集合论习题解析
——经典习题与考研习题

- 经典习题

一、集合基础

二、二元关系

三、函数

四、概念综合练习

- 考研习题

　北京大学、中科院计算所、中科院软件所、中科院自动化所、北京师范大学、中科院成都计算所、上海交通大学、西安交通大学、西南交通大学、北京航空航天大学、复旦大学等

一、集合基础

- 1.1 $\in$与$\subseteq$
- 1.2 集合运算
- 1.3 幂集

1.1 $\in$与$\subseteq$

- 1 设A, B, C是任意3个集合，如果$A \in B$, $B \in C$, 则$A \in C$可能吗？ $A \in C$常真吗？举例说明。

- $A \in C$可能

$A=\{1\}, B=\{\{1\}\}, C=\{\{1\}, \{\{1\}\}\}$

- $A \in C$不常真

$A=\{1\}, B=\{\{1\}\}, C=\{\{\{1\}\}\}$

- 2　设A, B是任意2个集合， $A\subseteq B$与 $A\in B$同时成立，这可能吗？

- 可能
- $A=\{1\}$, $B=\{\{1\}, 1\}$.

- 3　设A, B, C是集合，判断下列命题真假，如果为真，给出证明；如果为假，给出反例：
- 1) $A \notin B,\ B \in C \Rightarrow A \in C;$
- 2) $A \notin B,\ B \notin C \Rightarrow A \notin C;$
- 3) $A \in B,\ B \notin C \Rightarrow A \notin C;$
- 4) $A \subset B,\ B \notin C \Rightarrow A \notin C;$
- 5) $a \in A,\ A \subset B \Rightarrow a \in B.$

- 1）假

$A=\{1\}, B=\{2\}, C=\{\{2\}\}$

- 2）假

$A=\{1\}, B=\{2\}, C=\{\{1\}\}$

- 3）假

$A=\{1\}, B= \{\{1\}\}, C=\{\{1\}, 1\}$

- 4）假

$A=\{1\}, B=\{\{1\}, 1\}$，$C=\{\{1\}, 2\}$

- 5）真

子集定义

- 4　设A, B, C是U的子集，判断下列命题真假，如果为真，给出证明；如果为假，给出反例：
- 1) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$;
- 2) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = A$;
- 3) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$;
- 4) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = B$;
- 5) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup (B-A) = B$;
- 6) $B \subset A \Leftrightarrow (A-B) \cap B = A$;

- 1）假， $A=B$时不成立
- */* $\subseteq$与$\subset$不同*/*
- 分析：
- I) $A\subset B\Rightarrow A\cup B=B$：

  因为$B\subseteq A\cup B$；对于任意$x\in A\cup B$，如果$x\in A$, 因为$A\subset B$, 所以$x\in B$, 则对任意的$x\in A\cup B$， $x\in B$成立。所以$A\cup B=B$。
- II) $A=B$

  $A\cup B=B$，但$A\subset B$不成立。

- 2）假， $A=\{1\}$，$B=\{1，2\}$，不成立；
- 3）假， $A=B$时不成立；
- 4）假， $A=\{1\}$，$B=\{1，2\}$，不成立；
- 5）假， $A=B$时不成立
- 6）假， $A=\{1，2\}$，$B=\{1\}$，不成立；

1.2 集合运算

- 5 设A, B, C是任意3个集合，
- （1）$A \cup B = A \cup C$，则$B = C$吗？
- （2）$A \cap B = A \cap C$，则$B = C$吗？
- （3）$A \cup B = A \cup C$且$A \cap B = A \cap C$，则$B = C$吗？

- （1）假

$A=\{1, 2\}, B=\{1\}, C=\{2\}$

- （2）假

$A=\{1\}, B=\{1, 2\}, C=\{1, 3\}$

- （3）真

/*基本法、反证法证明*/

设$x\in B$，假设$x\notin C$。因为$x\in B$，所以$x\in A\cup B$；因为$A\cup B=A\cup C$，所以$x\in A\cup C$；因为$x\notin C$，所以$x\in A$；又因为$x\in B$，所以$x\in A\cap B$；因为$A\cap B=A\cap C$，所以$x\in A\cap C$；则$x\in C$，这与$x\notin C$矛盾。所以$B=C$。

