曲面形态连续介质有限变形理论—守恒律方程

谢锡麟　复旦大学 力学与工程科学系

2015 年 4 月 21 日

1　知识要素

1.1　质量守恒

当考虑面密度, 质量守恒可表示为以下积分形式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\overset{t}{\Sigma}}\rho\mathrm{d}\sigma=\int_{\overset{t}{\Sigma}}(\dot{\rho}+\rho\theta)\,\mathrm{d}\sigma=0.$$

由此, 可得 **Euler 型质量守恒微分方程**

$$\dot{\rho}+\rho\,\theta=0.$$

藉此, 可以定义**不可压缩运动**

$$\dot{\rho}=0\quad\Leftrightarrow\quad\theta=0.$$

进一步展开, 得

$$\begin{aligned}
\theta:&=\overset{\Sigma}{\square}\cdot\boldsymbol{V}=\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\boldsymbol{g}^l\right)\cdot(V^\alpha\boldsymbol{g}_\alpha)=\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\boldsymbol{g}^l\right)\cdot\left(V^i\boldsymbol{g}_i+V^3\boldsymbol{n}\right)\\
&=\boldsymbol{g}^l\cdot\left(\frac{\partial V^i}{\partial x^l_\Sigma}\boldsymbol{g}_i+V^i\left(\mathit{\Gamma}^s_{li}\boldsymbol{g}_s+b_{li}\boldsymbol{n}\right)\right)+\boldsymbol{g}^l\cdot\left(\frac{\partial V^3}{\partial x^l_\Sigma}\boldsymbol{n}+V^3\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial x^l_\Sigma}\right)\\
&=\frac{\partial V^l}{\partial x^l_\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma,t)+\mathit{\Gamma}^l_{ls}V^s-V^3b^l_l=\nabla_lV^l-V^3b^l_l\\
&=\frac{\partial V^s}{\partial x^s_\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma,t)+\frac{1}{\sqrt{g_\Sigma}}\frac{\partial\sqrt{g_\Sigma}}{\partial x^s_\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma,t)\cdot V^s-HV^3\\
&=\frac{1}{\sqrt{g_\Sigma}}\frac{\partial}{\partial x^s_\Sigma}\left(\sqrt{g_\Sigma}\,V^s\right)(\boldsymbol{x}_\Sigma,t)-HV^3.
\end{aligned}$$

可获得 **Euler 型质量守恒微分方程的展开形式:**

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}(\boldsymbol{x}_\Sigma,t)+\dot{x}^i_\Sigma\frac{\partial\rho}{\partial x^i_\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma,t)+\rho\left(\nabla_lV^l-HV^3\right)=0.$$

另一方面, 考虑

$$\int_{\overset{t}{\Sigma}}\rho\mathrm{d}\sigma=\int_{D_{\lambda\mu}}\rho\left|\frac{\partial\overset{t}{\boldsymbol{\Sigma}}}{\partial\lambda}\times\frac{\partial\overset{t}{\boldsymbol{\Sigma}}}{\partial\mu}\right|(\lambda,\mu)\mathrm{d}\sigma=\int_{D_{\lambda\mu}}\rho|\boldsymbol{F}|\left|\frac{\partial\overset{\circ}{\boldsymbol{\Sigma}}}{\partial\lambda}\times\frac{\partial\overset{\circ}{\boldsymbol{\Sigma}}}{\partial\mu}\right|(\lambda,\mu)\mathrm{d}\sigma$$

$$\int_{\overset{\circ}{\Sigma}}\overset{\circ}{\rho}\mathrm{d}\sigma=\int_{D_{\lambda\mu}}\overset{\circ}{\rho}\left|\frac{\partial\overset{\circ}{\boldsymbol{\Sigma}}}{\partial\lambda}\times\frac{\partial\overset{\circ}{\boldsymbol{\Sigma}}}{\partial\mu}\right|(\lambda,\mu)\mathrm{d}\sigma,$$

式中 $\overset{\circ}{\rho}(\xi)$ 为初始面密度分布, 以及质量守恒

$$\int_{\overset{t}{\Sigma}} \rho d\sigma = \int_{\overset{\circ}{\Sigma}} \overset{\circ}{\rho} d\sigma,$$

则得 **Lagrange 型质量守恒微分方程**

$$\rho|\boldsymbol{F}| = \overset{\circ}{\rho}(\boldsymbol{\xi}).$$

需指出, 质量守恒的积分及微分形式应隶属运动学范畴.

