A_i \cap A_j = \varnothing$（$i, j=1, \ldots n$, $i \neq j$），则称$\pi=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$是$A$的一个划分。其中每个$A_i$称为划分$\pi$的一个块。
- /*物以类聚，人以群分*/

- 例2.21　设A={a, b, c}，A的子集组成的集合：
- P={{a,b}, {c}}
- S={{a}, {b}, {c}}
- T={{a, b, c}}
- U={{a}, {c}}
- V={{a, b}, {b, c}}
- W={{a, b}, {a, c}, {c}}
- P, S, T是A的划分，其他不是A的划分。

- 2 划分的块数可以是无限的
- 例2.22：整数I的划分:
- $\pi_1=\{E, O\}$，其中E为偶数集，O为奇数集；
- $\pi_2=\{\{0\}, \{-1, 1\}, \{-2, 2\}, \{-3, 3\}, \ldots\ldots\}$也是I的一个划分。

- 3 定义2.13（等价关系）
- 设R是A上的二元关系，若R是自反的、对称的和传递的，则称R是A上的等价关系。若aRb，则称a与b等价。

- 例2.23 设A是一个学生集合, 定义A上二元关系R: $(a, b)\in R$当且仅当a与b同年龄. R是等价关系.

2.6 等价关系与划分

- 二　术语
- 1　定义2.14（等价类）
- 设R是A上的等价关系，对于每个$a \in A$，与a等价的元素全体所组成的集合称为由a生成的关于R的等价类，记为$[a]_R$，即 $[a]_R = \{x \mid x \in A, xRa\}$，$a$称为该等价类的代表元。

$[a]_R$简记为$[a]$。

- 2 定义2.15（商集）
- 设R是A上的等价关系，关于R的等价类全体所组成的集合族称为A上关于R的商集，记为A/R，即$A/R=\{[a]\mid a\in A\}$。

2.6 等价关系与划分

- 三　　性质
- 定理2.13　　设R是A上的等价关系，则

（1）对任一$a\in A$，有$a\in[a]$;

（2）对$a, b\in A$，如果aRb，则$[a]=[b]$;

（3）对$a, b\in A$，如果$(a, b)\notin R$，则$[a]\cap[b]=\varnothing$;

（4）$\cup_{a\in A}[a]=A$。

/*（1）根据定义的性质进行证明：*/

证明：由于R是自反的，即aRa，所以$a\in[a]$。

/*（2）基本法证明；*/

证明：

/*先证明$[a]\subseteq[b]$*/

对任一$c\in[a]$，有cRa，又由假设aRb，根据R是传递的，必有cRb，即$c\in[b]$，从而$[a]\subseteq[b]$；

/*再证明$[b]\subseteq[a]$ */

对任一$c\in[b]$，有cRb，又由假设aRb，根据R是传递的，必有cRa，即$c\in[a]$，从而$[b]\subseteq[a]$；

所以$[a]=[b]$。

/*（3）反证法证明；*/

证明：设$(a, b) \notin R$，如果$[a] \cap [b] \neq \varnothing$; 假设$c \in [a] \cap [b]$, 则$c \in [a]$且$c \in [b]$, 从定义可知$cRa$，$cRb$。由$R$的对称性和传递性，必有$aRb$，导致矛盾。所以$[a] \cap [b] = \varnothing$。

/*（4）基本法证明 */

证明：对任一$c\in\cup_{a\in A}[a]$，存在b使$c\in[b]$。而$[b]\subseteq A$，从而$c\in A$，所以$\cup_{a\in A}[a]=A$ 。

- 定理2.13(1): A中每个元素所产生的等价类都是非空的；
- 定理2.13(2)(3): 互相等价的元素属于同一个等价类, 不等价的元素所属的等价类没有公共元素;
- 定理2.13(4): A上关于R的商集A/R={ [a] | $a \in A$ }就是A的一个划分, [a]是该划分的一个块.