- 6　设A, B是任意2个集合，
- （1）若$A\text{-}B=B$，则A与B有何关系？
- （2）若$A\text{-}B=B\text{-}A$，则A与B有何关系？
- （3）若$A\cap B=A\cup B$，则A与B有何关系？
- （4）若$A\oplus B=A$，则A与B有何关系？

- */*用文氏图辅助*/*

- 证明：(1)由$A-B=B$，可得出$A=B=\varnothing$。

- (2)由A-B=B-A，可导出A=B。

- (3) $A=B$

- (4) $B=\varnothing$

- 7 给出下列命题成立的充分必要条件
- （1）$(A-B)\cup(A-C)=A$
- （2）$(A-B)\cup(A-C)=\varnothing$
- （3）$(A-B)\cap(A-C)=\varnothing$
- （4）$(A-B)\oplus(A-C)=\varnothing$
- /*等式推导*/

- 解：(1)
- 1) $\Rightarrow$：设$(A-B)\cup(A-C)=A$，对任意的x，$x\in A$，则$x\in A-B$ 或 $x\in A-C$；则有

$x \in A \cap \overline{B}$或 $x \in A \cap \overline{C}$

$\Rightarrow x \in \overline{B}$或 $x \in \overline{C}$

$\Rightarrow x \in \overline{B} \cup \overline{C}$

$\Rightarrow x \notin B \cap C$

所 以 ， $A \cap B \cap C = \phi$.

- 2）$\Leftarrow$：设$A\cap B\cap C=\varnothing$，对任意的$x$，$x\in A$，则$x\notin B$或$x\notin C$，则有

$$x\in A\cap\overline{B}\text{或}x\in A\cap\overline{C}$$

$$\Rightarrow x\in A-B\text{或}x\in A-C$$

$$\Rightarrow x\in(A-B)\cup(A-C)$$

所以，$A\subseteq(A-B)\cup(A-C)$.

对任意的x，$x\in(A-B)\cup(A-C)$，则$x\in A-B$或$x\in A-C$，则有

$$x\in A\cap\overline{B}\text{或}x\in A\cap\overline{C}$$

$$\Rightarrow x\in A.$$

$$\text{所以},(A-B)\cup(A-C)=A.$$

$$\text{从而},(A-B)\cup(A-C)=A\Leftrightarrow A\cap B\cap C=\phi.$$

- （2）
- $(A-B)\cup(A-C)=\varnothing$

$\Leftrightarrow (A-B)=\varnothing$或$(A-C)=\varnothing$

$\Leftrightarrow A\subseteq B$并且$A\subseteq C$

$\Leftrightarrow A\subseteq B\cap C$

所以，充要条件为$A\subseteq B\cap C$。

- （3）

1) 设$(A-B)\cap(A-C)=\varnothing$，对任意的$x$，$x\in A$，$x\notin(A-B)$并且$x\notin(A-C)$；所以$x\in B-A$或$x\in C-A$；则有$x\in B$或$x\in C$；得$x\in B\cup C$。

所以$A\subseteq B\cup C$。

2) $A\subseteq B\cup C \Rightarrow A\subseteq B$或$A\subseteq C$；所以$A-B=\varnothing$或$A-C=\varnothing$。得$(A-B)\cap(A-C)=\varnothing$。

从而，$(A-B)\cap(A-C)=\varnothing\Leftrightarrow A\subseteq B\cup C$。

- （4） $(A-B)\oplus(A-C)=\varnothing$

  $\Leftrightarrow ((A-B)-(A-C)) \cup ((A-C)-(A-B)) = \varnothing$

  $\Leftrightarrow (A-B)\subseteq(A-C)$ 并且 $(A-C)\subseteq(A-B)$

  $\Leftrightarrow (A-B)=(A-C)$

1.3 幂集

- 7 设A, B是任意2个集合，证明：
- （1） $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$
- （2） $P(A) \subseteq P(B) \Rightarrow A \subseteq B$
- （3） $P(A)=P(B) \Leftrightarrow A=B$

- /*利用基本法证明集合的包含关系*/
- 证明：
- (1)对任意的$x \in P(A)$, 有$x \subseteq A$, 又因为$A \subseteq B$，所以$x \subseteq B$, 即$x \in P(B)$；所以$\mathrm{P(A)} \subseteq \mathrm{P(B)}$。
- *(2)/*证明方法同(1)；*/*