1.2 动量守恒

考虑一片连续介质的动量时间变化率, 利用相关输运定理以及质量守恒, 可有如下关系:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\overset{t}{\Sigma}} \rho\boldsymbol{V}\mathrm{d}\sigma = \int_{\overset{t}{\Sigma}} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\boldsymbol{V}) + \theta\rho\boldsymbol{V}\right]\mathrm{d}\sigma = \int_{\overset{t}{\Sigma}} \rho\boldsymbol{a}\mathrm{d}\sigma,$$

此处 $\boldsymbol{a}$ 表示加速度.

按 Newton 力学, 动量时间变化率可受表面张力作用、内压力作用、内摩擦作用以及面力作用, 亦即可建立如下关系式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\overset{t}{\Sigma}} \rho\boldsymbol{V}\mathrm{d}\sigma = \boldsymbol{F}_{\mathrm{ten}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{pre}}^{\mathrm{int}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{vis}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{pre}}^{\mathrm{ext}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{sur}}.$$

表面张力作用可表示为如下曲线上积分:

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{ten}} := \oint_c \gamma\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n}\mathrm{d}l = \gamma\oint_c(\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{I}\mathrm{d}l = \gamma\int_\Sigma \overset{\Sigma}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\boldsymbol{I}\mathrm{d}\sigma = \gamma\int_\Sigma H\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma,$$

式中 γ 表示表面张力系数, 且基于内蕴形式的第二类广义 Stokes 公式可几乎平凡地将相关曲线积分转换为曲面积分.

类似地, 内压力作用可有如下表示:

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{pre}}^{\mathrm{int}} := -\oint_c \boldsymbol{\tau}\times(p\boldsymbol{n})\mathrm{d}l = -\oint_c(\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n})p\mathrm{d}l = \int_\Sigma\left[-\overset{\Sigma}{\square}p - pH\boldsymbol{n}\right]\mathrm{d}\sigma.$$

内摩擦作用的曲线积分表示及其转换成的曲面积分, 如下所示:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{\mathrm{vis}} :&= \oint_c \mu(\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n})\cdot\left(\boldsymbol{V}\otimes\overset{\Sigma}{\square}+\overset{\Sigma}{\square}\otimes\boldsymbol{V}\right)\mathrm{d}l \\
&= \mu\int_\Sigma\left[\overset{\Sigma}{\square}\cdot\left(\boldsymbol{V}\otimes\overset{\Sigma}{\square}+\overset{\Sigma}{\square}\otimes\boldsymbol{V}\right) + H\boldsymbol{n}\cdot\left(\boldsymbol{V}\otimes\overset{\Sigma}{\square}+\overset{\Sigma}{\square}\otimes\boldsymbol{V}\right)\right]\mathrm{d}\sigma \\
&= \mu\int_\Sigma\left[\overset{\Sigma}{\square}\cdot\left(\boldsymbol{V}\otimes\overset{\Sigma}{\square}+\overset{\Sigma}{\square}\otimes\boldsymbol{V}\right) + H\boldsymbol{n}\cdot\left(\boldsymbol{V}\otimes\overset{\Sigma}{\square}\right)\right]\mathrm{d}\sigma,
\end{aligned}$$

式中 μ 表示内摩擦/黏性系数, 作为物性常数.

曲面两侧压力差的作用, 可表示为

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{pre}}^{\mathrm{ext}} := \int_\Sigma (p^- - p^+)\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = \int_\Sigma \delta p\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma,$$

式中 $\delta p := p^- - p^+$ 表示压力差.

一般面力作用可表示为

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{sur}} := \int_\Sigma \boldsymbol{f}_\Sigma \mathrm{d}\sigma,$$

式中 $\boldsymbol{f}_\Sigma$ 表示面力密度, 亦即单位面积上所受的力. 面力可为重力、不同介质之间的摩擦力、电磁力等; 直接作用于一片连续介质的力均可考虑为面力.

