

基于几何形态为曲面的连续介质的有限变形理论研究 固定曲面上流动及曲面自身运动

力学与工程科学系 史倩

指导教师 谢锡麟

摘要：本文基于几何形态为曲面的连续介质的有限变形理论，具体研究了二种典型的运动。其一为固定曲面上连续介质的有限变形运动。具体推导了固定曲面上流动的控制方程分量形式；进一步就不可压缩流动推导了涡一流函数解法，且数值研究了曲面局部扰动对圆柱尾迹的影响。其二为曲面自身的有限变形运动，即膜的运动。具体推导了膜运动的控制方程分量形式；进一步数值研究了轴对称膜的轴对称有限变形运动。本文就控制方程分量形式的推导基于特定形式的三维流动在曲面上的限制，最终结果表现为不依赖于三维流动的具体选取。

关键词：有限变形理论；固定曲面上的流动；膜运动；曲面论

Abstract: Based on the finite deformation theory of the continuous medium limited to surface, two typical motions on the surface are studied in detail in this dissertation. The one is the motion on the fixed surface and the other one the pure motion of the surface. The differential equations with respect to conservation laws are deduced. The vorticity-stream function method for numerical solution of incompressible flow on fixed surface is presented together with some results in order to study how the wake of cylinder is influenced by the surface. We also carry out the numerical study of axisymmetric membrane vibration considering the finite deformation motion.

Keywords: finite deformation; flow on fixed surface; motion on the surface; the theory of surface

引言

几何形态为曲面的连续介质有着广泛的应用背景，如细胞膜、泪液层等生物膜，工业生产中传热传质过程中的保护膜，燃烧、雾化过程以及涂膜工艺，以及封装和净化工业中的应用。从连续介质力学角度来研究方面，殷雅俊（2008）指出生物膜是嵌入在三维 Euclidean 空间中的二维 Riemann 空间 [9]。Roert Irion(1999)评述了皂膜水洞作为新技术对于揭示湍流的旋涡世界的意义[4]。Jun Zhang 等（2000）实验研究了在流动皂膜上引入柔性细丝后的流场形态[3]。尹协振等也对皂膜风洞实验方面进行了相关研究[8]。对于固体薄膜的振动，R.H.Gutierrez(1998)数值模拟了环形（包括圆形）且膜密度关于半径定常函数分

布下自由振动的相关结果[5]。方形膜的大变形自由振动也有相关报道。

借鉴于一般连续介质力学的基本理论体系[1, 2], 谢锡麟等(2012)建立了几何形态为曲面的连续介质的有限变形理论[6, 7]。本文具体考虑了两种典型的几何形态为曲面的连续介质的有限变形运动: 固定曲面上连续介质的有限变形运动, 即固定表面上的流体, 以及曲面自身的有限变形运动, 即膜的运动。推导了其控制方程的分量形式; 并结合基于映照的方法进行了数值研究, 以期从现象和方法上对几何形态为曲面的连续介质的有限变形运动进行了初步探索和分析。

1 概述几何形态为曲面的连续介质的有限变形理论

自身可作有限变形运动的曲面, 其一般的向量值映照表示为:

$$\Sigma(x_\Sigma, t): \mathbb{R}^2 \supset D_\Sigma \ni x_\Sigma = \begin{bmatrix} x_\Sigma^1 \\ x_\Sigma^2 \end{bmatrix} \mapsto \Sigma(x_\Sigma, t) \triangleq \begin{bmatrix} X_\Sigma^1 \\ X_\Sigma^2 \\ X_\Sigma^3 \end{bmatrix} (x_\Sigma, t) \in \mathbb{R}^3, \text{ 类比于一般连续介质}$$

力学理论, 为考虑初始物理构形中两无限接近的介质质点位移同其在当前物理构

$$\text{形中位移的关系, 可引入变形梯度: } \overset{\Sigma}{F} \triangleq \frac{\partial x_\Sigma^i}{\partial \xi_\Sigma^j}(\xi_\Sigma, t) g_i(x_\Sigma, t) \otimes G^j(x_\Sigma) \in T^2(\mathbb{R}^3)。$$

基于变形梯度的有关性质, 我们可以归类当前一初始物理构形构型中有向线元、面元及它们的模, 以及物质导数的转换四类变形形式。例如:

✧ 当前一初始物理构形中有向线元、面元间的转换:

$$\frac{d \overset{t}{C}}{d \lambda}(\lambda) = \overset{\Sigma}{F} \cdot \frac{d \overset{o}{C}}{d \lambda}(\lambda); \quad \frac{\partial \overset{t}{\Sigma}}{\partial \lambda} \times \frac{\partial \overset{t}{\Sigma}}{\partial \mu}(\lambda, \mu) = \det \overset{\Sigma}{F} \cdot \left. \frac{\partial \overset{o}{\Sigma}}{\partial \lambda} \times \frac{\partial \overset{o}{\Sigma}}{\partial \mu}(\lambda, \mu) \right|_{\mathbb{R}^3} \cdot \overset{t}{n}(\lambda, \mu);$$

✧ 当前物理构形中有向线元、面元的物质导数转换:

$$\frac{d \overset{t}{C}}{d \lambda}(\lambda) = \left(\overset{\Sigma}{V} \otimes \overset{\Sigma}{\nabla} \right) \cdot \frac{d \overset{t}{C}}{d \lambda}(\lambda), \quad \frac{\partial \overset{t}{\Sigma}}{\partial \lambda} \times \frac{\partial \overset{t}{\Sigma}}{\partial \mu}(\lambda, \mu) = \left(\overset{\Sigma}{\theta} I - \overset{\Sigma}{\nabla} \otimes \overset{\Sigma}{V} \right) \cdot \left(\frac{\partial \overset{t}{\Sigma}}{\partial \lambda} \times \frac{\partial \overset{t}{\Sigma}}{\partial \mu}(\lambda, \mu) \right)。$$