对任意的$x \in A$, 则$\{x\} \in P(A)$，又因为$P(A) \subseteq P(B)$，所以$\{x\} \in P(B)$，即$x \in B$；所以$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$。

- (3)由(1)和(2)的证明导出。

二、二元关系

- 1 设R是集合A上的关系
- （1）R是自反的，则$R\circ R$是自反的；
- （2）R是对称的，则$R\circ R$是对称的；
- （3）R是反自反和传递的，则R是反对称的；

- */*证明思想：根据定义给出的性质证明*/*
- 证明：
- （1）证明思想与（2）和（3）相同
- （2）设(a, b)∈R°R, 则存在c, (a, c)∈R, (c, b)∈R; 因为R是对称的，所以(b, c)∈R, (c, a)∈R; 所以(b, a)∈R°R。则R°R是对称的。
- （3）假设(a, b)∈R, (b, a)∈R。因为R是传递的，所以(a, a)∈R，(b, b)∈R；因为R是反自反的，所以导致矛盾。

- 2　设R是A上的关系，若R是自反的和传递的，则$R\circ R=R$。

  其逆命题也成立吗？

证明思想：

证明$R\circ R=R$，1）证明$R\circ R\subseteq R$； 2） 证明$R\subseteq R\circ R$；

- 证明：
- 1）证明$R \circ R \subseteq R$：

  设$(a, b) \in R \circ R$，存在$c \in A$, 使得$(a, c) \in R$, $(c, b) \in R$，因为R是传递的，所以$(a, b) \in R$；则$R \circ R \subseteq R$；
- 2） 证明$R \subseteq R \circ R$：

  设$(a, b) \in R$，R是自反的，$(b, b) \in R$，所以$(a, b) \in R \circ R$；则$R \subseteq R \circ R$。

所以$R \circ R = R$。

- 自反不成立
- 传递成立

特殊关系

- 3 设S={1, 2, 3, 4}，并设A=S×S，在A上定义关系R为：（a, b）R（c, d）当且仅当a+b=c+d。
- （1）证明R是等价关系；
- （2）计算出A/R。

- （1）证明：***/*根据等价关系的定义证明*/***
- 1） ***/*证明R是自反的：*/***
- 对于任意的(a, b)∈S×S，因为a+b=a+b，所以(a, b) R (a, b)，即R是自反的。
- 2） ***/*证明R是对称的：*/***
- 如果(a, b) R (c, d)，则a+b=c+d，那么有c+d=a+b；所以(c, d) R (a, b)，即R是对称的。
- 3） ***/*证明R是传递的：*/***
- 如果(a, b) R (c, d)，(c, d) R (e, f)，则a+b=c+d，c+d= e+f；所以a+b= e+f，得(a, b) R (e, f)，即R是传递的。

- （2）如果(a, b) R (c, d)，则a+b=c+d，所以根据和的数来划分。

- 4　设R, S是A上的等价关系，证明：$R\circ S$是A上的等价关系$\Leftrightarrow R\circ S=S\circ R$。

- 证明思想：
- 1）$R \circ S$是A上的等价关系$\Rightarrow R \circ S = S \circ R$；

证明(i)$R \circ S \subseteq S \circ R$；　(ii)$S \circ R \subseteq R \circ S$；

- 2）$R \circ S = S \circ R \Rightarrow R \circ S$是A上的等价关系；

证明$R \circ S$是(i)自反的；(ii)对称的；(iii)传递的；

- 证明：
- 1）$R\circ S$是A上的等价关系$\Rightarrow R\circ S=S\circ R$：

  如果$(a, b)\in R\circ S$, 因为$R\circ S$是对称的，所以$(b, a)\in R\circ S$, 所以存在$c\in A$, 使得$(b, c)\in R$, $(c, a)\in S$；因为R和S是对称的，所以$(c, b)\in R$, $(a, c)\in S$；则$(a, b)\in S\circ R$；

  同理，$S\circ R\subseteq R\circ S$；

- 2） $R \circ S = S \circ R \Rightarrow R \circ S$是A上的等价关系：
- /*证明$R \circ S$是自反的、对称的比较容易*/

