

复旦大学课程教学大纲

课程代码	MECH130106	编写时间	2016年03月更新
课程名称	应用实变函数与泛函分析基础 注：本课程为本科生、研究生共享课程		
英文名称	Fundamentals of Real and Functional Analysis		
学分数	3	周学时	54
任课教师*	谢锡麟	开课院系**	航空航天系（原力学与工程科学系）
预修课程	一元微积分（面对一元函数所建立的微分学与积分学）		

课程性质：
力学类本科生、研究生可作为专业选修课；非力学类本科生、研究生可作为任意选修课。

教学目的：

数理观点

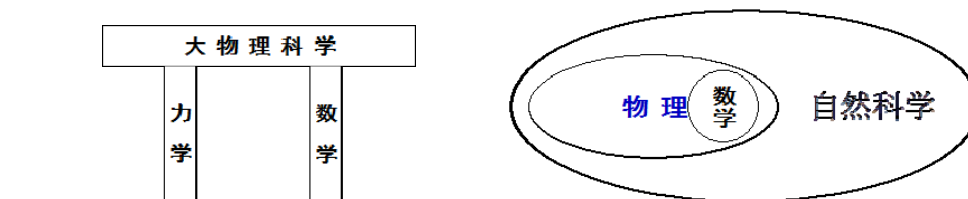


图 1（左）谈镐生先生的观点；（右）V.I.Arnold 的观点

我国著名科学家谈镐生先生，认为“按照近代观点，物理、化学、天体物理、地球物理、生物物理可以全部归纳为物理科学。力学是物理科学的，数学又是所有学科的共同工具，力学和数学原是科学发展史上的孪生子，因此形象地可以认为，物理科学是一根梁，力学和数学是它的两根支柱”，如图 1（左）所示。俄著名数理学家 V.I.Arnold，在其《论数学教学》中开门见山地指出“数学是物理的一部分；物理是自然科学，且是实验科学；数学是物理中‘做实验’比较‘便宜’的那部分”，如图 1（右）所示。

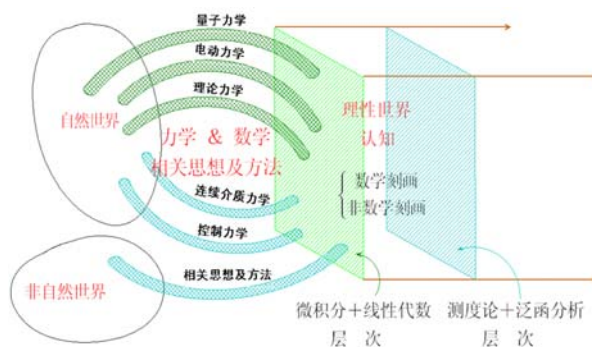


图 2 力学与数学为认识自然世界（广义范畴的物理科学）及非自然世界（社会、经济、管理等科学）提供基本的思想及方法

归纳力学、数学以及物理学的核心知识体系（对应相关专业的主干课程），笔者绘制图 2 以表现三学科之间的关系：力学与数学为我们认知自然及非自然世界提供了基本而又系统的思想及方法；同时数学又为我们构建理性世界（认知世界）提供了基本的表述形式；此处的自然世界为谈镐生先生所指的具有广义范畴的物理科学，非自然世界指社会、经济、管理等科学。

研究对象及目标

笔者持“数理观点”——基于坚实数理基础之上的“融会贯通、触类旁通”，以此实现“学问”向“能力”的进阶；表现为按数量方式，认知自然世界及非自然世界的一种具有统一性的世界观。

就数理观点的实现，我们归纳三个主要方面：①将所需认知的源于自然及非自然世界的对象分类为有限自由度系统和无限自由度系统。②对源于自然世界的认识对象的数学建模主要基于自然界的守恒律，对源于非自然世界的认识对象的数学建模可采用类比的思想及方法。③将力学、数学以及物理学核心知识体系融合为“数理知识体系”：包括数学、专业二条主要路径，各路径包括基础、高级二个层面，分别如图 3、4 所示。

