复旦大学力学与工程科学系

2010～2011学年第一学期期末考试试卷——参考答案

□A卷　　□B卷

课程名称：数学分析（I）　　课程代码：MATH120008.09

开课院系：力学与工程科学系　　考试形式：开卷/闭卷/课程论文

姓名：________ 学号：________ 专业：________

题 号	1/(1)	1/(2)	2/(1)	2/(2)	3/(1)	3/(2)	4/(1)	4/(2)	5	6/(1)
得 分										
题 号	6/(2)	6/(3)	7/(1)	7/(2)	7/(3)	7/(4)	8/(1)	8/(2)	8/(3)	8/(4)
得 分										
总 分										

Problem 1 (基于无限小增量公式研究函数局部性质) *对如下极限*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t\cdot\ln(1+t)dt-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{8}}{(x-\sin x)(e^{x^2}-1)}$$

可基于无限小增量公式及其系统方法，获得：

1. (10%) *分子部分函数，在0点处的5阶展开式*

2. (10%) *分母部分函数，在0点处的5阶展开式*

答案

1

$$\text{分子部分：} f(x)=\int_0^x \sin t\ln(1+t)dt$$

$$f'(x)=\sin x\ln(1+x)$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+o(x^4)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4+o(x^4)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)$$

$$
\begin{aligned}
\text{故:}\quad & f'(x) = (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6))(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)) \\
& = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4) \\
& f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{30} + o(x^5)
\end{aligned}
$$

分子部分 $=\frac{x^5}{30} + o(x^5)$

2

$$
\begin{aligned}
\text{分母部分：} & (x - \sin x)(e^{x^2} - 1) \\
& = [x - (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6))](1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + o(x^6) - 1) \\
& = (\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + o(x^6))(x^2 + \frac{x^4}{2!} + o(x^5)) \\
& = \frac{x^5}{3!} + o(x^5)
\end{aligned}
$$

故　　原式 $=\dfrac{\frac{x^5}{30} + o(x^5)}{\frac{x^5}{3!} + o(x^5)} = \dfrac{1}{5}$

注：分母部分处理，有

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + o(y^3)$$

故结合复合函数极限定理，有：

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + o(x^6)$$

其它处理类似。

Problem 2 (基于导数性质定性获得函数全局性质) *基于渐近性质、单调性及凹凸性，定性作出下列函数图像*

$$f(x) = [(x-2)(x+1)^2]^{1/3}$$

已知：

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{[(x-2)(x+1)^2]^{2/3}}, \quad f''(x) = -2 \cdot \frac{x(x+1)^2}{[(x-2)(x+1)^2]^{5/3}}$$

1. (10%) *说明：上述函数以 $y = x$ 为斜渐近线，需要分析过程。*

2. (10%) *试定性作出函数图像，对于单调及凹凸区间需要列表并在图示中表现。*

答案

1

对于渐近线，考虑：$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{[(x-2)(x+1)^2]^{\frac{1}{3}}}{x}$

考虑：$\frac{[(x-2)(x+1)^2]^{\frac{1}{3}}}{x}=\frac{x[(1-2/x)(1+1/x)^2]^{\frac{1}{3}}}{x}=[(1-2/x)(1+1/x)^2]^{\frac{1}{3}}$

考虑：$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ 结合复合函数极限定理，如有：$\exists\lim_{t\to 0}\frac{f(\frac{1}{t})}{\frac{1}{t}}$ 则有：$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{f(\frac{1}{t})}{\frac{1}{t}}$

故考虑：$\frac{f(\frac{1}{t})}{\frac{1}{t}}=[(1-2t)(1+t)^2]^{\frac{1}{3}}=[(1-2t)(1+2t+t^2)]^{\frac{1}{3}}$

$=[1-5t^2]^{\frac{1}{3}}=1-\frac{5}{3}t^2+o(t^2)\to 1$

故 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1=:k$

另考虑：$\lim_{x\to\infty}(f(x)-k\cdot x)=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)$

同理考虑：$f(\frac{1}{t})-\frac{1}{t}=[(\frac{1}{t}-2)(\frac{1}{t}+1)^2]^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{t}$

$=\frac{1}{t}[(1-2t)(1+t)^2]^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{t}=\frac{1}{t}(1-5t^2)^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{t}$

$=\frac{1}{t}[1-\frac{5}{3}t^2+o(t^2)-1]=-\frac{5}{3}t+o(t)\to 0$

综上有：斜渐近线 $y=x \quad as \quad x\to\infty$

已知：$f'(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{[(x-2)(x+1)^2]^{\frac{2}{3}}} \qquad f''(x)=-2\frac{(x+1)^2}{[(x-2)(x+1)^2]^{\frac{5}{3}}}$