类似于微积分中的第一类、第二类曲线和曲面积分, 我们可将输运定理分成第一类和第二类。

✧ 第二类输运定理

$$\text{线输运: } \frac{d}{dt} \int_{\overset{t}{C}} \Phi * \tau dl = \int_{\overset{t}{\gamma}} \dot{\Phi} * \tau dl + \int_{\overset{t}{\gamma}} \Phi * \left(\overset{\Sigma}{L} \cdot \tau \right) dl;$$

$$\text{面输运: } \frac{d}{dt} \int_{\overset{t}{\Sigma}} \Phi * n d\sigma = \int_{\overset{t}{\Sigma}} \dot{\Phi} * n d\sigma + \int_{\overset{t}{\Sigma}} \Phi * \left(\overset{\Sigma}{B} \cdot n \right) d\sigma$$

上述*表示任何合法的张量代数运算, 如张量并, 点积、叉乘等。

◇ 第一类输运

$$\text{线输运: } \frac{d}{dt} \int_C \Phi dl = \int_C \dot{\Phi} dl + \int_C \Phi \left(\tau \cdot \overset{\Sigma}{D} \cdot \tau \right) dl;$$

$$\text{面输运: } \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \Phi d\sigma = \int_{\Sigma} \dot{\Phi} d\sigma + \int_{\Sigma} \Phi \overset{\Sigma}{\theta} d\sigma。$$

对于守恒律控制方程, 可有:

◇ 质量守恒

对于密度 ρ , 利用输运方程, 即可得质量守恒的积分型方程:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \rho d\sigma = \int_{\Sigma} \left(\dot{\rho} + \rho \overset{\Sigma}{\theta} \right) d\sigma = 0。由此可得质量守恒的微分方程: $\dot{\rho} + \rho \overset{\Sigma}{\theta} = 0$ 。对于$$

不可压缩流动, 则有: $\overset{\Sigma}{\theta} = 0$ 。进一步得分量形式:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x_{\Sigma}, t) + \dot{x}_{\Sigma}^i \frac{\partial \rho}{\partial x_{\Sigma}^i}(x_{\Sigma}, t) + \rho \left(\overset{\Sigma}{\nabla}_i V^i - H V^3 \right) = 0。$$

◇ 动量守恒

$$\text{考虑曲面上运动的连续介质的各种受力: } \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \rho V d\sigma = F_{sur} + F_{vis} + F_{pre} + \Delta P。$$

此处 F_{sur} 为表面张力作用, F_{vis} 为介质之间粘性力 (摩擦力) 作用, F_{pre} 表示介质间压力作用, ΔP 表示曲面两侧压力差作用。其中:

$$F_{sur} = \gamma \oint_C \tau \times n dl = -\gamma \int_{\Sigma} (\nabla \cdot n) n d\sigma, \quad F_p = -\oint_C \tau \times (pn) dl = \int_{\Sigma} \left[-\overset{\Sigma}{\nabla} p + \overset{\Sigma}{\nabla} \cdot (pn)n \right] d\sigma$$

$$\begin{aligned} F_{vis} &= \oint_C \mu (\tau \times n) \cdot \left(\overset{\Sigma}{\nabla} \otimes \overset{\Sigma}{V} \right) dl = \oint_C \mu (\tau \times n) \cdot \left(\nabla \otimes V|_{\Sigma} - n \otimes \dot{n} \right) dl \\ &= \mu \int_{\Sigma} \left\{ \Delta \otimes V - (\nabla \cdot n) [n \cdot (\nabla \otimes V)] - (n \otimes n) : [\nabla \otimes (\nabla \otimes V)] \right\} d\sigma \end{aligned}$$

最终可得动量守恒的微分形式:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d \overset{\Sigma}{V}}{dt} &= -\gamma (\nabla \cdot n) n - \overset{\Sigma}{\nabla} p + \overset{\Sigma}{\nabla} \cdot (pn)n + \Delta P n \\ &\quad + \mu \left\{ \Delta \otimes V - (\nabla \cdot n) [n \cdot (\nabla \otimes V)] - (n \otimes n) : [\nabla \otimes (\nabla \otimes V)] \right\}_{\Sigma} \end{aligned}$$

上述表面张力、介质之间粘性力、介质内压力作用都可以表示为所选取介质系统边界上的线积分; 应用曲面上的广义 Stokes 公式, 可将线积分转化为介质

上的面积分。由于 Stokes 公式涉及的场及其场论运算是三维的，故我们需要利用上述曲面上的运动的三维化处理。

可基于曲面引入三维曲线坐标系 $X(x, t) \triangleq \Sigma(x_\Sigma, t) + x^3 \cdot n(x_\Sigma, t) \in \mathbb{R}^3$ ，由此可

构造三维运动： $x = x(\xi, t) \triangleq \begin{bmatrix} x_\Sigma(\xi_\Sigma, t) \\ \xi^3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ，继而可得三维运动的速度场分布：

$$V \triangleq \left[\frac{\partial \Sigma}{\partial t}(x_\Sigma(\xi_\Sigma, t), t) + \xi^3 \cdot \frac{\partial n}{\partial t}(x_\Sigma(\xi_\Sigma, t), t) \right] + \left[\dot{x}_\Sigma^i(\xi_\Sigma, t) \cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial x_\Sigma^i}(x_\Sigma(\xi_\Sigma, t), t) + \xi^3 \cdot \dot{x}_\Sigma^i(\xi_\Sigma, t) \cdot \frac{\partial n}{\partial x_\Sigma^i}(x_\Sigma(\xi_\Sigma, t), t) \right]$$