- 传递性证明：
- 对任意a, b, c∈A，如果(a, b)∈R°S, (b, c)∈R°S，因为R°S=S°R，则有(b, c)∈S°R，即存在e, f∈A，使(a, e)∈R，(e, b)∈S，(b, f)∈S，(f, c)∈R。
- 因为S是传递的，(e, b)∈S，(b, f)∈S，所以(e, f)∈S；因为(a, e)∈R，所以(a, f)∈R°S；R°S是对称的，则(f, a)∈R°S；因为R是对称的，(f, c)∈R，则(c, f)∈R。
- 因为(f, a)∈R°S，则存在g∈A，使得(f, g)∈R，(g, a)∈S；因为R是传递的，由(c, f)∈R，(f, g)∈R，则(c, g)∈R；因为(c, g)∈R，(g, a)∈S，所以(c, a)∈R°S。因为已经证明，R°S是对称的，所以(a, c)∈R°S。

函数

- 12　设f: X→Y是函数，A, B是X的子集，证明：
- （1）$f(A\cap B) \subseteq f(A)\cap f(B)$
- （2）$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$
- （3）$f(A) - f(B) \subseteq f(A-B)$

- /*基本法证明*/
- 证明：（1）对任意的$y \in f(A \cap B)$，存在x，$x \in A \cap B$，使得$y=f(x)$。因为$x \in A$，所以$y \in f(A)$；因为$x \in B$，所以$y \in f(B)$。所以$y \in f(A) \cap f(B)$。则$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$。

- 13 设R是A上的一个二元关系，S={(a, b) | a,b∈A并且对于某个c∈A，有(a, c)∈R且(c, b)∈R}。证明：若R是A上的等价关系， 则S是A上的等价关系。

- /*证明是S自反、对称和传递*/

四、概念综合练习

- 一、选择题（北京理工大学2000考研）
- 1　下列集合运算中（　　）对⊕满足分配律。
- A) $\cup$
- B) $\cap$
- C) $-$
- D) $\oplus$

- 2 A、B是集合，$P(A)$、$P(B)$为其幂集，且$A \cap B=\varnothing$，则$P(A) \cap P(B)=$（　　）
- A) $\varnothing$
- B) $\{\varnothing\}$
- C) $\{\{\varnothing\}\}$
- D) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

- 3　A、B是集合，以下各式除（　　）之外，均与$A \subseteq B$等价。
- A) $A \oplus B \subseteq B$
- B) $A \cup B = B$
- C) $A \cap B = A$
- D) $A \times B \subseteq B^2$

- 4 R是集合A上的自反关系，则（　　）
- A) $R \circ R$
- B) $R \subseteq R \circ R$
- C) $R \cap R^{-1} = I_A$
- D) $R \circ R^{-1} = I_A$

- 5 集合A中有n个元素，则A上共有（ ）个既对称又反对称的关系。
- A) 0
- B) $2n$
- C) n^2
- D) 2^n

- 6 R是可传递的二元关系，则在$R \cap R^{-1}$, $R \cup R^{-1}$, $R-R^{-1}$, $R^{-1}-R$中，有（　）个一定是可传递的。
- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4

- 7 函数f: R→R，其中R为实数集合，下列四个命题中（ ）为真。
- A) f(x)=5是内射的
- B) f(x)=5是满射的
- C) f(x)=5是双射的
- D) A), B), C)都不真

- 8　　集合A到B共有64个不同的函数，则B中元素不可能是（　）个。
- A)　4
- B)　8
- C)　16
- D)　64

- 二、选择题（北京理工大学1999）
- 1 已知$A\oplus B=\{1, 2, 3\}$，$A\oplus C=\{2, 3, 4\}$，若$2\in B$，则________。
- A) $1\in C$
- B) $2\in C$
- C) $3\in C$
- D) $4\in C$

- 2　对任何二元关系R，在$R\cup R^{-1}$, $R\cap R^{-1}$, $R\circ R^{-1}$, $R\oplus R^{-1}$中有______个一定是对称关系。
- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4

- 3 $R=\{(1,4),(2,3),(3,1),(4,3)\}$，则______$\notin t(R)$。
- A) (1, 1)
- B) (1, 2)
- C) (1, 3)
- D) (1, 4)

集合论——考研习题

- 考研习题

一、集合基础

二、二元关系

三、函数

一、集合基础

- 1.1 集合运算——容斥原理
- 1.2 集合运算——证明
- 1.3 幂集
- 1.4 相类似的练习题目

1.1 集合运算——容斥原理

- *中国科学院自动化所1997*
- 120个学生参加考试，考试有A、B和C3道题，考试结果如下：12个学生3道题都做对了，20个学生做对A和B，16个学生做对A和C，28个学生做对B和C，做对A的有48个学生，做对B的有56个学生，有16个学生一道也没有做对。试求做对了C的学生有多少个？
- <u>*直接使用容斥原理*</u>