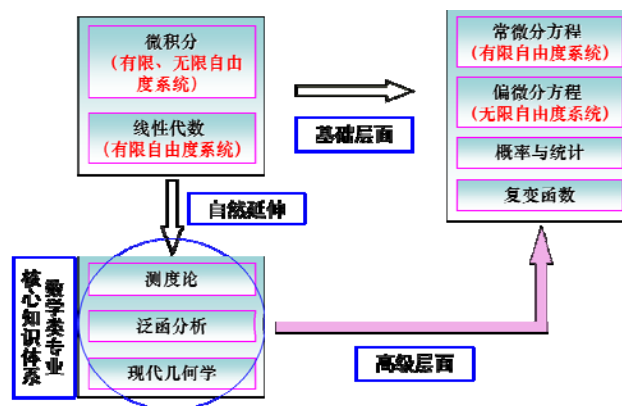


图 3 数理知识体系之数学路径，包含基础层面与高级层面

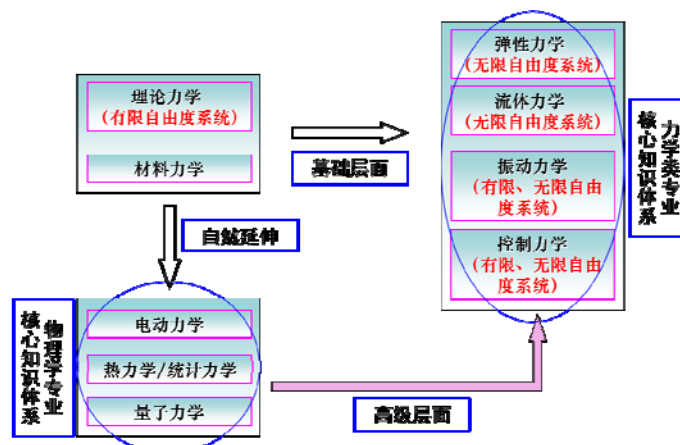


图 4 数理知识体系之专业路径，包含基础层面与高级层面

基于调研周培源、钱学森、钱伟长、郭永怀、谈镐生、郭仲衡、Kolmogorov, V.I. Arnold、L.I. Sedlov、L.D. Landau、B.A. Dubrovina、E.M. Stein 等国内外数理大师们的工作领域及其知识体系，笔者谨认为：基于数理知识体系之上的融会贯通、触类旁通，实现基础层面至高级层面的进阶，可形成具有发展新思想及新方法的能力，具有联系其它领域、开拓新领域的的能力，具有理论联系实际的能力——表现出学问至能力的进阶，以此实现强化认知水平、弱化专业局

限。笔者期待，按数理观点培养的学生具有领导现代科学与技术发展的能力。谈镐生先生强调“什么样基础决定什么样科研水平”——基础决定论。

本课程《应用实变函数与泛函分析基础》隶属数理知识体系之数学路径中的高级层面，如图 3 所示，主要为非数学类的本科生（研究生可共享）提供测度论、泛函分析方面的基础性知识（思想与方法）。

课程基本内容简介：

《应用实变函数与泛函分析基础》将主要提供：（一）测度论，主要包括测度的建立，可测函数，积分的建立，积分的分析理论，积分的计算理论。（二）度量空间的基础性理论，主要包括 Banach 空间中若干在应用领域具有基础性意义的结果，涉及 Banach 不动点定理、Brown 不动点定理等。（三）内积空间的基础性理论，主要包括 Hilbert 空间中若干在应用领域具有基础性意义的结果，涉及投影理论，完备函数基，Riesz 表示定理，Lax-Milgram 定理等。（四）Sobolev 空间的基础性理论，主要包括引入 L^p 空间、Sobolev 空间，建立相关积分不等式。这部分内容对于有限元理论、计算流体力学等具有基础性意义。（五）赋范线性空间上微分学，主要对应于向量值映照的微分学平行发展一般赋范线性空间之间的微分学，包括变分计算。