对介质内部压力的三维化考虑局部柱型场，亦即沿法向无梯度。另外如果考虑镜面上镀膜等过程，可能需要考虑介质同镜面之间的摩擦力，对此介质将受到额外的面力，仅需在上述微分型动量方程的右方直接加入相关项就可。

2 典型运动形式：固定曲面上连续介质的有限变形运动

此部分讨论固定曲面上不可压缩流动的理论及计算结果。文献中关于皂膜风洞的实验研究是平面上的流动，依据第 2 节中理论，可以发展二维固定曲面上不可压缩流动的涡流函数解法。

由不可压缩流动的连续性方程可引入流函数：

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_\Sigma^s} \left(\sqrt{g} \cdot V^s \right) (x_\Sigma, t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{g} V^1 =: \frac{\partial \psi}{\partial x_\Sigma^2}(x_\Sigma, t) \\ \sqrt{g} V^2 =: -\frac{\partial \psi}{\partial x_\Sigma^1}(x_\Sigma, t) \end{cases}$$

依据已获得动量守恒方程微分形式，对于粘性部分需计算：

$$-(\nabla \cdot n)[n \cdot (\nabla \otimes V)]_\Sigma = H \left[\frac{\partial}{\partial x^3} \left([\dot{x}_\Sigma^l(\xi_\Sigma, t) - \xi^3 \cdot \dot{x}_\Sigma^i(\xi_\Sigma, t) \cdot b_i^l] g_l^\Sigma \right) \right]_\Sigma = -H b_i^l V_i^\Sigma g^l,$$

$$\text{以及 } -(n \otimes n) : [\nabla \otimes (\nabla \otimes V)]_\Sigma = -n^\alpha n^\beta [\nabla_\alpha (\nabla_\beta V_l)]_\Sigma g^l = -[\nabla_3 (\nabla_3 V_l)]_\Sigma g^l,$$

$$\text{以及 } [\Delta \otimes V]_\Sigma = [\nabla \cdot (\nabla \otimes V)]_\Sigma = [\nabla^\alpha \nabla_\alpha V_l]_\Sigma g^l = [\nabla^j (\nabla_j V_l) + \nabla^3 (\nabla_3 V_l)]_\Sigma g^l$$

$$\text{其中：} [\nabla^j \nabla_j V_l]_\Sigma = [g^{ij} \nabla_i (\nabla_j V_l)]_\Sigma = g^{ij} \nabla_i^\Sigma \nabla_j^\Sigma V_l + H b_i^s V_s^\Sigma - b_i^j b_j^s V_s^\Sigma$$

可得原始变量的动量方程为：

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{V} \cdot \bar{\nabla} \otimes \bar{V} \right) = \left[\mu \left(g^{ij} \bar{\nabla}_i \bar{\nabla}_j \bar{V}_l - b_l^j b_j^s \bar{V}_s \right) - \frac{\partial p}{\partial x^l} \right] g^l - \gamma \left(\bar{\nabla} \cdot n \right) n + \bar{\nabla} \cdot (pn) n + \Delta P n$$

进一步定义固定曲面上运动的涡量 $\omega^3 := \varepsilon^{3kl} \bar{\nabla}_k \bar{V}_l$ ，可推导得得到固定曲面上不可压缩流动的涡一流函数解法（控制方程分量形式）：

流函数控制方程

$$\omega^3 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\bar{\nabla}_1 \bar{V}_2 - \bar{\nabla}_2 \bar{V}_1 \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \bar{V}_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial x^2} \right) = -\frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial x^2} \right) \right]$$

涡量控制方程

$$\rho \frac{\partial \omega^3}{\partial t} = -\rho \bar{V}^k \frac{\partial \omega^3}{\partial x^k} + \mu \left\{ g^{ij} \bar{\nabla}_i \bar{\nabla}_j \omega^3 + 2 \left[\varepsilon^{3kl} \frac{\partial K_G}{\partial x^k} \bar{V}_l + K_G \omega^3 \right] - \varepsilon^{3kl} \bar{\nabla}_k \left(H b_l^s \bar{V}_s \right) \right\}$$

可见相关项耦合于几何信息如平均曲率、高斯曲率，也相容于平面情形。

考察圆柱后平面上叠加凹凸形式的曲面： $z = -e^{-((x-5)^2+y^2)} + e^{-((x-8)^2+y^2)}$ 。图 1 是平均曲率分布图。数值上采用映照的观点，将该区域化为规则的计算域 [10]，涡量控制方程时间导数采用三阶精度的两步预估校正法求解，其中预估步采用二阶精度的 Adams-Bashforth 格式离散；空间导数离散基于不等距 Lagrange 插值公式获得导数计算式。流函数 Poisson 方程求解采用逐次超松弛方法（SOR）迭代求解，取超松弛因子为 1.72。时间步长 0.001，网格数 300×300 ，雷诺数 $Re=100$ 。