- 解：设做对A题的学生集合为P_A，做对B题的学生集合为P_B，做对C题的学生集合为P_C。
- /*根据容斥原理，列出计算式*/
- $|P_A \cap P_B \cap P_C|=12$,

  $|P_A \cap P_B|=20$, $|P_A \cap P_C|=16$, $|P_B \cap P_C|=28$,

  $|P_A|=48$, $|P_B|=56$,

$$\left|\overline{P_A \cup P_B \cup P_C}\right| = 16$$

- /*根据容斥原理，进行计算*/
- $|P_A \cup P_B \cup P_C| = 120-16$,

  $|P_A \cup P_B \cup P_C| = |P_A| + |P_B| + |P_C| - |P_A \cap P_B| - |P_A \cap P_C| - |P_B \cap P_C| + |P_A \cap P_B \cap P_C|$,

  所以$|P_C| = 20+16+28+104-12-48-56=52$，做对C题的学生为52人。

容斥原理解题总结

- 使用容斥原理时，首先搞清论域，划定全集；其次对全集进行分类，列出计算式；最后根据容斥原理的公式进行计算。

北京师范大学2001

证明容斥原理：设$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$都是有限集，则

$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} m_k$

其中：$m_k = \sum |A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots\ldots A_{i_k}|$

$\{i_1, i_2, \ldots i_n\}$是遍历$\{1, 2, \ldots, n\}$的所有k元子集。

*/*证明思想：数学归纳法*/*

- 证明：
- 1）***<u>归纳基础</u>:***
- 当k=2时，集合A_1和A_2的公共元素个数为$|A_1 \cap A_2|$，这些元素中的每一个在$|A_1|+|A_2|$里计算了两次，但在$|A_1 \cup A_2|$中是作为一个元素计算的。因此有$|A_1 \cup A_2| = |A_1|+|A_2|-|A_1 \cap A_2|$。

所以，当n=2时，命题成立。

- 2）归纳步骤：

当$k=n-1$时，设

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_{n-1}\right| = \sum_{i=1}^{n-1} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n-1} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1}|$$

成立。

- 当k=n时，$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n| =$
  $|(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_{n-1}) \cup A_n| =$
  $|(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_{n-1})| + |A_n| -$
  $|(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_{n-1}) \cap A_n|$
  因为$|(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_{n-1}) \cap A_n| =$
  $|(A_1 \cap A_n) \cup (A_2 \cap A_n) \cup \ldots\ldots \cup (A_{n-1} \cap A_n)|$

/*n-1个集合的并，根据归纳假设展开*/

北京师范大学2000

- 设S为任一集合，证明在S与其幂集P(S)之间不存在1-1对应。

1.2 集合运算——证明

- 基本法、公式法

中国科学院软件所1998

- 1 对于任意集合A和B，证明：
- (1) $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$,
- (2) $P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$;
- 并举例说明$P(A)\cup P(B)\neq P(A\cup B)$。
- */* 幂集的定义：$P(A)=\{x \mid x\subseteq A\}$ */*

- （1）/*基本法*/
- 对任意的$x \in P(A) \cup P(B)$，有$x \in P(A)$或$x \in P(B)$。若$x \in P(A)$，则$x \subseteq A$，所以$x \subseteq A \cup B$，即$x \in P(A \cup B)$；同理，若$x \in P(B)$，则$x \subseteq B$，所以$x \subseteq A \cup B$，即$x \in P(A \cup B)$。
- 综上所述，$P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$。

- （2） /**基本法**/
- 对任意的$x \in P(A) \cap P(B)$，有$x \in P(A)$且$x \in P(B)$。即$x \subseteq A$并且$x \subseteq B$，则$x \subseteq A \cap B$。所以$x \in P(A \cap B)$。故$P(A) \cap P(B) \subseteq P(A \cap B)$。
- 对任意的$x \in P(A \cap B)$，有$x \subseteq A \cap B$，即$x \subseteq A$并且$x \subseteq B$，所以$x \in P(A)$且$x \in P(B)$。因此$P(A \cap B) \subseteq P(A) \cap P(B)$。
- 综上所述，$P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$。