2.6 等价关系与划分

- 定理2.14　　集合A上的任一划分可以确定A上的一个等价关系R。
- 由π建立的等价关系 $R=(A_1\times A_1)\cup(A_2\times A_2)\cup\ldots\ldots\cup(A_n\times A_n)$
- 证明$R=(A_1\times A_1)\cup(A_2\times A_2)\cup\ldots\ldots\cup(A_n\times A_n)$是一个等价关系，即证明$R$是自反、对称和传递的。
- 构造性证明的思想

- 例2.26 设A={ a, b, c, d, e, f }的一个划分 π={{a, b}, {c, d}, {e, f}},由π确定A上的一个等价关系R:
- R=({a, b}×{a, b}) ∪({c, d} × {c, d})∪({e, f} × {e, f})
- ={(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d), (e, e), (e, f), (f, e), (f, f)}

- 定理2.15　　设R_1和R_2是A上的等价关系，$R_1=R_2 \Leftrightarrow A/R_1=A/R_2$。

- 定理2.13和定理2.15: 任一等价关系唯一确定一个划分.
- 定理2.14和定理2.15: 任一划分唯一确定一个等价关系.

- 定理2.16 设R_1和R_2是A上的等价关系，则 $R_1 \cap R_2$是A上的等价关系。

- 例：设A={1, 2, 3, 4, 5}，A上的二元关系R中，有多少个是等价关系？

- *因为等价类划分和等价关系是一一对应的，所以A上的二元关系中等价关系的个数等于A的划分个数。*
- *西安交通大学1998考研*

- 解：对于A的划分可分为如下几种情况：
- （1）　　划分成5个都只含1个元素的块，共有1种；
- （2）　　划分成1个都只含2个元素，3个都只含1个元素的块，共有10种；
- （3）　　划分成2个都只含2个元素，1个都只含1个元素的块，共有15种；
- （4）　　划分成1个都只含3个元素，2个都只含1个元素的块，共有10种；
- （5）　　划分成1个都只含3个元素，1个都只含2个元素的块，共有10种；
- （6）　　划分成1个都只含4个元素，1个都只含1个元素的块，共有5种；
- （7）　　划分成1个都只含5个元素的块，共有1种；
- 综上所述，A上的等价关系共有1+10+15+10+10+5+1=52

2.6 等价关系与划分

- 四、划分的积
- 定义2.16 (划分的积)

设R_1和R_2是A上的等价关系，由R_1和R_2确定A的划分分别为π_1和π_2，A上的等价关系$R_1 \cap R_2$确定的划分，称为π_1与π_2划分的积，记为$\pi_1 \cdot \pi_2$。

- 例：A是学生集合，R_1是A上的同年级关系，R_2是A上的同专业关系。则$R_1 \cap R_2$是A上的同年级并且同专业的关系。

- 定义2.17(细分)

  设π和π'是A的划分，若π'的每一块包含在π的一块中，称π'细分π，或称π'加细π。

- 例：A是学生集合，π是在A中按学院的划分，π'是在A中按专业的划分。

- 定理2.17

  设π和π'是A的划分，它们确定A上的等价关系R和R'，则π'细分π当且仅当$R'\subseteq R$。

例： A是学生集合，π是在A中按学院的划分，π'是在A中按专业的划分。π和π'确定A上的等价关系R和R'分别是同学院同学关系和同专业同学关系，$R'\subseteq R$。

- 证明：
- /* π'细分$\pi \Rightarrow R' \subseteq R$， 基本法*/
- 对于任一$(a, b) \in R'$，存在π’的某块S’，使a, b∈S’。因为π’细分π，所以必存在一块S，使$S' \subseteq S$。因此a, b∈S， 从而$(a, b) \in R$。
- /* $R' \subseteq R \Rightarrow \pi'$细分$\pi$ */
- 设S’是π’的一块，a∈S’则$S' = [a]_{R'} = \{x | xR'a\}$。对S’中的每一个x，因为$R' \subseteq R$，所以由xR’a可推出xRa。因此$\{x|xR'a\} \subseteq \{x|xRa\}$，即 $[a]_{R'} \subseteq Z[a]_{R'}$。π’的一块包含在π的一块中，所以π’细分π。

- 定理2.18($\pi_1 \cdot \pi_2$与π_1和π_2的联系)

  设π_1和π_2是A的划分，则

  （1） $\pi_1 \cdot \pi_2$细分π_1和π_2;

  （2）设π'是A的划分，若π'细分π_1和π_2, 则π'细分$\pi_1 \cdot \pi_2$。

- /* $\pi_1 \cdot \pi_2$细分π_1和π_2; 并且是同时细分π_1和π_2的最小划分（划分块数最少）*/

- 证明：
- （1）由$R_1\cap R_2\subseteq R_1$, $R_1\cap R_2\subseteq R_2$，即得。
- （2）若$R'\subseteq R_1$，$R'\subseteq R_2$则$R'\subseteq R_1\cap R_2$即得。