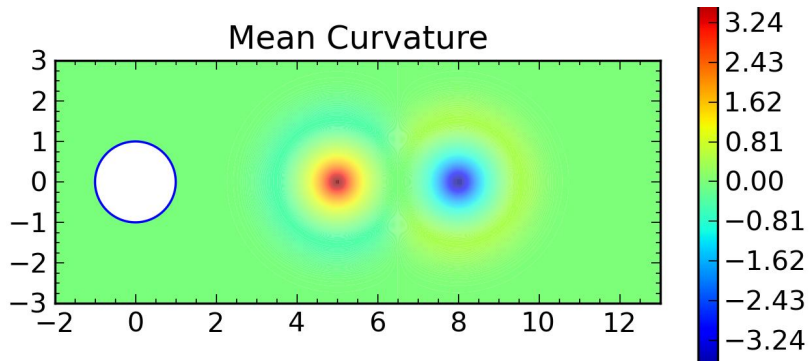


图 1 中间钟形双向凸起曲面上平均曲率分布图

图 2 是计算结果的等流函数图，图 3 是等涡量云图的俯视图，表现了流动从上游平面绕过钟形凹凸的行为：总体而言，尾迹依然有卡门涡街形成，对比平面情形，涡量在非平面部分有被“拉散”的现象，并且传播到下游一定距离，但远场没有受到明显干扰。对于钟形曲面的大小、位置、数量等在本文中做了初步研究，仍有待于进行更为广泛的系统研究。

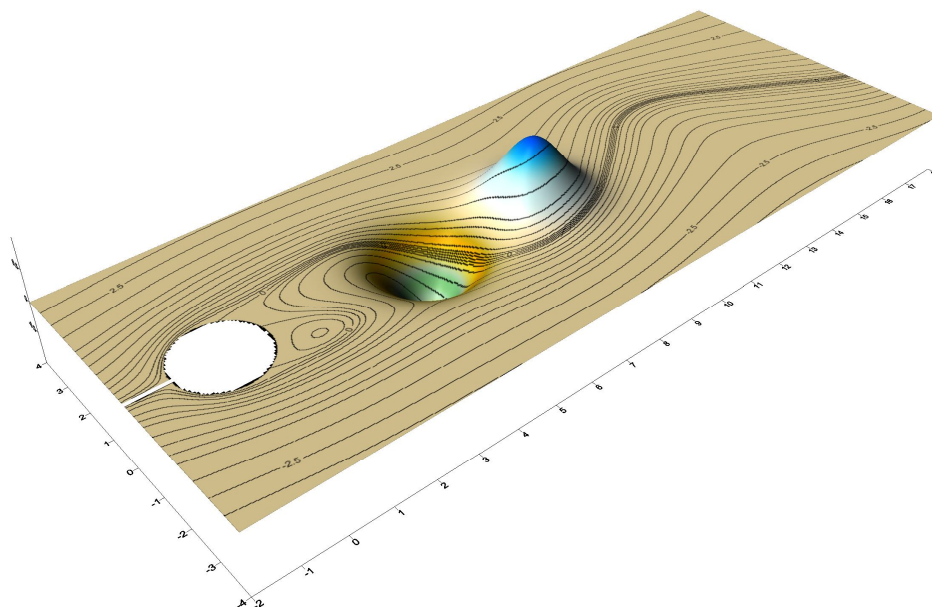


图 2 中间钟形双向凸起曲面上圆柱绕流 流函数分布

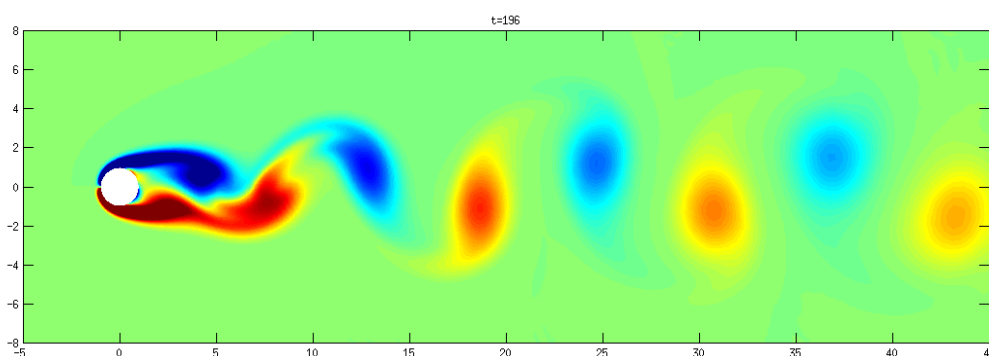


图 3 中间钟形双向凸起曲面上圆柱绕流 涡量分布

作为流场空间动力学行为的刻画方式之一，图 4 为面变形率第一特征值的分布，图 5 对应平面情形。对现固定曲面上流动，且线元为切平面上的向量，则面变形率仅需考虑为：

$$\left(\nabla_j V^i + \nabla^i V_j \right) g_i \otimes g^j, \text{ 此处 } \nabla_j V^i + \nabla^i V_j \triangleq \left(\frac{\partial V^i}{\partial x_\Sigma^j} + \Gamma_{js}^i V^s \right) + g^{ik} g_{jl} \left(\frac{\partial V^l}{\partial x_\Sigma^k} + \Gamma_{ks}^l V^s \right)$$

结合不可压缩流动的连续性方程，上述面变形率对应的特征值满足： $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ 。由于当前物理构形中线元模的相对时间变化率的绝对值不超过第一特征值 λ_1 ，故其分布一定程度反映了变形的程度。中间钟形双向凸起的情形下，在两个峰值处均出现了较为明显的等拉伸率线扭曲现象，并且中心层处的分界线延伸到了 $x = 8$ 以后才出现上下的交融。