综上所述, 可得微分形式的动量守恒

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = H(\gamma - p)\boldsymbol{n} - \overset{\Sigma}{\square}p + \mu\left[\overset{\Sigma}{\square}\boldsymbol{\cdot}\left(\boldsymbol{V}\otimes\overset{\Sigma}{\square} + \overset{\Sigma}{\square}\otimes\boldsymbol{V}\right) + H\boldsymbol{n}\boldsymbol{\cdot}\left(\boldsymbol{V}\otimes\overset{\Sigma}{\square}\right)\right] + \delta p\boldsymbol{n} + \boldsymbol{f}_\Sigma,$$

式中黏性项可分别推导为

$$\begin{aligned}
\overset{\Sigma}{\square}\boldsymbol{\cdot}\left(\boldsymbol{V}\otimes\overset{\Sigma}{\square}\right) &= \overset{\Sigma}{\square}\boldsymbol{\cdot}\left[\left(V^l\boldsymbol{g}_l\right)\otimes\overset{\Sigma}{\square}\right] + \overset{\Sigma}{\square}\boldsymbol{\cdot}\left[\left(V^3\boldsymbol{n}\right)\otimes\overset{\Sigma}{\square}\right] \\
&= \left[\nabla^s\nabla^l V_s - b^{ls}\frac{\partial V^3}{\partial x^s_\Sigma} - \left(\nabla^s b^l_s\right)V^3 - H\left(g^{ls}\frac{\partial V^3}{\partial x^s_\Sigma} + b^l_s V^s\right)\right]\boldsymbol{g}_l \\
&\quad + \left(b^{st}\nabla_s V_t - b^{st}b_{st}V^3\right)\boldsymbol{n}, \\
\overset{\Sigma}{\square}\boldsymbol{\cdot}\left(\overset{\Sigma}{\square}\otimes\boldsymbol{V}\right) &= \overset{\Sigma}{\square}\boldsymbol{\cdot}\left[\overset{\Sigma}{\square}\otimes\left(V^l\boldsymbol{g}_l\right)\right] + \overset{\Sigma}{\square}\boldsymbol{\cdot}\left[\overset{\Sigma}{\square}\otimes\left(V^3\boldsymbol{n}\right)\right] \\
&= \left\{\left[\nabla^s\nabla_s V^l - b^l_s b^s_t V^t\right] - \left[\left(\nabla^s b^l_s\right)V^3 + 2b^{ls}\frac{\partial V^3}{\partial x^s_\Sigma}\right]\right\}\boldsymbol{g}_l \\
&\quad + \left\{\left[\left(\nabla_q b^q_s\right)V^s + 2b^{st}\nabla_s V_t\right] + \left[\nabla^s\nabla_s V^3 - b^{st}b_{st}V^3\right]\right\}\boldsymbol{n}, \\
H\boldsymbol{n}\boldsymbol{\cdot}\left(\boldsymbol{V}\otimes\overset{\Sigma}{\square}\right) &= H\left(g^{ls}\frac{\partial V^3}{\partial x^s_\Sigma} + b^l_s V^s\right)\boldsymbol{g}_l.
\end{aligned}$$

此外, 还有关系式

$$\nabla^s\nabla^l V_s = \nabla^l\left(\nabla^s V_s\right) + K_G V^l,$$

以及 $b^{st}b_{st} = H^2 - 2K_G$.

易见, 将上述动量守恒的控制方程应用于几何形态为平面的流动 (如平面皂膜), 则退化为一般平面可压缩流动的 Navier-Stokes 方程.