- 例2.27 设学生集合A={a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k},

按同年龄分为一组，得A的划分：

π_1 ={{a, b, c, d}, {e, f, g}, {h, i}, {j, k}}。

按同班级分为一组，得A的划分：

π_2 ={{a, b, c, h}, {d, i}, {e, f, j, k}, {g}}。

$\pi_1 \cdot \pi_2$ ={{a, b, c}, {d}, {e, f}, {g}, {h}, {i}, {j, k}}

同一组内任两个学生既在同年龄组中，又在同班级组中。

不在$\pi_1 \cdot \pi_2$同一组中的两个学生，还可能在同一年龄组中或同一班级组中。

- 五、划分的和
- 定理2.19

  设R_1和R_2是A上的等价关系，则$(R_1 \cup R_2)^+$是A上的等价关系。

- 定义2.18 (划分的和)

  设R_1和R_2是A上的等价关系，由R_1和R_2确定A的划分分别为π_1和π_2，A上的等价关系$(R_1 \cup R_2)^+$所确定A的划分称为π_1和π_2划分的和，记为$\pi_1+\pi_2$。

- 定理2.20

  设π_1和π_2是A的划分，则

  （1） π_1与π_2细分$\pi_1+\pi_2$;

  （2）设π'是A的划分，若π_1和π_2细分π'，则$\pi_1+\pi_2$细分π'。

- $\pi_1+\pi_2$被π_1与π_2细分，并且是同时被π_1与π_2细分的最大划分（划分的块数最多）

- 证明:
- (1)由$R_1 \subseteq (R_1 \cup R_2)^+$, $R_2 \subseteq (R_1 \cup R_2)^+$,即得.
- (2)若$R_1 \subseteq R'$, $R_2 \subseteq R'$则$R_1 \cup R_2 \subseteq R'$.由闭包定义的第三条件可知$(R_1 \cup R_2)^+ \subseteq R'$, 即$(R_1 \cup R_2)^+$是包含$R_1 \cup R_2$的最小的等价关系.

- 例2.28 在例2.27中, 学生集合的划分为π_1, π_2,
- $\pi_1+\pi_2=\{\{a, b, c, d, h, i\}, \{e, f, j, k\}\}$
- 在$\pi_1+\pi_2$同一组中的任两个学生不是在π_1中，就是在π_2中，不在$\pi_1+\pi_2$同一组中的任两个学生必定不在同一年龄组中，也不在同一班级组中。

- 定理2.21

  设集合A，对于$a, b\in A$，a, b在$\pi_1+\pi_2$的同一块中，当且仅当在A中存在元素序列$a, c_1, \ldots, c_k, b$，使得序列中每相邻两个元素在π_1的同一块中或在π_2的同一块中。

- 证明：由$\pi_1+\pi_2$的定义可知， a, b在$\pi_1+\pi_2$的同一块中，对应于$(a, b)\in(R_1\cup R_2)^+$，由定理2.9知，存在正整数k+1，使$a(R_1\cup R_2)^{k+1}b$，即存在k个元素$c_1, \ldots, c_k\in A$，使$a(R_1\cup R_2)c_1, \ldots, c_k(R_1\cup R_2)b$。因为$R_1$，$R_2$是$A$ 上的等价关系，所以a, c_1在π_1或π_2的同一块中，…，c_k, b在π_1或π_2的同一块中， a和b是链接的。反之亦然。

2.7 次序关系

- 一　偏序关系、偏序集
- 定义2.19(偏序关系)

　　设R是A上的二元关系，若 R是自反的、反对称的和传递的，则称R是A上的偏序关系。又记为$\leq$。（并不意味小于等于）

常见的偏序关系：$\leq$, $\subseteq$ ……

- 定义2.20(偏序集)

  若集合*A*具有偏序关系*R*（或 $\leq$），则称*A*为偏序集，记为（*A*, *R*）或（*A*, $\leq$）。

- 哈斯图：表示偏序集。若$a \leq b$，则结点*a*在*b*之下；若*a*与*b*之间不存在其他元素*c*，使$a \leq c$，$c \leq b$则在*a*与*b*之间用一线相连。

2.7 次序关系

- 例2.29
- 例2.30
- 题目类型：给出集合和集合上的二元关系，画出哈斯图。

- 判断是否正确，并说明理由。
- 设A和B为集合，R是A的幂集$P(A)$上的二元关系，对所有$S, T \in P(A)$，$(S, T) \in R$。当且仅当$|S| \leq |T|$，R是偏序关系。
- /*复旦大学1999考研*/