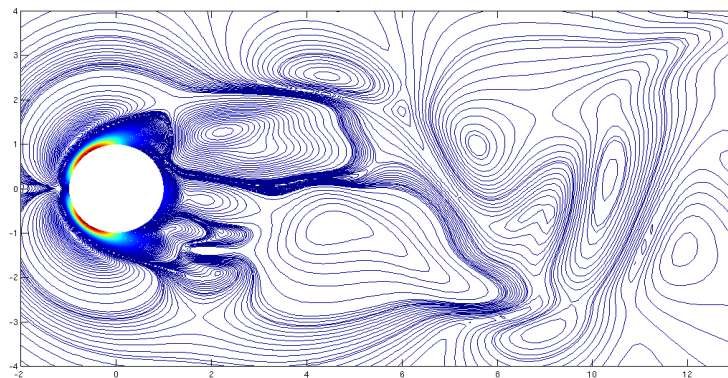


图 4 平面上圆柱绕流 面变形率第一特征值分布

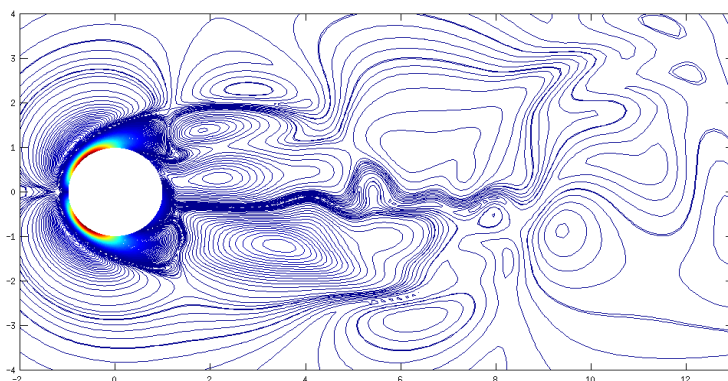


图 5 中间钟形双向凸起曲面上圆柱绕流 面变形率第一特征值分布

作为平行移动的特殊形式——测地线，考察物理量沿其分布，可以获得曲面上类似平面中直线上的分析。图 6 所示测地线，参数表示为 $x^i(\lambda)$, ($i=1,2$)，按

照如下初始条件所求得： $x_0^1 = \pi$, $x_0^2 = 1$, $\left. \frac{dx^1}{d\lambda} \right|_0 = 3.8$, $\left. \frac{dx^2}{d\lambda} \right|_0 = -1$ 。图 7 是 $t=196$

时刻涡量沿该测地线分布图。

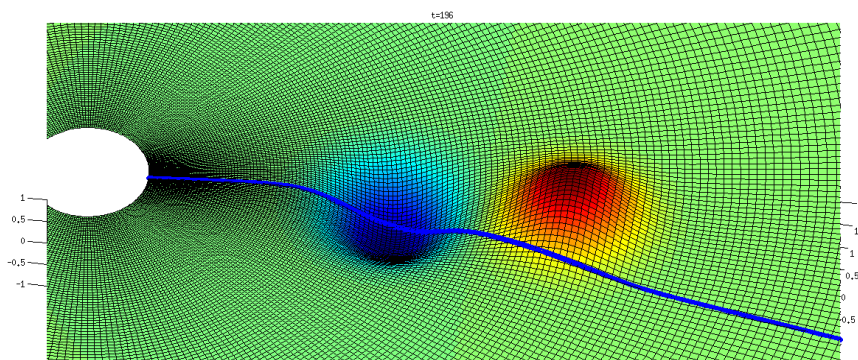


图 6 双向凹凸钟形曲面上圆柱绕流测地线示意图

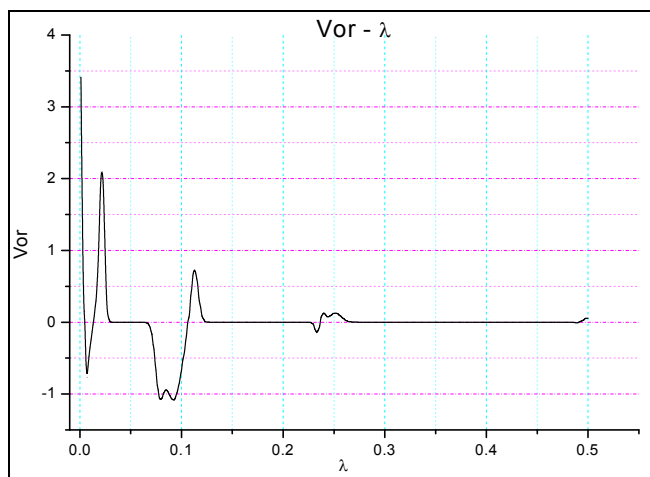


图 7 中间钟形双凹凸曲面上圆柱绕流 涡量沿测地线 ($x^i=x^i(\lambda)$) 分布

以上是对固定曲面上不可压缩流动的理论数值实现，进一步，皂膜上的干涉条纹反映了密度的不均匀性，预示着：真实的薄层流动表现为“低 Reynolds 数的可压缩流动”，基于连续性方程，可进一步考虑变面密度情形。

3 典型运动形式：曲面自身有限变形运动（膜运动）

膜运动的参数刻画为： $x_\Sigma = x_\Sigma(\xi_\Sigma, t) = \begin{bmatrix} \xi_\Sigma^1 \\ \xi_\Sigma^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ，亦即 Euler 参数坐标为

Lagrange 参数坐标的恒等映照。 $\overset{\Sigma}{V} \triangleq \overset{\Sigma}{\dot{\Sigma}} = \frac{\partial \overset{\Sigma}{\Sigma}}{\partial t}(x_\Sigma, t) = \frac{\partial \overset{\Sigma}{\Sigma}}{\partial t}(\xi_\Sigma, t)$ 。连续性方程为：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x_\Sigma, t) + \dot{x}_\Sigma^i \frac{\partial \rho}{\partial x_\Sigma^i}(x_\Sigma, t) + \rho \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_\Sigma^s} \left(\sqrt{g} \cdot V^s \right)(x_\Sigma, t) = 0$$