具体内容请见教学内容安排部分。

基本要求：

数学（数理知识体系）可理解为，按量化观点（包括定量与定性刻画），认识自然及非自然世界系统的思想和方法。另一方面，对于数学作为的认识，取决于对数学自身的认识。

按上述观点，对于《应用实变函数与泛函分析基础》课程，需要非数学类的学生不但能够严格、清晰地理解与掌握相关理论（思想与方法），而且具有一定的理论联系实际的能力。

本课程主要知识（思想与方法），对应于下述教程：

1. 实变函数部分：测度论，参照夏道行等编著《实变函数论与泛函分析》（上册）
2. 泛函分析部分：度量空间、内积空间基础性理论，参照夏道行等编著《实变函数论与应用泛函分析基础》；赋范线性空间上微分学，参照卓里奇著《数学分析》（下册）
3. Sobolev 空间基础性理论与应用：参照 McOwen, R.C. 《Partial Differential Equations: Methods and Applications》
4. 综合参考：谢锡麟《微积分讲稿——高维微积分/高等微积分》（准备中），现有相关讲稿；本课程内容对应各知识点的拓广深化性内容。

教学方式：

我们建设有课程体系网站“微积分的一流化进程”，<http://jpkc.fudan.edu.cn/s/354/>，主要服务于《数学分析》、《经典力学数学名著选讲》、《流形上的微积分》、《应用实变函数与泛函分析基础》等相关课程。网站主要栏目有任课老师、课程介绍、教学视频、课程教案、试卷习题、教学研究、科学研究、课程评估、友情链接、联系我们等。

现课程体系网站上已经有完全可以用以自主学习的课程视频（按知识点与知识要素进行剪辑）。

《应用实变函数与泛函分析基础》：测度理论；可测函数；积分理论；度量空间；内积空间；

Sobolev 空间——对于的视频正在逐步建设之中，请随时访问课程体系网站。

注：计划于 2015-2016 学年第二学期发布本课程基本内容的课程视频

知识体系	课程视频目录
测度论	外测度理论；距离空间中的测度；一般积累上的测度
赋范线性空间上微分学	距离与范数；空间完备性；压缩映照定理；映照极限；映照可微性；有限增量估计及其驱动结果；高阶导数与张量赋范线性空间；高阶微分与高阶方向导数；隐映照定理；全局与局部微分同胚；无限小增量公式；变分法

本课程主要采用课堂讲授的形式，以期学生能够基于教师的认识而获得认识上“事半功倍”的学习成效：（1）注重由“结构”驱动“结论”。结构，指特定的数学等式、不等式或者特定的处理。值得指出，不仅是不同的结构往往在不同的结论获得过程中起到实质性的作用——我将此称为“数学通识”；而且往往对于结构的理解要远重要于对结论的知晓。（2）注重“复杂过程的要义分解”，以期学生听课上能更为顺畅。（3）注重“图示化研究”，指对于概念、分析过程的表述尽量采用图示化的方式，以期能更好地理解抽象与晦涩的概念与分析技法。

教材和教学参考资料：

作者	教材名称	出版社	出版年月
夏道行等	《实变函数论与泛函分析》（上册）	高等教育出版社	2010
夏道行等	《实变函数论与应用泛函分析基础》		
McOwen, R.C.	《Partial Differential Equations: Methods and Applications》	清华大学出版社	2004
谢锡麟	《微积分讲稿——高维微积分/高等微积分》（目前准备中，有讲稿）		
V.A.Zorich	《Mathematical Analysis》（共 2 卷）（第 4 版），俄罗斯数学教材选译；建议直接用英文版。	Springer-Verlag	2004