- 证明整除关系是正整数集合上的偏序关系。

- */*北京师范大学1999考研*/*

2.7 次序关系

- 二 拟序关系
- 定义2.21（拟序关系）

  A上的二元关系 R是反自反的和传递的，称R为A上的拟序关系。称(A, R)为拟序集，或记为$(A, <)$。（不意味着小于）

- 定理2.22

  A上的二元关系 R是拟序的，则R必为反对称的。

证明：反证法

2.7 次序关系

- 定理2.23

  设R是A上的二元关系，则

  (1)若R是A上的拟序关系，则$r(R)=R\cup I_A$是A上的偏序关系；

  (2) R是A上的偏序关系，则$R-I_A$是A上的拟序关系；

- 证明方法：根据定义给出的性质证明。

2.7 次序关系

- 三 全序关系
- 定义2.22（全序关系）

  设$\leq$是集合A 上的二元关系，如果对于A中任意两个元素$a, b \in A$，必有$a \leq b$或$b \leq a$，则称 $\leq$是A上的全序关系（或线性次序关系）。
- 定义2.23（全序集）

  若集合A具有全序关系$\leq$或R，则称A为全序集或线性次序集，记为$(A, \leq)$或(A, R)。

实例：字典序

2.7 次序关系

- 四　最大元、最小元、极大元、极小元
- 定义2.22（最大元、最小元、极大元、极小元）

设偏序集$(A, \leq)$，$B \subseteq A$，

(1)最大元、最小元

若存在一个元素$b \in B$，对所有$b' \in B$都有$b' \leq b$，则称b是B的最大元；若都有$b \leq b'$，则称b是B的最小元；

(2)极大元、极小元

若存在一个元素$b \in B$，且在B中不存在元素b'使$b \neq b'$，$b \leq b'$，则称b是B的极大元；若在B中不存在元素b'使$b \neq b'$，$b' \leq b$，则称b是B的极小元；

2.7 次序关系

(3)上界、下界

若存在一个元素$a \in A$，对所有$b' \in B$都有$b' \leq a$，则称a是B的上界；对所有$b' \in B$都有$a \leq b'$，则称a是B的下界；

(4)上确界、下确界

若$a \in A$是B的上界且对B的每个上界a'都有$a \leq a'$，则称a是B的上确界（最小上界）；若$a \in A$是B的下界且对B的每个下界a'都有$a' \leq a$，则称a是B的下确界（最大下界）。

2.7 次序关系

- 定理2.24　　设偏序集$(A, \leq)$，$B \subseteq A$，若在B中存在最大元（最小元），则必唯一。
- 证明：　（反证）

- 定理2.25　　设偏序集（$A, \leq$ ），$B \subseteq A$，在B中存在最大元（最小元）必为极大元（极小元）。

- 例2.32, 2.33(题目类型)

- 写出集合$A=\{a, b, c\}$的幂集$P(A)$，并画出偏序集$(P(A), \subseteq)$的哈斯图。

- /*北京航空航天大学1996考研试题*/

数学教育对计算机科学专业人才的培养目的

- 通过教学使学生掌握进一步学习这一学科所需要的数学知识；
- 通过严格的数学训练，使学生实现思维方式或思维过程的数学化。

思维方式的数学化

- 从普通人的思维方式转向数学家工作的思维方式：

　　通过对事物的抽象，运用特殊的符号或语言系统，研究事物在空间中的数量关系、位置关系、结构关系和变换规律，研究具有共同抽象概念、性质的一类事物的某些内在规律，以此指导人们从另一个侧面去认识事物。

实现思维方式数学化的步骤

- 第一阶段

通过对数学分析、高等代数、概率统计等数学课程的学习，使学生熟悉和习惯于使用数学语言和符号系统对研究的数学对象进行严格的分析、表述、计算和推演，初步实现思维方式的数学化。