- 举例说明$P(A) \cup P(B) \neq P(A \cup B)$。
- $A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $A \cup B=\{1, 2\}$;
- $P(A)=\{\varnothing, \{1\}\}$, $P(B)=\{\varnothing, \{2\}\}$, $P(A) \cup P(B)= \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}$, $P(A \cup B)= \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$; 所以$P(A) \cup P(B) \neq P(A \cup B)$。

中国科学院计算所1998

- 2 证明：若$(A-B)\cup(B-A)=C$，则$A\subseteq(B-C)\cup(C-B)$的充分必要条件是$A\cap B\cap C=\emptyset$。
- 证明思想：
- （1）充分性，即证明：若$A\cap B\cap C=\emptyset$，则$A\subseteq(B-C)\cup(C-B)$；基本法证明；
- （2）必要性，即证明：若$A\subseteq(B-C)\cup(C-B)$，则$A\cap B\cap C=\emptyset$；反证法证明。

- 证明：（1）对于任意的$a\in A$，因为$A\cap B\cap C=\varnothing$，所以$a\notin B\cap C$，则$a$有3种情况：
- I) $a\notin B$，但$a\in C$，则$a\in C-B$，所以$a\in(B-C)\cup(C-B)$；
- II) $a\in B$，但$a\notin C$，则$a\in B-C$，所以$a\in(B-C)\cup(C-B)$；
- III) $a\notin B$且$a\notin C$，因为$a\in A$，所以$a\in A-B$，所以$a\in(A-B)\cup(B-A)$，即$a\in C$，导致矛盾，所以$a\notin B$且$a\notin C$不可能出现。
- 综上所述，对于任意的$a\in A$，$a\in(A-B)\cup(B-A)$，所以$A\subseteq(B-C)\cup(C-B)$。

- 证明：（2）假设$A\cap B\cap C\neq\varnothing$，则存在$a$，$a\in A\cap B\cap C$，即$a\in A$， $a\in B$，且$a\in C$。所以$a\notin B-C$，$a\notin C-B$。则$a\notin(B-C)\cup(C-B)$。因为$A\subseteq(B-C)\cup(C-B)$，$a\in A$，所以导致矛盾。所以$A\cap B\cap C=\varnothing$。

北京大学1998

- 3 给出集合表达式$(A-C)\cup B=A\cup B$成立的充要条件.

- $(A-C)\cup B$

$=(A\cap\overline{C})\cup B$

$=(A\cup B)\cap(\overline{C}\cup B)$

所以，要求 $(A-C)\cup B=A\cup B$，即要求$(A\cup B)\cap(\overline{C}\cup B)=A\cup B$;

即，$(A\cup B)\subseteq(\overline{C}\cup B)$，所以$A\subseteq\overline{C}\cup B$.

北京大学1994

- 判断题，为真给出证明，为假给出反例：
- 1）$\{\varnothing\}\subseteq\{x\}-\{\{x\}\}$
- 2）若$A\times B=A\times C$，则$B=C$。
- 3）R是A上的关系，则$R=R^2$的充要条件是$R=I_A$。

1.3 幂集

- 幂集运算：代数法

北京大学1997

- 1 设A为集合，$B=P(A)-\{\varnothing\}-\{A\}$，且$B\neq\varnothing$。求偏序集$(B, \subseteq)$的极大元，极小元，最小元。

- 因为$B\neq\varnothing$，所以$|A|>1$。
- 对任意x∈A, A-{x}是极大元，{x}是极小元，无最小元。

北京大学1999

- 2 设$A=\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$，计算$P(A)-\{\varnothing\}, P(A)\oplus A$。

- /* 代数法求$P(A)$ */
- 设$x=\varnothing, y=\{\varnothing\}$，$A=\{x, y\}, P(A)=\{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$;
- $P(A)=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$;
- $P(A)-\{\varnothing\}=\{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$;
- $P(A)\oplus A=\{ \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \}$;

上海大学1998

- 3　设A是集合，A的元素也是集合，$P(A)$是A的幂集。定义$\cup A=\{ x \mid \exists y \in A, x \in y \}$
- （1）计算$\cup\{\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{a, f\}\}$；
- （2）证明$\cup P(A)=A$；
- （3）请问$P(\cup A)=A$？
- *解题要素：$\cup A$（广义并）和幂集的定义；基本法*