需指出, 上述分析中的表面张力系数以及内摩擦力均被视为常数. 物理上, 表面张力系数可能为膜的厚度或者面密度的函数, 亦即有 $\gamma = \gamma(\rho)$. 由此, 可有 $\gamma(\boldsymbol{x}_\Sigma, t) := \gamma(\rho(\boldsymbol{x}_\Sigma, t))$. 对此情形, 仍有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{\mathrm{ten}} : &= \oint_c \gamma\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n}\mathrm{d}l = \oint_c (\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n})\boldsymbol{\cdot}(\gamma\boldsymbol{I})\mathrm{d}l \\
&= \int_\Sigma\left[\overset{\Sigma}{\square}\boldsymbol{\cdot}(\gamma\boldsymbol{I}) + H\boldsymbol{n}\boldsymbol{\cdot}(\gamma\boldsymbol{I})\right]\mathrm{d}\sigma = \int_\Sigma \overset{\Sigma}{\square}\boldsymbol{\cdot}(\gamma\boldsymbol{I})\mathrm{d}\sigma = \int_\Sigma\left[\overset{\Sigma}{\square}\gamma + \gamma H\,\boldsymbol{n}\right]\mathrm{d}\sigma,
\end{aligned}$$

此处 $\dfrac{\partial\gamma}{\partial x^i_\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma, t) = \dfrac{\partial\gamma}{\partial\rho}(\rho)\dfrac{\partial\rho}{\partial x^i_\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma, t)$, 关系式 $\gamma(\rho)$ 可由实验确定.

进一步, 上述动量守恒方程可以进行无量纲化, 有

$$\begin{aligned}
\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{\mathrm{We}}H(\gamma - p)\boldsymbol{n} - \frac{1}{\mathrm{We}}\overset{\Sigma}{\square}p \\
&\quad + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\overset{\Sigma}{\square}\boldsymbol{\cdot}\left(\boldsymbol{V}\otimes\overset{\Sigma}{\square} + \overset{\Sigma}{\square}\otimes\boldsymbol{V}\right) + H\boldsymbol{n}\boldsymbol{\cdot}\left(\boldsymbol{V}\otimes\overset{\Sigma}{\square}\right)\right] + \frac{1}{\mathrm{We}}\delta p\boldsymbol{n},
\end{aligned}$$

此处略去了面力作用. 在上述形式中, Weber 数定义为 We $\triangleq \dfrac{\rho_0 U_0^2}{\gamma_0}$, Reynolds 数为 Re $\triangleq \dfrac{\rho_0 U_0 \delta_0}{\mu_0}$, $\rho_0 = \rho_{\text{vol}}\delta_0$ 表示特征面密度, δ_0 为特征几何尺度, ρ_{vol} 为一般体密度; U_0 表示特征速度; γ_0 表示特征表面张力系数, 其值同特征内压力; $\mu_0 = \mu_{\text{vol}}\delta_0$ 表示特征内摩擦系数, μ_{vol} 表示一般黏性系数.

一般而言, 可考虑引入**曲面应力**

$$\boldsymbol{t} = t_{ij}\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^j + t_{i3}\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{n},$$

对应有动量守恒的积分表达式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\overset{t}{\Sigma}} \rho \boldsymbol{V} \mathrm{d}\sigma = \oint_{\partial \overset{t}{\Sigma}} (\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{t} \mathrm{d}\sigma + \int_{\overset{t}{\Sigma}} \boldsymbol{f}_\Sigma \mathrm{d}\sigma,$$

其微分方程为

$$\rho \boldsymbol{a} = \overset{\Sigma}{\square} \cdot \boldsymbol{t} + H\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{t} + \boldsymbol{f}_\Sigma = \overset{\Sigma}{\square} \cdot \boldsymbol{t} + \boldsymbol{f}_\Sigma.$$

此处考虑到 $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{t} = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^3$. 值得指出, 基于内蕴形式的第二类广义 Stokes 公式总可以将沿 $\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{n}$ 的作用 (表现为曲线积分) 转化为曲面积分, 从而获得曲面应力的具体形式.

就上述考虑表面张力、内压力以及内摩擦情形, 曲面应力对应的表达式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t} &= (\gamma - p)\boldsymbol{I} + \mu\left(\overset{\Sigma}{\square} \otimes \boldsymbol{V} + \boldsymbol{V} \otimes \overset{\Sigma}{\square}\right) = (\gamma - p)\,\boldsymbol{I} + \mu\left(\nabla_j V_i + \nabla_i V_j - 2V^3 b_{ij}\right)\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^j \\ &\quad + \mu\left(b_{is}V^s + \frac{\partial V^3}{\partial x_\Sigma^i}\right)\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{n} + \mu\left(b_{sj}V^s + \frac{\partial V^3}{\partial x_\Sigma^j}\right)\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{g}^j.\end{aligned}$$

需指出, 式中 $\mu\left(b_{sj}V^s + \dfrac{\partial V^3}{\partial x_\Sigma^j}\right)\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{g}^j$ 项对动量、动量矩以及能量守恒无实际贡献.

