数量经济学习题二参考答案

一、求微分方程、推导 CES 生产函数：

Arrow(1961)通过实证分析发现不同行业i的人均对数工资和人均对数产出之间存在以下关系：

$$\ln y = a + b\ln w$$

考虑到工资水平$w = y - \frac{\partial y}{\partial k}k$，请求解产出函数$y = f(k)$。

答：

将工资定义代入回归结果$\ln y = a + b\ln\left(y - \frac{\partial y}{\partial k}k\right)$，记$A = e^a$，有：

$$y = A\left(y - \frac{\partial y}{\partial k}k\right)^b \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial k} = \frac{y - (y/A)^{\frac{1}{b}}}{k}$$

其中$y - (y/A)^{\frac{1}{b}} = y\left(1 - y^{\frac{1}{b}-1}A^{\frac{-1}{b}}\right)$，记$\rho = \frac{1}{b} - 1, \tilde{A} = A^{\frac{-1}{b}}$，有：

$$\frac{\partial k}{k} = \frac{\partial y}{y\left(1 - y^{\rho}\tilde{A}\right)} = \left(\frac{1}{y} + \frac{y^{\rho-1}\tilde{A}}{1 - y^{\rho}\tilde{A}}\right)\partial y$$

两边求不定积分：

$$\ln k = c + \ln y - \frac{1}{\rho}\ln\left(1 - y^{\rho}\tilde{A}\right) \Rightarrow k = e^c y\left(1 - y^{\rho}\tilde{A}\right)^{-1/\rho}$$
$$\Rightarrow k^{-\rho} = e^{-c\rho}\left(y^{-\rho} - \tilde{A}\right) \Rightarrow y^{-\rho} = \tilde{A} + e^{c\rho}k^{-\rho}$$

最终得到 CES 形式的生产函数：$y = \left(\tilde{A} + \tilde{C}k^{b-1/b}\right)^{b/b-1}$（$\tilde{A} = e^{-a/b}, \tilde{C} = e^{c(1-b)/b}$），其中估计出的参数$b$就是资本劳动替代弹性。

二、消费者最优的线性二次型模型

消费者动态最优模型（参数$\beta \in (0,1)$、$a, b > 0$、$z > 1/\beta$）：

$$Max\sum_{t=1}^{\infty}\beta^t\left(ac_t - \frac{bc_t^2}{2}\right)$$
$$s.t. k_t = zk_{t-1} - c_t$$
$$k_0 = 1,\ \lim_{t\to\infty} h(c_t, k_t) = 0$$

1. 拉格朗日方程为：

$$\mathbb{L}=\sum_{t=1}^{\infty}\beta^{t}\left(ac_{t}-\frac{bc_{t}^{2}}{2}\right)+\sum_{t=1}^{\infty}\lambda_{t}\left(zk_{t-1}-c_{t}-k_{t}\right)$$

由一阶条件：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbb{L}}{\partial c_{t}}&=\beta^{t}\left(a-bc_{t}\right)-\lambda_{t}=0\\ \frac{\partial\mathbb{L}}{\partial k_{t}}&=-\lambda_{t}+\lambda_{t+1}z=0\end{aligned}\Rightarrow a-bc_{t}=\beta\left(a-bc_{t+1}\right)z$$

推导可得欧拉方程：$c_{t+1}=\frac{a}{b}-\frac{a-bc_{t}}{b\beta z}=\frac{a}{b}\left(1-\frac{1}{\beta z}\right)+\frac{c_{t}}{\beta z}$。

2. 由模型的动态方程 $\begin{cases}c_{t+1}=\frac{a}{b}\left(1-\frac{1}{\beta z}\right)+\frac{c_{t}}{\beta z}\\ k_{t+1}=zk_{t}-c_{t+1}\end{cases}$ 可得稳态：$c^{*}=\frac{a}{b},\ k^{*}=\frac{c^{*}}{z-1}$。