实现思维方式数学化的步骤

- 第二阶段

　　　数学学习转向以计算机科学为背景的离散数学和理论计算机科学的学习，特别是通过对数理逻辑系统的学习，使学生思维方式逐步上升为系统的理性思维方式

- 建议使用国内外优秀教材
- 习题应全部作。

习题解析（内容一：关系的性质）

- 关系的性质

1）举出$A=\{1, 2, 3\}$上关系R的例子，使其具有下述性质：

a) 既是对称的，又是反对称的；

b) 既不是对称的，又不是反对称的；

c) 是传递的。

解：a) $R=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

b) $R=\{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$

c) $R=\{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

- 2）举出一个集合上关系的例子，分别适合于自反，对称，传递中的两个且仅适合两个。
- 解：$A=\{a, b, c\}$
- A) $R=\{(a, a)\}$对称，传递，不自反；
- B) $R=\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b)\}$自反，传递，不对称；
- C) $R=\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (b, a), (c, b)\}$自反，对称，不传递

- 2.4 是非判断：设R和S是A上的二元关系，确定下列命题是真还是假。如果命题为真，则证明之；如果命题为假，则给出一个反例。
- （1）若R和S是传递的，则$R \cup S$是传递的。
- 假。R={(1, 2)}, S={(2, 3)}。
- （2）若R和S是传递的，则$R \cap S$是传递的。
- 真。反证法证明。假设$R \cap S$不是传递的，则$(a, b) \in R \cap S$, $(b, c) \in R \cap S$, 而$(a, c) \notin R \cap S$。所以$(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$；$(a, b) \in S$, $(b, c) \in S$；因为R和S是传递的，则$(a, c) \in R$, $(a, c) \in S$；就有$(a, c) \in R \cap S$。导致矛盾。

- (3)若R和S是传递的，则$R \circ S$是传递的。
- 假。$R=\{(1, 4), (2, 5)\}$, $S=\{(4, 2), (5, 3)\}$。
- (4)若R是传递的，则R^{-1}是传递的。
- 真。反证法证明。假设R^{-1}不是传递的，则$(a, b) \in R^{-1}$, $(b, c) \in R^{-1}$, 而$(a, c) \notin R^{-1}$。所以$(c, b) \in R$, $(b, a) \in R$；又因为R是传递的，所以$(c, a) \in R$。因此$(a, c) \in R^{-1}$。所以导致矛盾。

- (5) 若R和S是自反的，则$R \cup S$是自反的。
- 真。根据自反的性质证明。对于任意的$a \in A$, $(a, a) \in R$, 所以$(a, a) \in R \cup S$。则$R \cup S$是自反的。
- (6)若R和S是自反的，则$R \cap S$是自反的。
- 真。同理，根据自反的性质证明。对于任意的$a \in A$, $(a, a) \in R$, $(a, a) \in S$, 所以$(a, a) \in R \cap S$。则$R \cap S$是自反的。

- (7)若R和S是自反的，则RoS是自反的。
- 真。同理，根据自反的性质证明。对于任意的$a\in A$, $(a, a)\in R$, $(a, a)\in S$, 所以$(a, a)\in RoS$。则RoS是自反的。
- (8)若R是自反的，则R^{-1}是自反的。
- 真。同理，根据自反的性质证明。对于任意的$a\in A$, $(a, a)\in R$, 则$(a, a)\in R^{-1}$。

- (9) 若R和S是对称的，则$R \cup S$是对称的。
- 真。根据对称的性质证明。对于任意的 $(a, b) \in R \cup S$, 则$(a, b) \in R$或$(a, b) \in S$；因为R和S是对称的，所以$(b, a) \in R$或$(b, a) \in S$。因此$(b, a) \in R \cup S$， $R \cup S$是对称的。
- (10)若R和S是对称的，则$R \cap S$是对称的。
- 真。同理，根据对称的性质证明。对于任意的 $(a, b) \in R \cap S$, 则$(a, b) \in R$并且$(a, b) \in S$；因为R和S是对称的，所以$(b, a) \in R$并且$(b, a) \in S$。因此$(b, a) \in R \cap S$， $R \cap S$是对称的。

- (11)若R和S是对称的，则RoS是对称的。
- 假。R={(1, 2), (2, 1)}, S={(2, 3), (3, 2)}。则RoS={(1, 3)}。
- (12)若R是对称的，则R^{-1}是对称的。
- 真。根据对称的性质证明。对于任意的 (a, b)$\in$ R^{-1}, (b, a)$\in$R; 因为R是对称的, 则(a, b)$\in$R; 所以(b, a)$\in$ R^{-1}。则R^{-1}是对称的。