1.3　动量矩守恒

当考虑表面张力、内压力、内摩擦力、外部压差及面力, 动量矩守恒具有如下形式:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\overset{t}{\Sigma}} \boldsymbol{\Sigma} \times (\rho \boldsymbol{V})\,\mathrm{d}\sigma \\ &\quad = \oint_C \boldsymbol{\Sigma} \times [(\gamma - p)\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{n}]\,\mathrm{d}l + \oint_C \mu \boldsymbol{\Sigma} \times \left[(\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{n}) \cdot \left(\boldsymbol{V} \otimes \overset{\Sigma}{\square} + \overset{\Sigma}{\square} \otimes \boldsymbol{V}\right)\right]\mathrm{d}l \\ &\qquad + \int_{\overset{t}{\Sigma}} \boldsymbol{\Sigma} \times (\delta p \boldsymbol{n})\,\mathrm{d}\sigma + \int_{\overset{t}{\Sigma}} \boldsymbol{\Sigma} \times \boldsymbol{f}_\Sigma \mathrm{d}\sigma + \int_{\overset{t}{\Sigma}} \boldsymbol{M} \mathrm{d}\sigma,\end{aligned}$$

式中 $\boldsymbol{M}$ 表示面力偶.

利用连续性方程以及相应的输运定理, 上述等式的左方可改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\overset{t}{\Sigma}} \boldsymbol{\Sigma} \times (\rho \boldsymbol{V})\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\overset{t}{\Sigma}} \boldsymbol{\Sigma} \times (\rho \boldsymbol{a})\,\mathrm{d}\sigma,$$

式中左边的第一项和第二项可由内蕴形式的第二类广义 Stokes 公式转换为面积分, 如下所示:

$$
\begin{aligned}
&-\oint_C (\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n})\times[(\gamma-p)\boldsymbol{\Sigma}]\,\mathrm{d}l \\
&\quad= -\int_{\overset{t}{\Sigma}}\left[\overset{\Sigma}{\square}(\gamma-p)+H(\gamma-p)\boldsymbol{n}\right]\times\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{d}\sigma-\int_{\overset{t}{\Sigma}}(\gamma-p)\boldsymbol{g}^l\times\boldsymbol{g}_l\mathrm{d}\sigma, \\
&\quad= -\int_{\overset{t}{\Sigma}}\left[\overset{\Sigma}{\square}(\gamma-p)+H(\gamma-p)\boldsymbol{n}\right]\times\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{d}\sigma \\
&-\oint_C \mu(\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n})\cdot\left[\left(\boldsymbol{V}\otimes\overset{\Sigma}{\square}+\overset{\Sigma}{\square}\otimes\boldsymbol{V}\right)\times\boldsymbol{\Sigma}\right]\mathrm{d}l \\
&\quad= -\mu\int_{\overset{t}{\Sigma}}\left[\overset{\Sigma}{\square}\cdot\left(\boldsymbol{V}\otimes\overset{\Sigma}{\square}+\overset{\Sigma}{\square}\otimes\boldsymbol{V}\right)+H\boldsymbol{n}\cdot\left(\boldsymbol{V}\otimes\overset{\Sigma}{\square}\right)\right]\times\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{d}\sigma \\
&\qquad-\mu\int_{\overset{t}{\Sigma}}\boldsymbol{g}^l\cdot\left(\boldsymbol{V}\otimes\overset{\Sigma}{\square}+\overset{\Sigma}{\square}\otimes\boldsymbol{V}\right)\times\boldsymbol{g}_l\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}
$$

由此, 可得动量矩守恒的微分形式. 再考虑动量守恒的微分形式, 可得动量矩守恒的微分形式, 如下所示:

$$\mu\,\boldsymbol{g}^l\cdot\left(\boldsymbol{V}\otimes\overset{\Sigma}{\square}+\overset{\Sigma}{\square}\otimes\boldsymbol{V}\right)\times\boldsymbol{g}_l=\boldsymbol{M},$$

其分量形式为

$$\mu\,\epsilon^{3lk}\left(\frac{\partial V^3}{\partial x^l_{\Sigma}}+b_{ls}V^s\right)=M^k.$$

可见, 仅涉及运动及外力偶在切平面上的平衡.