处理粘性部分：考虑到： $\left. \frac{\partial V}{\partial x^3}(x, t) \right|_\Sigma = \frac{\partial n}{\partial t}(x_\Sigma(\xi_\Sigma, t), t) = \dot{n} = - \left(\overset{\Sigma}{\nabla} \otimes \overset{\Sigma}{V} \right) \cdot n$ ；

$$\text{以及：} \frac{\partial \overset{\Sigma}{V}}{\partial x_\Sigma^l}(x_\Sigma, t) = \frac{\partial}{\partial x_\Sigma^l} \left(V^s g_s + V^3 n \right) = \left(\overset{\Sigma}{\nabla}_l V^s - b_l^s V^3 \right) g_s + \left(\left. \frac{\partial V^3}{\partial x_\Sigma^l} \right|_\Sigma + b_{ls} V^s \right) n$$

$$\text{则有：} -(\nabla \cdot n) [n \cdot (\nabla \otimes V)]_\Sigma = H \left. \frac{\partial V}{\partial x^3}(x, t) \right|_\Sigma = -H \left(\left. \frac{\partial V^3}{\partial x_\Sigma^l} \right|_\Sigma + b_{ls} V^s \right) g^l$$

$$-(n \otimes n) : [\nabla \otimes (\nabla \otimes V)]_\Sigma = -n^\alpha n^\beta [\nabla_\alpha \nabla_\beta V_\gamma g^\gamma]_\Sigma = -[\nabla_3 \nabla_3 V_\gamma]_\Sigma g^\gamma$$

以及拉普拉斯项：

$$[\Delta \otimes V]_\Sigma = [\nabla^\alpha \nabla_\alpha V_\gamma]_\Sigma g^\gamma = [\nabla^j \nabla_j V_l]_\Sigma g^l + [\nabla^j \nabla_j V^3]_\Sigma n + [\nabla^3 \nabla_3 V_\gamma]_\Sigma g^\gamma \text{。其中：}$$

$$[\nabla^j \nabla_j V_l]_{\Sigma} = g^{ij} \nabla_i \nabla_j V_l - g^{ij} \left(\nabla_i b_{jl} \right) V_l - H \left(\frac{\partial V_l}{\partial x^3} \Big|_{\Sigma} + b_l^t V_t \right) - b_l^j b_j^t V_t - 2b_l^s \frac{\partial V_3}{\partial x_{\Sigma}^s}$$

$$[\nabla^j \nabla_j V_3]_{\Sigma} = g^{ij} \nabla_i \nabla_j V_3 + 2b^{ij} \nabla_i V_j + \left(\nabla^j b_j^s \right) V_s - b^{js} b_{js} V_3$$

此处, $\nabla_j V_3 := \frac{\partial V_3}{\partial x_{\Sigma}^j}(x_{\Sigma}, t)$ 。综上可得, 动量方程分量形式:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial t^2}, n \right)_{\mathbb{R}^3}(x_{\Sigma}, t) &= (\gamma - p)H + \Delta P + \mu \left\{ g^{ij} \nabla_i \nabla_j V_3 + 2b^{ij} \nabla_i V_j + \left(\nabla^j b_j^s \right) V_s - b^{js} b_{js} V_3 \right\} \\ \rho \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial t^2}, g_l \right)_{\mathbb{R}^3}(x_{\Sigma}, t) &= -\frac{\partial p}{\partial x_{\Sigma}^l} + \mu \left\{ g^{ij} \nabla_i \nabla_j V_l - g^{ij} \left(\nabla_i b_{jl} \right) V_l - H \left(\frac{\partial V_l}{\partial x^3} \Big|_{\Sigma} + \frac{\partial V^3}{\partial x_{\Sigma}^l} \Big|_{\Sigma} + 2b_l^t V_t \right) \right. \\ &\quad \left. - b_l^j b_j^t V_t - 2b_l^s \frac{\partial V_3}{\partial x_{\Sigma}^s} \right\} \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_{\Sigma}^l} + \mu \left\{ g^{ij} \nabla_i \nabla_j V_l - g^{ij} \left(\nabla_i b_{jl} \right) V_l - b_l^j b_j^t V_t - 2b_l^s \frac{\partial V_3}{\partial x_{\Sigma}^s} \right\} \end{aligned}$$

由于 $\frac{\partial V_l}{\partial x^3} \Big|_{\Sigma} = \left(\dot{n}, g_l \right) \Big|_{\Sigma} - b_l^t V_t$, $\frac{\partial V^3}{\partial x_{\Sigma}^l} \Big|_{\Sigma} = -\left(g_l, \dot{n} \right) - b_l^t V_t$, 故得上述最后的等式

中显含平均曲率的项自然为零。

以下具体考虑一种膜的轴对称有限变形运动, 文献中类似的有考虑定常不均匀密度分布下微小振动, 以及考虑有限变形振动但不考虑密度变化。本文中密度由连续性方程决定, 且为有限变形情形。具体控制方程分量形式为:

$$\rho \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial t^2}, n \right)_{\mathbb{R}^3}(r, t) = \rho \frac{z_u(r, t)}{\sqrt{1 + z_r^2(r, t)}} = [\gamma - p(r, t)] \cdot H(r, t), \text{ 在小变形情形下相容于}$$