教师教学、科研情况简介和主要社会兼职：

学术上，注重以知识体系研究为基础，藉此驱动教学与科研工作。相对地，教学与科研的提升不断地要求更为深入的知识体系，同时也积累且深化了基于知识体系认知世界的经验。

教学方面 注重以知识点及知识要素构建知识体系；注重通过数学通识实现同一知识体系的融会贯通以及不同知识体系之间的触类旁通；注重以知识体系认知世界的过程，基于已有的知识发展新知识的过程进行课程讲述。目前建设有“微积分的一流化进程”以及“现代连续介质力学理论及实践”二条教学路径：

微积分的一流化进程 <http://jpkc.fudan.edu.cn/s/354/>

现代连续介质力学理论及实践 <http://jpkc.fudan.edu.cn/s/354/>

藉此进行微积分、张量分析、连续介质有限变形理论知识体系的传播，课程的广度及深度可类比国内外具有一流水平的教程或专著，且教与学效果优良，受到本校师生的赞誉并开始致力于推广到其它院校。

就教学研究与实践工作，申请人作为负责人获得市教委重点课程建设项目 2 项，重点教改项目 2 项；独立获得校级教学成果奖二等奖 1 项，作为主要贡献者及负责人获得 2013 年度高等教育上海市级教学成果一等奖“追求具有一流水平的微积分与连续介质力学基础知识体系的教研与实践”。现已独立出版著述《现代张量分析及其在连续介质力学中的应用》（2014 年），《微积分讲稿——一元微积分》（2015 年）已发表侧重知识体系及其传播的学术论文近 10 篇，均为系统性论述。

科研方面 注重基于知识体系研究以发展可适合一类问题的新思想及方法；注重理论联系实际。提出按几何形态区分体积及曲面形态连续介质，并分别提出“当前物理构型对应之曲线坐标系显含时间的有限变形理论”、“几何形态为曲面的连续介质的有限变形理论”。基于相关理论发展了含有可变形边界流动的涡量-速度势解法，提出固定曲面上二维流动的涡量动力学理论，并已实现了数值计算。

就上述科学研究工作，申请人作为负责人获得 3 项国家自然科学基金面上项目的资助。目前，通过各种学术交流、推荐相关研究思想与方法，获得业内多位专家的赞誉，逐步开始形成特色与影响。

代表性教学研究与实践成果

1. **知识体系自身的研究 I —— 微积分** 现已建立的微积分知识体系，主要包括 Euclid 空间上微分学与积分学、一般赋范线性空间上微分学、微分流形上微分学与积分学，使其广度与深度可类比国内外具有一流水平的微积分教程。提出按知识点与知识要素为基本元素构建知识体系；注重建立与发掘知识体系的内在相似性，追求按共同的思想与方法获得相关结论。理念上将数学认识为认知世界的系统思想与方法而非仅是逻辑推理，注重提取所研究事物的数学机制/结构，并以此认识世界的相似性。就整个微积分知识体系都反映研究者自身的认识与体会。
2. **知识体系自身的研究 II —— 现代张量分析** 建立由高维微积分驱动体积与曲面上张量场论，并注重体现两种形式的场论的共性与个性；提出按极限观点获得张量场沿体积与曲面上坐标线的变化率，以此建立张量场微分学；独立提出内蕴形式的第二类广义 Stokes

公式, 结合已有的第一类广义 Stokes 公式, 提供了曲面积分与其边界曲线积分之间的所有转化形式。通过归纳置换算子的基本性质, 澄清反称化算子、外积运算的基本性质, 以此服务于仿射量的代数性质研究。