- （1）计算$\cup\{\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{a, f\}\}$
- 解：
- $\cup\{\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{a, f\}\}$

$=\{a, b, c\} \cup \{a, d, e\} \cup \{a, f\}$

$= \{a, b, c, d, e, f\}$

- （2）证明$\cup P(A)=A$
- 证明：
- 对任意$x\in\cup P(A)$，则存在$y\in P(A)$，$x\in y$；因为$y\in P(A)$，所以$y\subseteq A$；因此$x\in y$，则有$\cup P(A)\subseteq A$；
- 对任意$x\in A$，设$y=\{x\}$，则$y\subseteq A$。所以$y\in P(A)$。因此$x\in\cup P(A)$。
- 所以$\cup P(A)=A$。

- （3）请问$P(\cup A)=A$？
- 不成立。
- 反例：（1）
- $A=\{\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{a, f\}\}$
- $\cup A=\{a, b, c, d, e, f\}$
- $P(\cup A)\neq A$

上海交通大学1998

- 4　C是非空集合族，证明：$P(\cap C)=\cap\{P(X)|X\in C\}$
- *证明方法：基本法，集合族的概念*

- 证明：
- 任取x $\in P(\cap C)$，则$x \subseteq \cap C$，所以对于任意的$a \in x$，有$a \in \cap C$；对于任意的$X \in C$，有$a \in X$；那么$x \subseteq X$，即x $\in P(X)$。由X的任意性，也即x $\in \cap\{P(X)|X \in C\}$。所以$P(\cap C) \subseteq \cap\{P(X)|X \in C\}$。
- 任取x $\in \cap\{P(X)|X \in C\}$，则对于任意的$X \in C$，有x $\in \cap P(X)$，即$x \subseteq X$。因为$X \in C$，对于任意的$a \in x$，有$a \in X$；因此$a \in \cap C$。所以$x \subseteq \cap C$，即x $\in P(\cap C)$。所以$\cap\{P(X)|X \in C\} \subseteq P(\cap C)$。
- 所以$P(\cap C)=\cap\{P(X)|X \in C\}$。

中科院成都计算所2000

- 5　　设A是一有限集，A的基数为$|A|$。证明：A的幂集P(A)的基数$|P(A)|=2^{|A|}$。

1.4 相类似的题目

- 1 A, B是两个集合，给出$A\oplus B=B$的充分必要条件是什么，并证明你的结论。
- */*南京理工大学2000*/*

- 2 判断下列各式是否成立，如果成立，则证明之，否则举出反例。
- （1）$P(A)\cup P(B)=P(A\cup B)$,
- （2）$(A\oplus B)\times C=(A\times C)\oplus(B\times C)$

- *上海交通大学2001*

- 3 证明$P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$，并说明等号成立的条件。

- *上海交通大学1999*

- 4　设A, B, C, D为4个非空集合，则$A\times B\subseteq C\times D$的充分必要条件是____________。

- /*重庆大学1998*/

二、二元关系

- 关系及其性质与运算
- 等价关系与划分
- 序关系

关系及其性质与运算

北京大学1997

- 1 设$R=\{(x, y) \mid x, y \in N$并且$x+3y=12\}$，求$R^2$。

- 解题思路：将R的所有元素列出，求R与它本身复合所得的关系

- 解：
- $R=\{ (0, 4), (3, 3), (6, 2), (9, 1), (12, 0) \}$
- $R^2=\{ (3, 3), (12, 4) \}$

北京大学1990

- 2　　　设R是复数C上的二元关系，且满足$xRy \Leftrightarrow x-y=a+bi$，$a$和$b$为非负整数，试确定$R$的性质（自反、反自反、对称、反对称和传递），并证明之。

北京大学1994

- 3 判断题，为真给出证明，为假给出反例：
- R是A上的二元关系，则$R=R^2 \Leftrightarrow R=I_A$。

武汉大学1999

- 4　　设$A=\{a, b, c\}$，给出A上的一个二元关系R，使其同时不满足自反、反自反、对称、反对称和传递性。

武汉大学1998

- 5　设$A=\{1, 2, 3\}$，R是$P(A)$上的二元关系，且$R=\{ (a, b) \mid a\cap b\neq\varnothing \}$。则$R$不满足下列哪些性质？为什么？
- 1) 自反
- 2) 反自反
- 3) 对称
- 4) 反对称
- 5) 传递性