若考虑曲面应力, 则就动量矩守恒可有以下结论.

定理 1.1 (动量矩守恒)**.** 如果曲面形态连续介质边界上的作用由曲面应力表示为

$$\boldsymbol{t}=t_{ij}\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}^j+t_{i3}\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{n},$$

则动量矩守恒具有以下形式:

$$\boldsymbol{g}^l\cdot(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{g}_l)=\boldsymbol{m}_{\Sigma},$$

此处 $\boldsymbol{m}_{\Sigma}$ 代表面力偶分布.

证明 基于曲面应力, 动量守恒可表示如下:

$$\int_{\overset{t}{\Sigma}}\rho\boldsymbol{a}\mathrm{d}\sigma=\oint_{\partial\overset{t}{\Sigma}}(\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}l+\int_{\overset{t}{\Sigma}}\boldsymbol{f}_{\Sigma}\mathrm{d}\sigma,$$

其微分形式为

$$\rho\boldsymbol{a}=\overset{\Sigma}{\square}\cdot\boldsymbol{t}+H\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{t}+\boldsymbol{f}_{\Sigma}=\overset{\Sigma}{\square}\cdot\boldsymbol{t}+\boldsymbol{f}_{\Sigma}.$$

另一方面, 动量矩守恒可表示如下:

$$\int_{\overset{t}{\Sigma}}\rho\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{d}\sigma=\oint_{\partial\overset{t}{\Sigma}}[(\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n})\cdot\mathbf{t}]\times\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{d}l+\int_{\overset{t}{\Sigma}}\boldsymbol{f}_{\Sigma}\times\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{d}\sigma-\int_{\overset{t}{\Sigma}}\boldsymbol{m}_{\Sigma}\mathrm{d}\sigma.$$

考虑到 $[(\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n})\cdot\mathbf{t}]\times\boldsymbol{\Sigma}=(\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n})\cdot(\mathbf{t}\times\boldsymbol{\Sigma})$ 以及内蕴形式的第二类广义 Stokes 公式, 可有

$$\begin{aligned}
\rho\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\Sigma} &= \overset{\Sigma}{\Box}\cdot(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{\Sigma})+H\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{\Sigma})+\boldsymbol{f}_\Sigma\times\boldsymbol{\Sigma}-\boldsymbol{m}_\Sigma\\
&=\left[\left(\overset{\Sigma}{\Box}\cdot\boldsymbol{t}\right)\times\boldsymbol{\Sigma}+\boldsymbol{g}^l\cdot(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{g}_l)\right]+(H\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{t})\times\boldsymbol{\Sigma}+\boldsymbol{f}_\Sigma\times\boldsymbol{\Sigma}-\boldsymbol{m}_\Sigma\\
&=\left(\overset{\Sigma}{\Box}\cdot\boldsymbol{t}+\boldsymbol{f}_\Sigma\right)\times\boldsymbol{\Sigma}+\boldsymbol{g}^l\cdot(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{g}_l)-\boldsymbol{m}_\Sigma.
\end{aligned}$$

考虑到动量守恒微分方程, 则得证. □

进一步, 由表达式

$$\boldsymbol{g}^l\cdot(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{g}_l)=-t^{ij}\epsilon_{ij3}\boldsymbol{n}_\Sigma+\sqrt{g}(-t^2_{\cdot 3}\boldsymbol{g}^1+t^1_{\cdot 3}\boldsymbol{g}^2),\quad g:=\det\left(g_{ij}\right)$$

可有下述结论.

推论 1.1.1 (关于曲面应力的表示)**.** 曲面应力张在切平面上的分量具有对称性 ($t_{ij}=t_{ji}$), 其充分必要条件是法向面力偶分量为零 ($m^3_\Sigma=0$); 曲面应力张量在法向具有非零分量 ($t^i_{\cdot 3}\neq 0$), 其充分必要条件是面力偶在切平面具有非零分量 ($m^i_\Sigma\neq 0$).