3. **知识体系自身的研究Ⅲ —— 连续介质的有限变形理论** 提出按几何形态区分体积与曲面形态连续介质, 分别对应于 Euclid 与 Riemann 流形。就经典的体积形态连续介质提出当前物理构型对应之曲线坐标系显含时间的有限变形理论; 提出并已实现曲线坐标系显含时间的二维、三维不可压缩流动的涡量-流函数、速度势解法 (基于鄂维南院士相关理论), 获得可变形边界上涡量动力学相关理论结果 (基于吴介之教授相关理论)。独创性提出曲面形态连续介质的有限变形理论; 提出固定曲面上二维不可压缩、可压缩流动的涡量动力学, 并已实现数值计算可符合相关实验结果。
4. **知识体系传播的研究——数学与力学两个课程体系网站** 课程体系网站“微积分一流化进程”, 涉及一元微积分、高维微积分、一般赋范线性空间上微积分、流形上微积分等知识体系; 课程体系网站“现代连续介质力学理论及实践”, 涉及张量代数、体积与曲面上张量场论、体积与曲面形态连续介质的有限变形理论。两个课程体系网站都包括任课老师、课程介绍、教学视频、课程教案、试卷习题、教学研究、科学研究、课程评估、友情链接、联系我们等主要栏目; 目前课程体系网站已含有较为系统的教学视频 (按知识体系归类) 与课程讲稿, 已较为理想地服务于相关教学。
5. **代表性著述: 谢锡麟 著《现代张量分析及其在连续介质力学中的应用》**. 复旦大学出版社, 2014. 本著述所涉及的体积与曲面上张量场论以及张量代数, 从广度与深度上可覆盖西方学术界广为流行的 Aris 的同类著作; 亦可类比于国内郭仲衡院士、黄克智院士就张量分析方面的著述, 在汲取两者之长的基础上有自己的发展, 知识体系构建上表现为既注重数学上的严格性、清晰性与现代性, 又注重相关方法的实际应用。另一方面, 相关知识体系的构建紧密联系于高维微积分, 故已成功面对本科生传授较高层面的知识体系。
6. **代表性教研项目** 获得 2011 年度市教委重点课程项目“《数学分析》(一年制, 面对力学等技术科学专业)”, 负责人 谢锡麟。通过此项目, 基本完成微积分教学一流化水平的知识体系及其传播的研究, 发表有会议论文。获得 2011 年度市教委高校本科重点教学改革项目“‘现代连续介质力学理论及实践’课程体系”, 负责人 谢锡麟, 合作者 麻伟巍 (东华大学), 华诚 (复旦大学)。通过此项目, 基于完成《张量分析与微分几何基础》、《连续介质力学基础》所涉及的知识体系的研究, 发表有系统性论述的杂志论文。获得 2014 年度市教委高校本科重点教学改革项目“力学-数学-物理学相关知识体系之间互为借鉴与融合的教学研究与实践”, 负责人 谢锡麟, 合作者 姚一隼 (数学), 徐建军 (物理), 华诚 (力学)。本项目已通过结题。获得 2015 年度市教委重点课程项目“现代张量分析及其在连续介质力学中的应用”. 负责人 谢锡麟, 合作者 华诚(力学). 执行期 2015-2017 年。
7. **代表性课程荣誉** 2015 年度复旦大学精品课程立项“现代张量分析及其在连续介质力学中的应用”(含“张量分析与微分几何基础”、“连续介质力学基础”二门递进性课程). 负责人 谢锡麟, 合作者 华诚、祖迎庆. 执行期 2015-2017 年。
8. **代表性教学获奖** 获得 2013 年高等教育上海市级教学成果一等奖“追求具有一流水平的微积分与连续介质力学基础知识体系的教研与实践”, 获奖人 谢锡麟、麻伟巍、华诚、陈纪

修。基本建设完成二个课程体系网站“微积分的一流化进程”、“现代连续介质力学理论与实践”。获得 2011 年复旦大学教学成果二等奖“基于现代张量分析的连续介质力学理论及其在流体力学中的实践”，获奖人 谢锡麟。

学术任职

复旦大学教学指导委员会委员（2012 年起）；复旦大学教师教学发展委员会委员（2015 年起）；中国力学学会第八届科学普及工作委员会委员（2011 年起）；上海市力学学会第十一届理事会理事，并为教育工委、流体力学专业委员会副主任（2012 年起）；复旦大学复旦学院任重书院导师委员会主任（2013-2014 年）；复旦大学复旦学院腾飞书院导师（2014 年起）。