- (13) 若R和S是反对称的，则$R \cup S$是反对称的。
- 假。$R=\{(1, 2)\}$, $S=\{(2, 1)\}$,则$R \cup S=\{(1, 2), (2, 1)\}$。
- (14) 若R和S是反对称的，则$R \cap S$是反对称的。
- 真。反证法证明。设$R \cap S$不是反对称的。则存在$(a, b) \in R \cap S$, $(b, a) \in R \cap S$, $a \neq b$。则$(a, b) \in R$, $(b, a) \in R$, 与R是反对称的矛盾。

- (15) 若R和S是反对称的，则RoS是反对称的。
- 假。R={(1, 3), (2, 4)}, S={(3, 2), (4, 1)}, 则RoS={(1, 2), (2, 1)}，不是反对称的。
- (16) 若R是反对称的，则R^{-1}是反对称的。
- 真。反证法证明。设R^{-1}不是反对称的。则存在(a, b)$\in R^{-1}$, (b, a)$\in R^{-1}$, $a\neq b$。则(a, b)$\in$R, (b, a)$\in$R, 与R是反对称的矛盾。

习题解析（内容二：等价关系）

- 1）设R_1和R_2是A上的等价关系，C_1和C_2分别是A中关于R_1和R_2的划分。

  证明：$R_1 \subseteq R_2$，当且仅当C_1中的每个等价类是包含于C_2的一些等价类之中。

/*证明思想：划分与等价关系：由π建立的等价关系$R=(A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \ldots\ldots \cup (A_n \times A_n)$
*/

习题解析（内容二）

- 2）设R是A上的二元关系，$S=\{(a, b) \mid$ 对于某一c，有$(a, b)\in R, (b, c)\in R\}$，证明如果 R是A上的等价关系，则S是A上的等价关系。

- /*证明思想： 证明S是等价关系，即证明S是自反的，对称的和传递的。*/

习题解析（内容二）

- 3）设R_1和R_2是A上的等价关系，试确定以下各式，哪些是A上的等价关系，对不是的式子，提供反例。

a) $(A\times A)-R_1$;

b) $R_1- R_2$;

c) R_1^2;

d) $r(R_1- R_2)$.

思想：判断是否自反、对称和传递

- 2.19 确定下列各式是不是A={1,2,3,4,5}上的等价关系,如果是等价关系, 请写出它的等价类。
- (1){(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(3,1),(1,5),(5,1),(3,5),(5,3)}
- 是
- 等价类为:
- [1]=[3]=[5]={1,3,5}
- [2]={2}
- [4]={4}

- (2){(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(3,1),(3,4),(4,3)};
- 不是.因为(1,3),(3,4)∈R,而(1,4)∉R.
- (3){(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)};
- 不是. 因为A={1,2,3,4,5},而(5,5)∉R
- (4){(a,b)|4整除a-b},a,b∈A;
- 是
- [1]=[5]={1,5},[2]={2},[3]={3},[4]={4}
- (5){(a,b)|3整除a+b},a,b∈A;
- 不是.
- 因为A={1,2,3,4,5},而1+1不能被3整除,故(1,1)∉R
- (6){(a,b)|a整除2-b},a,b∈A。
- 不是.
- 因为A={1,2,3,4,5},而5不能整除2-5=-3,故(5,5)∉R

- 2.22 设R是A上的传递和自反关系，设T是A上的二元关系：(a,b)$\in$T当且仅当(a,b)和(b,a)都属于R，证明T是一个等价关系。

- 证明:(注意,T是A上的二元关系.)
- （1）自反：对任意a∈A,(关键证明(a,a)∈T)；因为R是A上的自反关系，所以(a,a)∈R, (a,a)∈R, 因此根据T的定义,有(a,a)∈T.
- （2）对称:若(a,b)∈T,则(a,b)和(b,a)都属于R, 因此(b,a)和(a,b)都属于R, 所以(b,a)∈T.

- （3）传递: 若$(a,b)\in T,(b,c)\in T$(关键证明$(a,c)\in T$, 即要证明$(a,c)\in R,(c,a)\in R$)。由于$(a,b)\in T,(b,c)\in T$, 则(a,b)和(b,a)都属于R,(b,c)和(c,b)都属于R, 因为R传递,所以当(a,b)和(b,c)都属于R时,有(a,c)属于R, 同样当(b,a)和(c,b)都属于R时,有(c,a)属于R。因为$(a,c)\in R,(c,a)\in R$, 所以$(a,c)\in T$。

- 2.23 设R是一个二元关系,设S={(a,b)|存在某个c,使$(a,c)\in R$且$(c,b)\in R$}。证明如果R是一个等价关系则S也是一个等价关系。