动态方程在稳态附近的一阶泰勒展开式为：

$$\begin{bmatrix}c_{t+1}-c^{*}\\ k_{t+1}-k^{*}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\beta z} & 0\\ -\frac{1}{\beta z} & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{t}-c^{*}\\ k_{t}-k^{*}\end{bmatrix}$$

雅各比矩阵的特征根 $\lambda_{1}=z>1,\ \lambda_{2}=\frac{1}{\beta z}<1$，因此稳态附近鞍点路径的近似解为：

$$\begin{aligned}c_{t}&=c^{*}+\left(c_{0}-c^{*}\right)\lambda_{2}^{t}\\ k_{t}&=k^{*}+\left(k_{0}-k^{*}\right)\lambda_{2}^{t}\end{aligned}$$

3. 相图：

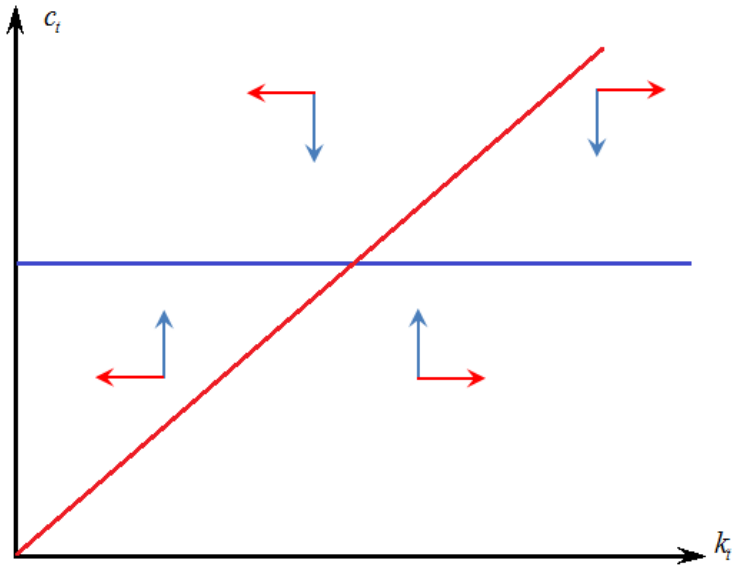
首先根据动态方程得到两条稳态分界线：

$$\begin{cases}c_{t+1}=\frac{a}{b}\left(1-\frac{1}{\beta z}\right)+\frac{c_{t}}{\beta z}\\ k_{t+1}=zk_{t}-c_{t+1}\end{cases}\Rightarrow\begin{aligned}&c_{t+1}=c_{t}=\frac{a}{b}\\ &k_{t+1}=k_{t},c_{t+1}^{ss}=\left(z-1\right)k_{t}^{ss}\end{aligned}$$

然后判断各个区域的变动方向。（1）$c_{t}>\frac{a}{b}$ 时，

$c_{t+1}-c_{t}=\left(1-\frac{1}{\beta z}\right)\left(\frac{a}{b}-c_{t}\right)<0$，在蓝色直线上方，消费将下降；（2）$c_{t+1}>c_{t+1}^{ss}$

时，$k_{t+1}<k_{t}$，在红色直线左侧，资本将下降。各区域变动方向如下图所示。鞍点路径为红色直线。



三、一般化的最优增长模型

$$
\begin{aligned}
&Max\sum_{t=1}^{\infty}\beta^t\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\\
&s.t.k_t=zk_{t-1}^{\alpha}+(1-\delta)k_{t-1}-c_t\\
&k_0=1,\ \lim_{t\to\infty}h(c_t,k_t)=0
\end{aligned}
$$