数理方程中的微小振动方程 $\rho z_u = (\gamma - p) \Delta z$ 。

$$\rho \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial t^2}, g_r \right)_{\mathbb{R}^3}(r, t) = \rho z_u(r, t) \cdot z_r(r, t) = -\frac{\partial p}{\partial r}(r, \theta, t)$$

$$\rho \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial t^2}, g_{\theta} \right)_{\mathbb{R}^3}(r, t) = 0 = -\frac{\partial p}{\partial \theta}(r, \theta, t)$$

连续性方程:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(r,t) + \rho \left\{ \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{g} \cdot V^r \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sqrt{g} \cdot V^\theta \right) \right] (r,t) - H V^n \right\} = 0$$

对于固体，这里表面张力系数类比于在一定弹性拉伸下获得的张力， $\gamma = E \cdot \bar{\varepsilon} \cdot \delta$ ， $\rho_\sigma = \rho_v \cdot \delta$ ， $\frac{\gamma}{\rho_\sigma} = \frac{E \cdot \varepsilon}{\rho_v}$ 。参考 $E = 1.0 \text{Mpa}$ ， $\rho = 1.0 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ ，

$\varepsilon \approx 5\%$ ， $L \approx 0.1 \text{m}$ ， $\frac{\gamma}{\rho_\sigma L^2} = 10^4 (\text{s}^{-2})$ ，初始条件： $z(r,0) = A \times (1 - r^2 / R^2)$ ， $R = 50$ 。

取 $A=0.5, 1, 2.5, 5, 7.5, 10, 12.5, 15$ 不同工况计算。

图 8 显示了随着初始最大振幅的增大引起的第一阶固有频率的变化，注意到在 $A < 2.5$ 范围内，第一阶固有频率为 0.765，这与微小振动方程解析解 0.765 一致，可见在这一振幅范围内，对固有频率无影响，微小振动方程适用，而振幅进一步增大则显示出变形效应。

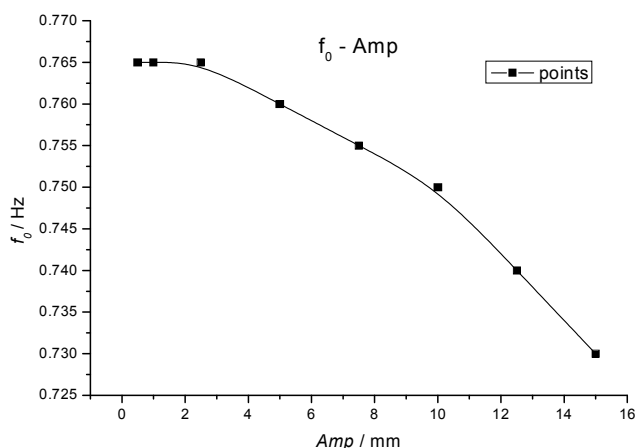


图 8 第一阶固有频率随初始振幅变化图

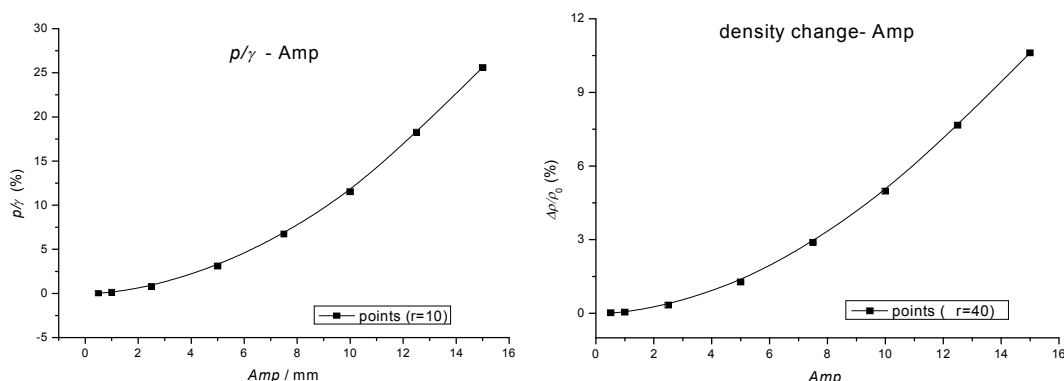


图 9 压力、密度修正随初始振幅变化图

分析动量方程右端耦合曲面信息的项： $(\gamma - p)H$ ，“内压力” p 对“表面张力” γ 起到了修正作用，本事例中 $\gamma = 10^4$ ，则压力修正百分比 (p/γ) 从小变

形情形 ($A=1$) 时的 0.13% 变动到有限变形情形 ($A=15$) 时的 25.59%。密度的变化幅值与特征密度相比, 从小变形情形时的 0.4% 变动到有限变形情形 ($A=15$) 时的 10.63%, 如图 9, 可见在有限变形情况下, 压力的修正、密度的变化不容忽视。

