第三章部分重要题目解答

5. 设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

,

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n & 0 \end{pmatrix}$$

令 A 为方程组的系数矩阵，已知 $r_A = r_B$ ，求证上面的线性方程组相容。

证明：

由于 $r_A \leq n$ ，因此 $r_B = r_A \leq n$ 。令

$$C = (A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

可知 $r_A \leq r_c \leq r_b$，又知道 $r_A = r_B$ ，因此，$r_A = r_C$ ，原方程组有解。

6. 设 $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$，试用线性方程组定性理论证明：若$f(x) = 0$有 $n+1$个不同的根，那么$f(x) \equiv 0$ 。

证明：

设这些根为$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ ，将原函数中的系数视为未知数，解方程组：

$$\begin{cases} c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2 + \cdots + c_nx_1^n = 0 \\ c_0 + c_1x_2 + c_2x_2^2 + \cdots + c_nx_2^n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_0 + c_1x_{n+1} + c_2x_{n+1}^2 + \cdots + c_nx_{n+1}^n = 0 \end{cases}$$

该方程的系数矩阵为范德蒙行列式，值为$\prod_{1\le i\le j\le n+1}(x_j - x_i)$，由于根互不相同，故行列式不为零，所以方程只有非零解，因此$f(x) \equiv 0$

9. 设向量组I可以由向量组II表示，向量组II可以由向量组 III表示，求证向量组 I 可经由向量组 III 线性表示。
证明：设向量组I中的任意向量 a 均可以表示为II中的线性组合$a = \sum b_ik_i$，
且II中的任意向量 b_i 均可以表示为III中的线性组合 $b_i = \sum c_jp_j$，
故任意I中的向量a 可表示为$a = \sum b_ik_i = \sum(k_i \sum c_jp_j) = \sum c_i(b_i \sum k)$，
故I 可以由 III 线性表示。

10. 证明：若向量β可以由向量组$a_1, a_2, \ldots, a_l$的一个部分向量组线性表示，则一定可由$a_1, a_2, \ldots, a_l$线性表示。
证明：
β可以由向量组$a_1, a_2, \ldots, a_l$的一个部分向量组线性表示，设这个向量组为$a_1, a_2, \ldots, a_m$，令除此之外的向量a的系数都为零，即得证。

12. 已知向量组a_1, a_2, a_3 线性无关，从定义出发证明向量组$a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_1$线性无关。
证明：
若 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_1$ 线性相关，即存在不全为零的x, y, z，满足

$$(a_1 + a_2)x + (a_2 + a_3)y + (a_3 + a_1)z = 0$$

。上式等价与$a_1(x + z) + a_2(x + y) + a_3(y + z) = 0$ 。因为a_1, a_2, a_3 线性无关，因此$(x + z), (x + y), (y + z)$ 全为零。因此x, y, z都为零，与假设矛盾。因此$a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_1$线性无关。

13.设非零向量β可以由向量组$a_1, a_2, \ldots, a_l$线性表示，且表示唯一，求证向量组$a_1, a_2, \ldots, a_l$线性无关。
证明：
若$a_1, a_2, \ldots, a_l$线性相关，则存在不全为零的$c_1, c_2, \ldots, c_l$满足 $\sum a_ic_i = 0$
所以对于β的一个线性表示，$\beta = \sum a_id_i$,加上上式，得到$\beta = \sum a_i(d_i + c_i)$。由于$c_1, c_2, \ldots, c_l$不全为零，因此表示不唯一，矛盾。因此$a_1, a_2, \ldots, a_l$线性无关。

14. 设向量组$a_1, a_2, \dots, a_l$线性无关，向量β 可以经其表示为

$$\beta = k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_la_l$$

且$k_1 \neq 0$，求证$\beta, a_2, \dots, a_l$线性无关。
证明：
我们可以将 $\begin{pmatrix}\beta & a_2 & \dots & a_l\end{pmatrix}$ 记为矩阵B，将 $\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \dots & a_l\end{pmatrix}$ 记为矩阵A。
矩阵 $B = \begin{pmatrix}\beta & a_2 & \dots & a_l\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_la_l & a_2 & \dots & a_l\end{pmatrix}$ 因为$a_1, a_2, \dots, a_l$线性无关，因此矩阵A的秩为l。因为$k_1 \neq 0$ ，因此对B做初等列变换可以得到矩阵A，因此矩阵B的秩也为l。因此，$\beta, a_2, \dots, a_l$ 线性无关。

16. 证明：向量组I可经向量组II线性表示，则向量组I的秩小于向量组II的秩。
证明：
令A为I中向量构成的矩阵，B为II中向量构成的矩阵。对于A中任意向量a，方程$BX = a$都有解。因此$r_B = r_{B|A} = max(r_B, r_A)$，因此必有$r_B \geq r_A$。

17. 证明：等价向量组的秩也相等，问逆命题是否成立。
证明：
两个向量组A, B等价的充分必要条件为$r_A = r_B = r_{A|B}$ 所以等价向量组的秩相等。逆命题不成立，反例如下：

$$a = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} b = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

向量a, b都可以认为是有一个向量的向量组，但是他们不等价。

20. 设$X_1, X_2, \dots, X_m$是齐次线性方程组 $AX = 0$的基础解系，求证$X_1+X_2, X_2, \dots, X_m$也是方程组的一个基础解系。
证明：
(1)由已知条件可以知道任何方程组$AX = 0$的解 $\bar{X}$都可以表示为 $\bar{X} = c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_mX_m$。继续可以得到

$$\bar{X} = c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_mX_m$$

$$= c_1(X_1 + X_2) + (c_2 - c_1)X_2 + \cdots + c_mX_m$$

，其中的c都是任意常数。因此，原方程的任意一个解可以由$X_1 + X_2, X_2, \dots, X_m$线性表示。
(2)$X_1, X_2, \dots, X_m$是齐次线性方程组 $AX = 0$的基础解系，因此，这些向量线性无关。那么，将每一个向量X_i作为矩阵的列向量，可得：

$$C = \begin{pmatrix}X_1 & X_2 & \dots & X_m\end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} X_1 + X_2 & X_2 & \dots & X_m \end{pmatrix}$$

B 是 C 乘以一个初等矩阵的结果。由$X_1, X_2, \dots, X_m$线性无关可知，$r(C) = m$ 。我们知道对矩阵进行初等变换，矩阵的秩不变。因此$r_B = m$。所以$X_1 + X_2, X_2, \dots, X_m$线性无关。因此， $X_1 + X_2, X_2, \dots, X_m$也是方程组的一个基础解系。