- 证明:
- （1）自反:对任意a∈A,（证明(a,a)∈S)。因为R是A上的自反关系，所以(a,a)∈R,(a,a)∈R, 因此根据S的定义,有(a,a)∈S.
- （2）对称:若(a,b)∈S,则存在c∈A,使得(a,c)和(c,b)都属于R，因为R对称，因此(c,a)和(b,c)都属于R，即(b,c)和(c,a)都属于R，故根据S的定义,有(b,a)∈S。

- （3）传递：若(a, b)∈S, (b, c)∈S(关键证明(a, c)∈S, 即要证明存在d∈A, 使得(a, d)和(d, c)都属于R)。由于(a, b)∈S，所以存在e∈A, 使得(a, e)和(e, b)都属于R，同样因为(b, c)∈S，所以存在f∈A, 使得(b, f)和(f, c)都属于R，因为R传递，所以当(a, e)和(e, b)属于R时, 有(a, b)∈R，当(b, f)和(f, c)属于R时, 有(b, c)∈R，现在(a, b)和(b, c)属于R, 根据S的定义, 有(a, c)∈S。

- 2.24 设R是A上的一个自反关系，证明R是一个等价关系当且仅当若$(a,b)\in R$,$(a,c)\in R$则$(b,c)\in R$。

- 证明:(1) R是一个等价关系,则当$(a,b)\in R,(a,c)\in R$必有$(b,c)\in R$(要说明的是,在$(a,b)\in R,(a,c)\in R$前提下导出$(b,c)\in R$)。若当$(a,b)\in R,(a,c)\in R$,(要证明$(b,c)\in R$),因为R对称,所以当$(a,b)\in R$时,有$(b,a)\in R$,因为R传递,所以当$(b,a)\in R,(a,c)\in R$时有$(b,c)\in R$.

- (2) R是A上的一个自反关系, 当(a,b)∈R,(a,c)∈R必有(b,c)∈R,证明R是等价关系
- 自反:条件已知;
- 对称:若(a,b)∈R,因为R自反S,故(a,a)∈R, 现在(a,b)∈R,(a,a)∈R,则根据条件(b,a)∈R;
- 传递: 若(a,b)∈R,(b,c)∈R

(关键证明(a,c)∈R, 注意与条件不同，当(a,b)∈R,(a,c)∈R必有(b,c)∈R, 而要证明的是(a,b)∈R,(b,c)∈R导出(a,c)∈R)

- 证明:因为(a,b)∈R,(b,c)∈R, 而R对称,所以(b,a)∈R, 现在(b,a)∈R,(b,c)∈R, 所以根据条件有(a,c)∈R

习题解析（内容三：序关系）

- 序关系

1）设R是A上的自反和传递关系，证明A上存在一个等价关系S，且在A/S上存在偏序关系R'，使得$([x], [y]) \in R' \Leftrightarrow (x, y) \in R$。

习题解析（内容三）

2）设R是A上的二元关系，A'是A的子集，定义A'上的关系R'如下：

$$R'=R\cap(A'\times A')$$

确定下述命题真假并证明：

a)如果R在A上是传递的，则R'在A'上是传递的；

b)如果R是A上的偏序关系，则R'是A'上的偏序关系；

c)如果R是A上的拟序关系，则R'是A'上的拟序关系；

d)如果R是A上的全序关系，则R'是A'上的全序关系；

习题解析（内容三）

- 3）画出集合A={1, 2, 3, 4, 5, 6}在偏序关系“整除”下的哈斯图，并讨论：

a) 写出{1, 2, 3, 4, 5, 6}的极大元，极小元，最大元，最小元；

b) 分别写出{2, 3, 6}和{2, 3, 5}的上界，下界，上确界，下确界。

习题解析（内容四：闭包）

- 2.13 设R_1和R_2是集合A上的二元关系，
- (3) $t(R_1)\cup t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)$。
- 证明方法1：（公式法）因为$R_1\subseteq R_1\cup R_2$，$R_2\subseteq R_1\cup R_2$，所以$t(R_1)\subseteq t(R_1\cup R_2)$，$t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)$；所以$t(R_1)\cup t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)$。
- 证明方法2：（基本法）
- 用反例说明$t(R_1\cup R_2)\neq t(R_1)\cup t(R_2)$。
- $R_1=\{(a,b)\}$, $R_2=\{(b,c)\}$, R_1和R_2传递，所以$t(R_1)=R_1$，$t(R_2)=R_2$，而 $R_1\cup R_2=\{(a,b),(b,c)\}\neq t(R_1\cup R_2)$，但$t(R_1)\cup t(R_2)= R_1\cup R_2$