等价关系与划分

中科院成都计算所2001

- 1 设R是集合A上的一个传递的和自反的关系，T是A上的一个关系，使得(a, b)属于T当且仅当(a, b)和(b, a)都属于R。
- 证明：T是一个等价关系。

西南交通大学1997

- 2　设X和Y都是正整数集，$x_i \in X$, $y_i \in Y$, $i=1, 2$.
- [1]下列关系是否是等价关系？证明你的结论。
- 1) $R=\{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mid x_1+y_2=x_2+y_1\}$
- 2) $R=\{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mid x_1+y_1=x_2+y_2\}$
- [2]若R是等价关系，定义集合M, $M=\{(0, 2), (1, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 6), (5, 6), \ldots\ldots\}$。试给出它的等价类。

西南交通大学1998

- 3 设$S=\{1, 2, 3\}$，定义$S\times S$上的关系R为：对任意$(a, b), (c, d)\in S\times S$，有$((a, b), (c, d)) \Leftrightarrow a+d=b+c$，证明：R为$S\times S$上的等价关系并给出$S\times S/R$。

上海交通大学2001

- 4 设P是X上的等价关系，Q是Y上的等价关系，关系R满足$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in R$ 当且仅当$(x_1, x_2) \in P$，$(y_1, y_2) \in Q$，证明： R是$X \times Y$上的等价关系。

南京理工大学2000

- 5 R是集合A上等价的二元关系，证明R^2也是A上的等价关系。

序关系

西南交通大学1998

- 1 集合A上的二元关系R如果是传递和反自反的，则称R是A上的拟序关系，证明：
- （1）如果R是A上的拟序关系，则$r(R)=R\cup I_A$是偏序关系；
- （2）如果R是A上的偏序关系，则$R-I_A$是拟序关系。

西南交通大学1999

- 2 设R是集合A上的偏序关系，且$B \subseteq A$，试证明$R' = R \cap (B \times B)$是B上的偏序关系。

复旦大学1999

- 3 判断是否正确，并说明理由。
- 设A是一个集合，R是A的幂集P(A)上的二元关系，对所有S、T∈P(A)，(S, T)∈P(A)。当且仅当|S|≤|T|，R是偏序关系。

华中科技大学2000

- 4 设P是集合A上的二元关系，P是传递的和反自反的，证明：r(P)是A上的偏序关系。

北京师范大学1999

- 5 证明整除关系是正整数集合上的偏序关系。

三、函数

西南交通大学1999

- 1 假设函数$f: A\rightarrow B$并定义$G: B\rightarrow P(A)$，对于$b\in B$，$G(b)=\{x\,|\,x\in A, f(x)=b\}$。证明如果f是A到B的满射，则G是内射的；其逆命题成立吗？

北京大学1998

- 2　　设$f: N\times N\rightarrow N, f((x, y))=xy$。求$f(N\times\{1\})$, $f^{-1}(\{0\})$，并说明是否为满射、内射和双射。

- 3 设f: $X \to Y$是函数，A, B是X的子集。证明：
- （1）$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;
- （2）$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$；
- （3）$f(A) - f(B) \subseteq f(A - B)$。

复旦大学1999

- 4　判断是否正确，并说明理由。
- 设A和B为集合，若存在A到B的满射函数，则$|B|\leq|A|$。

武汉大学1999

- 5 设A, B, C, D是任意集合， f是A到B的双射，g是C到D的双射。令h: $A\times C\to B\times D$且$\forall(a, c)\in A\times C$， $h((a, c))=(f(a), g(c))$。那么h是双射吗？请证实你的判断。

中国科学院软件所1996

- 6 设f: $A\rightarrow B$, g: $B\rightarrow C$, h:$B\rightarrow C$, 证明：如果$h\circ g\circ f=I_A$，$f\circ h\circ g=I_B$，$g\circ f\circ h=I_C$，则f、g和h均为双射，并求出f^{-1}，g^{-1}，h^{-1}。

中国科学院计算所1998

- 7 设R_1和R_2为X上的两个关系，且$R_1 \circ R_2 = I_X$。
- 1）若X为有限集合，证明：存在X上双射f_1和f_2，使得$f_1 \circ f_2 = I_X$且$aR_1b \Leftrightarrow b=f_1(a)$，$cR_2d \Leftrightarrow d=f_2(c)$。
- 2）若X为无限集合，举例说明1）的结论不成立。