数量经济学习题一参考答案

一、假定消费者面临下面的最优化问题（$\underline{c}>0$）：

$$\underset{c_1,c_2}{Max}\, u\left(c_1,c_2\right)=\alpha\ln(c_1-\underline{c})+\left(1-\alpha\right)\ln c_2$$
$$s.t.\ G\left(c_1,c_2\right)=w-p_1c_1-p_2c_2=0$$

1. 写出上述问题的解条件方程。
2. 消费者应该如何决策？
3. 如果$\underline{c}>0$是食品的最低消费，上述选择是否符合恩格尔定律？
4. 你觉得这个模型能否用来预测一个国家经济增长过程中产业结构的变化？

答：

1. 对拉格朗日方程$\mathcal{L}=\alpha\ln(c_1-\underline{c})+\left(1-\alpha\right)\ln c_2+\lambda\left(w-p_1c_1-p_2c_2\right)$求一阶条件（FOC）：

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_1}=\frac{\alpha}{c_1-\underline{c}}-\lambda p_1=0$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_2}=\frac{1-\alpha}{c_2}-\lambda p_2=0$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}=w-p_1c_1-p_2c_2=0$$

2. 联立方程可以解出：

$$c_1=\frac{\alpha\left(w-p_1\underline{c}\right)}{p_1}+\underline{c}$$
$$c_2=\frac{\left(1-\alpha\right)\left(w-p_1\underline{c}\right)}{p_2}$$

3. 食品消费占总收入的比例如下，当收入水平w上升时，恩格尔系数下降：

$$\frac{p_1c_1}{w}=\alpha+\frac{\left(1-\alpha\right)p_1\underline{c}}{w}$$

4. 上述模型可以解释恩格尔系数随着经济发展和国民收入的增长而下降的现象，但是由于没有将非食品的制造业和服务业做进一步的区分，无法解释第二和第三产业比重的变化，因此还需要做进一步拓展。

二、在一个两期的OLG（overlapping generation）模型中，假定一生可以分为年轻（y）和年老（o）两期，个人做出消费-储蓄决策，以最大化一生的总效用：

$$MaxU=u\left(c^y\right)+\beta u\left(c^o\right)$$
$$s.t.\quad c^y+s=w^y=1$$
$$c^o=\left(1+r\right)s=Rs$$

其中：$\beta\in\left(0,1\right)$为时间贴现率，$w^y=1$为正规化的年轻时的收入，r为外生给定的利率水平。回答下述问题：

1. 写出模型的一阶条件；

2. 假设有 CRRA 形式的效用函数 $u(c)=\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$，其中相对风险规避系数 $\gamma>1$。求出 c^y 和 s，分析影响储蓄率的因素。

答：

（1） $u'(c^y)=\beta R u'(c^o)$；

（2）
$$c^y=\frac{1}{1+\beta^{1/\gamma}R^{1/\gamma-1}}$$
$$s=1-c^y=s\left(\underset{-}{R},\underset{+}{\beta},\underset{+}{\gamma}\right)$$

三、给定利率和工资水平 w,r，假定企业的产品价格正规化为 $P=1$，最优化问题为（参数 $\rho<1,\ 0<\alpha<1$）：

$$\underset{K,L}{Max}\,\Pi=Y-rK-wL$$
$$s.t.?Y=A\left[\alpha K^{\rho}+(1-\alpha)L^{\rho}\right]^{1/\rho}$$

1. 写出以下人均形式的最优化问题的解条件方程（$x=\frac{X}{L}$）：

$$\underset{k}{Max}\,\pi=y-rk-w$$
$$s.t.\ y=A\left[\alpha k^{\rho}+1-\alpha\right]^{1/\rho}$$

2. 企业的最优人均资本存量是多少？

3. 当 $0<\rho<1$ 时，资本收入占比 $s_K\equiv\frac{rK}{Y}=\frac{rk}{y}$ 会受到哪些因素的影响？

4. 根据下面要素替代弹性的定义（其中 $MP_x\equiv\frac{dY}{dx},(x=K,L)$ 为要素的边际产出）：

$$\sigma\equiv-\frac{d\ln\left(\frac{K}{L}\right)}{d\ln\left(\frac{MP_K}{MP_L}\right)}$$

证明对 CES 生产函数而言，有 $\sigma=\frac{1}{1-\rho}$。

5. 解释结果 3 的经济含义。

答：

1. 根据 $\mathcal{L}=A\left[\alpha k^{\rho}+1-\alpha\right]^{1/\rho}-rk-w$ 求一阶条件得到：

$$A\left(\alpha k^{\rho}+1-\alpha\right)^{1/\rho-1}\alpha k^{\rho-1}=r \text{ 或 } \frac{\alpha k^{\rho}}{\alpha k^{\rho}+1-\alpha}=\alpha^{\frac{1}{1-\rho}}\left(\frac{r}{A}\right)^{\frac{-\rho}{1-\rho}}$$

2. 最优人均资本存量为：

$$k^{\rho}=\frac{1-\alpha}{\alpha\left(\alpha^{\frac{-1}{1-\rho}}\left(r/A\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}}-1\right)}$$

3. 一阶条件 $A\left(\alpha k^{\rho}+1-\alpha\right)^{1/\rho-1}\alpha k^{\rho-1}-r=0\Rightarrow s_K=\frac{rk}{y}=\frac{\alpha k^{\rho}}{\alpha k^{\rho}+1-\alpha}$，当 $0<\rho<1$ 时，资本收入占比与 α 和技术水平 A 正相关，而且会随着人均资本量的上升和利率水平 r 的下降而上升，极限情况下趋于 1。

4. 根据总量生产函数 $Y=A\left[\alpha K^{\rho}+(1-\alpha)L^{\rho}\right]^{1/\rho}$，$\frac{MP_K}{MP_L}=\frac{\alpha K^{\rho-1}}{(1-\alpha)L^{\rho-1}}=\frac{\alpha k^{\rho-1}}{1-\alpha}$，代入替代弹性定义式，有：

$$\sigma=-\frac{d\ln\left(k\right)}{d\ln\left(\frac{\alpha k^{\rho-1}}{1-\alpha}\right)}=\frac{1}{1-\rho}$$

5. 当 $0<\rho<1$ 时，资本和劳动之间的替代弹性 $\sigma>1$。其他情况不变，利率水平 r 下降将使企业用大量的资本替代劳动，使资本收入和资本收入占比不降反升。