另有：$\lim_{x\to 2}f'(x)=+\infty;\quad \lim_{x\to -1+0}f'(x)=-\infty;\quad \lim_{x\to -1-0}f'(x)=+\infty$

Problem 3 (利用导数运算简化常微分方程) *现需求解以下关于* $y(x)$ *的常微分方程：*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}(x)+x\frac{dy}{dx}(x)+y(x)=0$$

考虑变换自变量的方法，基本思想为：引入 $x=\phi(t)$ *（要求其可逆且反函数导数存在），故有* $\hat{y}(t):=y(\phi(t))$*，*$y(x)=\hat{y}(t(x))$*，由此可得关于* $\hat{y}(t)$ *的常微分方程。对上述方程，引入* $x=\phi(t)=e^t$*，*

1. (10%) *获得关于* $\hat{y}(t)$ *的常微分方程。*

2. (10%) *求解关于* $\hat{y}(t)$ *的常微分方程并获得* $y(x)$ *的形式。*

答案

3/1

$$
\begin{aligned}
\text{已有:}\quad & x^2\frac{d^2y}{dx^2}(x)+x\frac{dy}{dx}(x)+y(x)=0\\
\text{引入:}\quad & x=\phi(t)=e^t\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^+),\ \text{即为光滑微分同胚}\\
\text{故有:}\quad & y(x)=y(\phi(t))=\hat{y}(t(x)),\text{此处}\quad t(x)=\ln x\quad (x>0)\\
\text{由此:}\quad & \frac{dy}{dx}(x)=\frac{d\hat{y}}{dt}(t)\cdot\frac{dt}{dx}(x)=\frac{d\hat{y}}{dt}(t)\cdot\frac{1}{e^t}\\
\text{故:}\quad & \frac{d^2y}{dx^2}(x)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{d\hat{y}}{dt}(t)}{e^t}\right)\cdot\frac{dt}{dx}(x)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{d\hat{y}}{dt}(t)}{e^t}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}(x)}\\
=&\frac{1}{e^{2t}}(\frac{d^2\hat{y}}{dt^2}(t)-\frac{d\hat{y}}{dt}(t))\\
\text{综上:}\quad & x\frac{dy}{dx}(x)=\frac{d\hat{y}}{dt}(t)\quad x^2\frac{d^2y}{dx^2}(x)=\frac{d^2\hat{y}}{dt^2}(t)-\frac{d\hat{y}}{dt}(t)\\
& \frac{d^2\hat{y}}{dt^2}(t)-\frac{d\hat{y}}{dt}(t)+\frac{d\hat{y}}{dt}(t)+\hat{y}(t)=\frac{d^2\hat{y}}{dt^2}(t)+\hat{y}(t)=0
\end{aligned}
$$

3/2

$$
\begin{aligned}
\text{按一般公式，则有：}\quad \hat{y}(t)=&c_1\cos t+c_2\sin t\\
=&c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x)=f(x)\quad \forall x>0
\end{aligned}
$$

注：本题第二部分仅要求直接利用公式，部分同学对此仍给予了细致分析。

Problem 4 (Cauchy中值定理的基本应用) *可基于Cauchy中值定理，获得无限小增量公式及带有Lagrange余项的有限增量公式。*

1. (10%) *试推导，带有Lagrange余项的朴素形式的有限增量公式。*

2. (10%) *试推导，朴素形式的无限小增量公式。*

答案

4

对于朴素形式，即为$f'(x_0)=\cdots\cdots=f^{(n)}(x_0)=0$

利用Cauchy中值定理，有：$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n-(x_0-x_0)^n}=\dfrac{f'(\xi_1)}{n(\xi_1-x_0)^{n-1}}$

$=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{f'(\xi_1)-f'(x_0)}{(\xi_1-x_0)^{n-1}-(x_0-x_0)^{n-1}}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{f''(\xi_2)}{(n-1)(\xi_2-x_0)^{n-2}}$

$=\dfrac{1}{n(n-1)}\cdot\dfrac{f''(\xi_2)}{(\xi_2-x_0)^{n-2}-(x_0-x_0)^{n-2}}$

$=\cdots\cdots=\dfrac{1}{n(n-1)\cdots 2}\cdot\dfrac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{(\xi_{n-1}-x_0)^{n-(n-1)}}=\dfrac{1}{n!}\cdot\dfrac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{\xi_{n-1}-x_0}$

4/1

对于有限增量公式，设有$f(x)\in C[x_0,x],\exists f^{(k)}(x)\in C[x_0,x)\quad k=1,\cdots,n-1$

以及$\exists f^{(n)}(x)\in\mathbb{R}\quad\forall x\in(x_0,x)$

则基于上述公共数学结构，有：$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=\dfrac{1}{n!}\cdot\dfrac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{\xi_{n-1}-x_0}=\dfrac{1}{n!}\cdot\dfrac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})-f^{(n-1)}(x_0)}{(\xi_{n-1}-x_0)-(x_0-x_0)}$