- 2.14 设R是A上的二元关系。
- (1)若R是自反的,则s(R)和t(R)都是自反的;
- (2)若R是对称的,则r(R)和t(R)都是对称的;
- (3)若R是传递的,则r(R)是传递的。
- 证明:(1) 因为$R\subseteq s(R)$,$R\subseteq t(R)$, 对任意的$a\in A$, 因为R自反, 所以有$(a,a)\in R$, 因此有$(a,a)\in s(R)$, $(a,a)\in t(R)$, 故s(R)和t(R)自反;

- (2)对任意$(a,b)\in r(R)=R\cup I_A$, 若$(a,b)\in R$,则因为R对称,所以$(b,a)\in R$, 若$(a,b)\in I_A$,则$a=b$. 因此总有$(a,b)\in r(R)$, 所以$r(R)$是对称的;

  对任意$(a,b)\in t(R)$, 存在k,使得$(a,b)\in R^k$, 则存在$c_1,c_2,\ldots c_{k-1}$, 使得$(a,c_1)\in R,(c_1,c_2)\in R$, $\ldots(c_{k-1},b)\in R$. 因为R对称,所以有 $(b,c_{k-1})\in R$, $\ldots(c_2,c_1)\in R$, $\ldots(c_1,a)\in R$. 所以$(b,a)\in R^k$, 所以$(b,a)\in t(R)$. $t(R)$对称

- (3) 对任意$(a,b),(b,c) \in r(R)=R \cup I_A$, 若$(a,b),(b,c) \in R$,则由$R$传递得$(a,c) \in R$; 若$(a,b),(b,c) \in I_A$,则$a=b=c$,条件为$(a,a) \in r(R)$; 若$(a,b) \in R$, $(b,c) \in I_A$,则$b=c$, 条件为$(a,b) \in r(R)$, $(b,b) \in r(R)$. 因此总有$(a,c) \in r(R)$. 则$r(R)$传递。

2.18 设A={a,b,c,d},A上的二元关系 R:R={(a,b), (b,a), (b,c),(c,d)} (2)试求t(R), 并画出它的关系图。

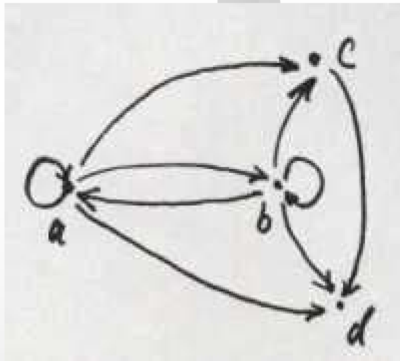
$$R=\{(a,b),(b,a),(b,c),(c,d)\}$$

$$R^2=\{(a,a),(a,c),(b,b),(b,d)\}$$

$$R^3=\{(a,b),(a,d),(b,c),(b,a)\}$$

$$R^4=\{(a,a),(a,c),(b,b),(b,d)\}=R^2$$

$$t(R)=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(b,c),(b,d),(c,d),(a,d),(a,c)\}$$



- (3) 试求R^{2n}, R^{2n+1}。
- 对于n≥1， $R^{2n}=R^2$； $R^{2n+1}=R^3$。

定义、定理和证明

- 定义：描述我们使用的对象和概念。
- 命题：表述某个对象的某种性质。命题可以为真，也可以为假。
- 证明：一种逻辑论证，使人确信一个命题是真的（数学上无懈可击）。
- 定理：被证明为为真的数学命题。
- 引理、推论

证明的类型

- 1 构造性证明

  定理说明存在一种特定的对象。证明方法是说明如何构造这样的对象。

- 2 反证法

  假设这个定理为假，然后证明这个假设导致一个明显的错误结论。

- 3 归纳法

  归纳证明由两部分组成：归纳步骤和归纳基础。

- 3　归纳法

归纳证明由两部分组成：归纳步骤和归纳基础。

设性质为P。

归纳基础：证明P(1)为真；

归纳步骤：对每一个$i \geq 1$，假设P(i)为真，并且利用这一假设证明P(i+1)为真。

作业

习题2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.8, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14, 2.15(1), 2.18, 2.19, 2.29, 2.32, 2.33, 2.24, 2.36