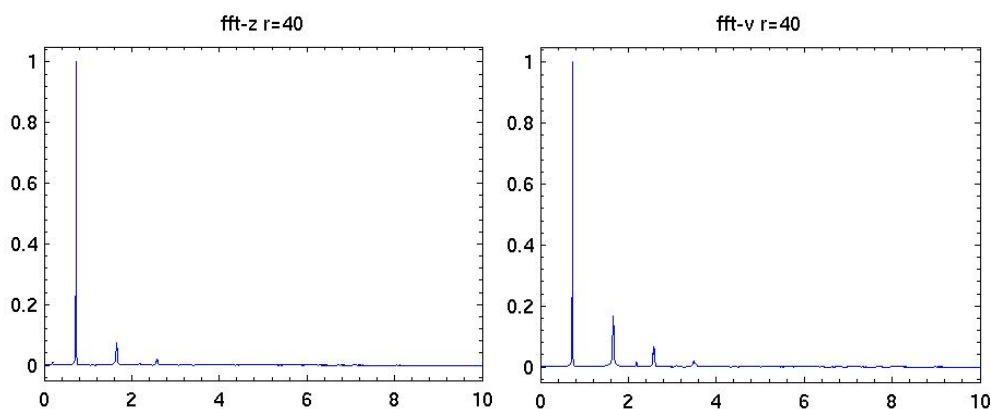


图 10 $A=15, r=40$ 处位移、速度自功率谱

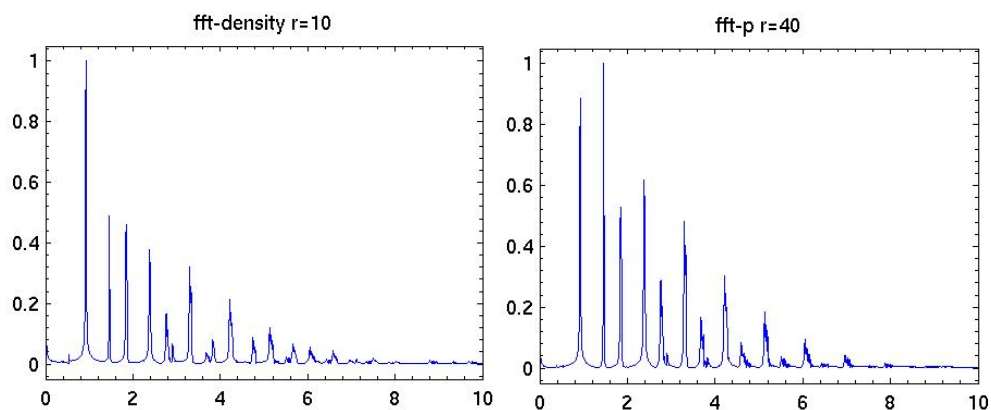


图 11 $A=15$, 密度、压力自功率谱

从图 10 中位移、速度信号的自功率谱可见, 位移振动和速度振动基频 $f_0 = 0.73$; 其谐波形式为: $f_0 \pm p \frac{4}{3} f_0$, 二者振动形态基本一致。由图 11 中 $A=15, r=10$ 处密度、压力自功率谱功率谱所示, 密度振动和压力振动基频为 0.73; 二者振动形态相近。另, 功率谱显示相关振动有向混沌演化的趋势。

4 总结

理论方面, 本文概述了几何形态为曲面的连续介质的有限变形理论。此类运动的主要特征为, 在任意时刻连续介质的几何形态均为曲面或者连续介质限制与某一瞬时曲面。从几何观点, 连续介质的几何形态为三维 Euclid 空间中的二维 Riemann 流形, 而非二维 Euclid 流形, 由此需要区别和联系弯曲流形(空间)同平坦流形上的场论分析。本文具体研究了固定曲面上流动以及膜运动, 获得了相关控制方程中有关几何同力学之间的耦合关系式。推导并数值实现了固定曲面上不可压缩流动的涡流函数解法。推导了膜有限变形运动的控制方程; 并具体实现了轴对称膜有限变形振动的数值模拟, 初步发现有限变形情形下密度、压力的作

用及振动特点。就本文相关工作,可进一步研究固定曲面上可压缩流动的数值研究;轴对称膜有限振幅振动的真实实验。

参考文献

- [1] A.C.米先柯, A.T.福明柯. 微分几何与拓扑学简明教程 [M].张爱和译. 高等教育出版社, 2006.
- [2] 郭仲衡. 非线性弹性理论. 北京: 科学出版社, 1980.
- [3] Jun Zhang, Stephen Childress, Albert Libchaber & Michael Shelley. Flexible filaments in a flowing soap film as a model for one-dimensional flags in a two-dimensional wind. *Nature* 2000,408:835-839.
- [4] Robert Irion .1999 Soap films Reveal Whirling Worlds of Turbulence. *Science* 284,1609-1610.
- [5] R.H.Gutierrez, P.A.A.Laura, D.V.Bambill & V.A.Jederlinic. Axisymmetric Vibrations of solid circular and annular membranes with continuously varying density. *J. of Sound and Vibration* 1998, 212(4),611-622
- [6] 谢锡麟, 陈瑜, 史倩, 傅渊. 限制于一般运动曲面上的连续介质的有限变形理论. *中国科技论文在线* 2012.
- [7] XIE X.L., CHEN Y., SHI Q. Some studies on mechanics of continuous mediums viewed as differential manifolds. Original manuscript, 2012.
- [8] 杨义红, 尹协振, 陆夕云. 肥皂膜水洞实验技术. *实验流体力学*, 2005, 19 (4), 36-41
- [9] 殷雅俊, 生物膜力学与几何中的对称. *力学与实践*, 2008, 30 (2) :1-10

致谢: 本文是在谢锡麟老师的精心指导下完成的,从理论推导到编程实践,都得益于他的悉心指点。通过修读老师开设的《连续介质力学基础》《张量分析与微分几何基础》《流形上的微积分》《涡动力学基础》等课程,我实实在在地收获了必要的专业基础知识、老师的个人学习经验和思考总结。在毕业设计中我遇到挫折和困难,但老师总是耐心积极地帮助我解决问题,同时为我日后的知识学习和专业研究提出极具建设性的指导意见。谢老师的高尚人格、敬业精神、谦虚务实的作风、兼容并包的学术涵养令我折服,得其言传身教是我的荣幸。同时十分感谢本课题组各位师兄的提点、帮助,感谢家长和好友的支持与鼓励。感谢复旦大学对我的培养。