1.4 能量守恒

可有能量守恒的积分表达式

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\overset{t}{\Sigma}}\rho\left(\frac{|\boldsymbol{V}|^2}{2}+e\right)\mathrm{d}\sigma &= \int_{\overset{t}{\Sigma}}\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{|\boldsymbol{V}|^2}{2}+e\right)\mathrm{d}\sigma\\
&=\oint_{\partial\overset{t}{\Sigma}}(\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{V}\mathrm{d}l+\int_{\overset{t}{\Sigma}}\boldsymbol{f}_\Sigma\cdot\boldsymbol{V}\mathrm{d}\sigma\\
&\quad+\int_{\overset{t}{\Sigma}}q\mathrm{d}\sigma+\oint_{\partial\overset{t}{\Sigma}}(\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n})\cdot\left(\kappa\overset{\Sigma}{\Box}T\right)\cdot\boldsymbol{V}\mathrm{d}l.
\end{aligned}$$

利用内蕴形式第二类广义 Stokes 公式, 可得**能量守恒微分方程**

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{|\boldsymbol{V}|^2}{2}+e\right)=\overset{\Sigma}{\Box}\cdot(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{V})+\boldsymbol{f}_\Sigma\cdot\boldsymbol{V}+q+\overset{\Sigma}{\Box}\cdot\left(\kappa\overset{\Sigma}{\Box}T\right).$$

另一方面, 在动量方程两边作用 $\cdot\boldsymbol{V}$, 可得**动能微分方程**

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{V}=\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{|\boldsymbol{V}|^2}{2}\right)=\left(\overset{\Sigma}{\Box}\cdot\boldsymbol{t}\right)\cdot\boldsymbol{V}+\boldsymbol{f}_\Sigma\cdot\boldsymbol{V}.$$

结合能量守恒微分方程和动能微分方程, 可得**内能微分方程**:

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\overset{\Sigma}{\Box}\cdot(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{V})-\left(\overset{\Sigma}{\Box}\cdot\boldsymbol{t}\right)\cdot\boldsymbol{V}+q+\overset{\Sigma}{\Box}\cdot\left(\kappa\overset{\Sigma}{\Box}T\right)=\boldsymbol{t}:\left(\overset{\Sigma}{\Box}\otimes\boldsymbol{V}\right)+q+\overset{\Sigma}{\Box}\cdot\left(\kappa\overset{\Sigma}{\Box}T\right),$$

进一步, 可将曲面应力分解为

$$\boldsymbol{t}=(\gamma-p)\boldsymbol{I}+\boldsymbol{t}_*,$$

$\boldsymbol{t}_*$ 代表介质内部黏性作用对应力的贡献, 可称为**黏性应力**. 藉此, 内能方程具有形式

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=(\gamma-p)\theta+\boldsymbol{t}_*:\left(\overset{\Sigma}{\Box}\otimes\boldsymbol{V}\right)+q+\overset{\Sigma}{\Box}\cdot\left(\kappa\overset{\Sigma}{\Box}T\right):$$

式中 $\theta=\nabla_lV^l-HV^3$, $\boldsymbol{t}_*:\left(\overset{\Sigma}{\Box}\otimes\boldsymbol{V}\right)$ 可称为**耗散函数**.

2 应用事例

3 建立路径

- 守恒律方程的推导, 首先按自然界中的守恒律列出物质面 (考虑了面密度) 上的积分关系式, 特别地作用于物质面边界的力 (表现为曲线积分) 可以通过内蕴形式的广义 Stokes 公式转化为曲面上的积分, 再结合物质面输运定理便可获得积分型及微分型关系式. 本讲稿推导了质量守恒, 动量守恒, 动量矩守恒以及能量守恒的 Euler 型微分方程. 至今并未获得所有守恒律的 Lagrange 型控制方程.

- 值得指出, 质量守恒因为同介质的物性完全无关, 故可隶属运动学, 而其它形式的守恒律方程则隶属动力学.