教学内容安排：

我们将微积分“知识体系”分成若干个“知识点”，而每个知识点由若干“知识要素”组成。以下按知识体系的发展安排教学进度。可能会由于假期或者教与学的实际情况对进度稍作调整。

第一部分 测度论

1. **测度的建立（基于外测度）** ①外测度理论。②外测度理论的应用 1：环上测度的 Caratheodory 扩张，以直线上 Lebesgue-Stieltjes 测度为例。③距离外测度。④外测度理论的应用 2：有限维 Euclid 空间上的 Lebesgue 测度。

——第 1、2 周（叙述上述内容，下同）

2. **可测函数** ①可测函数的分析理论：可测函数的简单可测函数的逼近，可测函数与连续函数之间的关系。②可测函数列的极限研究：一致收敛、几乎处处收敛、依测度收敛与其之间的关系

——第 3、4 周

3. **积分的建立** ①路径之一：首先，对测度有限集上有界可测函数进行值域分割，对部分和求极限；然后，按被积函数截断与积分区域截断拓广至一般可测集上可测函数的积分。②路径之二：基于简单可测函数的逼近。

——第 5、6 周

4. **积分的分析理论** ①积分的极限理论：Lebesgue 控制收敛定理，Levi 定理，Fatou 定理。②乘积测度。③ L^p 空间。④积分不等式。

——第 7、8 周

5. **积分的计算理论** ①Fubini 定理。②积分换元公式。

——第 9、10 周

第二部分 度量空间的基础性理论

1. **分析基础** ①距离与距离空间。②完备性与完备化过程。③范数与赋范线性空间。

2. **不动点定理** ①Banach 不动点定理。②Brouwer 不动点定理。③不动点定理的应用。

3. **基础性结论** ①开映照定理。②闭映照定理。③共鸣定理。④相关应用。

——第 11、12 周

第三部分 内积空间的基础性理论

1. **投影理论** ①投影的定义。②投影的等价性刻画。③投影的存在性定理。④投影理论的应用。
2. **完备函数基** ①完备函数基的基本理论。②典型的完备函数基。③数理方程中的相关应用。
3. **表示定理** ①Riesz 表示定理。②Lax-Milgram 定理。③偏微分方程的弱解。④表示定理在说明弱解存在唯一性方面的应用。

——第 13、14 周

第四部分 Sobolev 空间的基础性理论

1. **Sobolev 嵌入定理** ①Sobolev 不等式。②Sobolev 嵌入定理。
2. **磨光算子** ①磨光算子的基本性质。②Poincare 不等式。③Sobolev-Rellich-Kondrachov 嵌入不等式。
3. **偏微分方程中相关结论**

——第 15、16 周

第五部分 赋范线性空间上的微分学

1. **映照的导数** ①映照极限的一般刻画形式。②映照可微性。③有限增量估计及其驱动结果。④高阶导数与张量赋范线性空间。⑤高阶微分与高阶方向导数。
2. **映照的分析结果** ①隐映照定理。②全局与局部微分同胚
3. **无限小增量公式**
4. **变分法**

——注：本部分内容按课程体系网站上系统视频进行自学，额外一次概要性叙述。

注：一般在考试周（第 17、18 周）安排二次集中性课程辅导，主要内容为再次澄清知识体系，亦即各知识要点及其所包括的知识要素。

作业和考核方式：

平时成绩，占 30%，包括：阶段性考试 I（测度论）；阶段性考试 II（度量空间、内积空间基础性理论）。

课程考试，占 70%，有限维 Euclid 空间上的微积分以及级数（本学期涉及的所有内容）；主要考察对相关思想及方法的掌握程度。

*如该门课为多位教师共同开设，请在教学内容安排中注明。

**考虑到有时同一门课有不同院系的教师开设，请任课教师填写此栏。