1. 拉格朗日方程、欧拉方程和差分方程组：

$$
\mathbb{L}=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}-\sum_{t=0}^{\infty}\lambda_t\left(k_t-zk_{t-1}^{\alpha}-(1-\delta)k_{t-1}+c_t\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathbb{L}}{\partial c_t}=0\Rightarrow\beta^t c_t^{-\gamma}=\lambda_t\\
&\frac{\partial\mathbb{L}}{\partial k_t}=0\Rightarrow\lambda_t=\lambda_{t+1}\left(\alpha zk_t^{\alpha-1}+1-\delta\right)
\end{aligned}
\Rightarrow\left(\frac{c_t}{c_{t+1}}\right)^{-\gamma}=\beta\left(\alpha zk_t^{\alpha-1}+1-\delta\right)
$$

$$
\begin{cases}
c_{t+1}=c_t\left[\beta\left(\alpha zk_t^{\alpha-1}+1-\delta\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}}\\
k_{t+1}=zk_t^{\alpha}+(1-\delta)k_t-c_{t+1}
\end{cases}
$$

2. 稳态和转移动态：

易证稳态为：

$$
k^*=\left(\frac{\alpha z}{1/\beta+\delta-1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},c^*=\left(\frac{1/\beta+\delta-1}{\alpha}-\delta\right)k^*
$$

记 $F^1(c_t,k_t)=c_t\left[\beta\left(\alpha zk_t^{\alpha-1}+1-\delta\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}}$，$F^2(c_t,k_t)=zk_t^{\alpha}+(1-\delta)k_t-F^1(c_t,k_t)$ 依次求偏导得到雅各比矩阵，稳态附近的转移动态方程为：

$$\begin{bmatrix} c_{t+1}-c^* \\ k_{t+1}-k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\beta}{\gamma}c^* f''\left(k^*\right) \\ -1 & \frac{1}{\beta}-\frac{\beta}{\gamma}c^* f''\left(k^*\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_t-c^* \\ k_t-k^* \end{bmatrix}$$

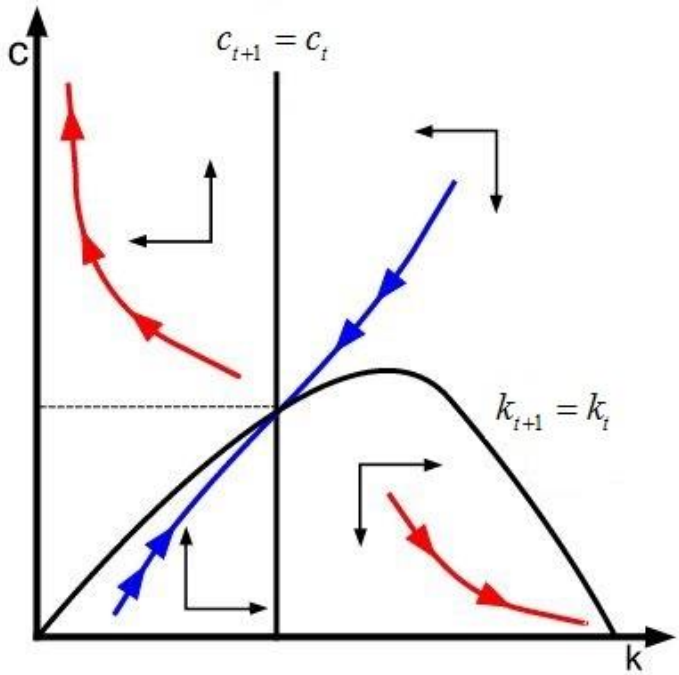
稳态附近鞍点路径的线性近似解为：

$$c_t = c^* + \left(c_0 - c^*\right)\lambda_2^t$$

$$k_t = k^* + \left(k_0 - k^*\right)\lambda_2^t$$

其中 $\lambda_2 = \dfrac{\varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4/\beta}}{2} \in (0,1)$，$\varphi = 1 + \dfrac{1}{\beta} - \dfrac{\beta}{\gamma}c^* f''(k^*) > 1 + \dfrac{1}{\beta}$ 。

3. 相图：



图片来源：Wiki 百科“saddle point”词条。