$=\dfrac{1}{n!}\cdot\dfrac{f^{(n)}(\xi_n)}{1}=\dfrac{1}{n!}\cdot f^{(n)}(\xi_n)$

故有$f(x)=f(x_0)+\dfrac{f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}\cdot(x-x_0)^n$　此处$\theta\in(0,1)$

此处处理无极限过程。

4/2

对于无限小增量公式$f(x)$在x_0点具有直到n阶导数

故$\exists B_\lambda(x_0)$,其上存在$f^{(k)}(x),k=1,\cdots n-1$

则基于上述公共数学结构，有：$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=\dfrac{1}{n!}\cdot\dfrac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1}(x))}{\xi_{n-1}(x)-x_0}=\dfrac{1}{n!}\cdot\dfrac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1}(x))-f^{(n-1)}(x_0)}{\xi_{n-1}(x)-x_0}$

此处$x_0<\xi_{n-1}(x)<x$　故按极限夹逼性，有：$\lim\limits_{x\to x_0+0}\xi_{n-1}(x)=x_0$

由于$\exists f^{(n)}(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}\in\mathbb{R}$

$\exists\lim\limits_{x\to x_0+}\xi_{n-1}(x)=x_0$且满足非接触性条件，按复合函数极限定理

则有$\lim\limits_{x\to x_0+}\dfrac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1}(x))-f^{(n-1)}(x_0)}{\xi_{n-1}(x)-x_0}=f^{(n)}(x_0)$

综上有$\lim\limits_{x\to x_0+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=f^{(n)}(x_0)=0$即$f(x)=f(x_0)+o((x-x_0)^n)$

注：上述$\xi_{n-1}(x)$中的n是确定的自然数，有少数同学误对n取极限。

Problem 5 (不定积分基本运算) (10%)*试计算以下不定积分：*

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$$

注：可考虑先进行分部积分；如涉及第二类换元法则需指明微分同胚等。

答案

5

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int xd\sqrt{x^2+a^2} = x\sqrt{x^2+a^2} - \int x\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}dx + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$2I = x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \text{令} x(\theta) = a\tan\theta \quad \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})(\text{设} a>0)$$

$$\dot{x}(\theta) = a\sec^2(\theta) > 0 \quad \forall\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$\text{故} x(\theta) \in C^1((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \mathbb{R})$$

$$\text{故} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{a\sec^2\theta d\theta}{a\sec\theta} = \int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \int \frac{\cos\theta d\theta}{\cos^2\theta} = \int \frac{d\sin\theta}{(1-\sin^2\theta)}$$

$$\int \frac{d\sin\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} = \frac{1}{2}\int (\frac{1}{1+\sin\theta} + \frac{1}{1-\sin\theta})d\sin\theta = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}} + C = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x} + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{(x+\sqrt{x^2+a^2})^2}{a^2} + C = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$\text{综上} I = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

Problem 6 (*Riemann* 积分基本分析性质)

已有 $f(x) \in \mathscr{R}[a,b]$，*现有*

$$g(x) \triangleq \begin{cases} c_i & x = x_i \in [a,b]\,(i\in\mathbb{N}) \\ f(x) & x \in [a,b] - \{x_i\}_{i=1}^{+\infty} \end{cases}$$

此处， $\{x_i\}_{i=1}^{+\infty} \subset [a,b]$。

1. (10%) *证明：如有* $x_i \to x_0 \in \mathbb{R}$，*则有：* $x_0 \in [a,b]$。

2. (10%) *证明：如有* $\{x_i\}_{i=1}^{+\infty}$ *收敛且* $\{c_i\}_{i=1}^{+\infty}$ *有界，则有：* $g(x) \in \mathscr{R}[a,b]$ *且* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)$。

3. (10%) *如果有*$[a,b]$*上有限实函数*$h(x)$*在*$[a,b]$*上仅有有限个第一类间断点（即间断点左右单侧极限存在但不相等）而其余点连续，则其*$[a,b]$*上Riemann可积，且仍可基于Newton-Leibnize公式计算其积分，试叙述相关处理。*

答案

6.1

$$x_i \to x_0 \quad as \quad n \to +\infty \quad \text{由于} a \leqslant x_i \leqslant b$$
$$\text{利用数列极限的保号性有} x_0 \in [a,b]$$

6.2

现有$\{x_i\}_{i=1}^{+\infty}$收敛且$\{c_i\}_{i=1}^{+\infty}$有界

估计$|\sigma(g,P,\xi) - \int_a^b f(x)dx| \leqslant |\sigma(g,P,\xi) - \sigma(f,P,\xi)| + |\sigma(f,P,\xi) - \int_a^b f(x)dx|$

由于$|\sigma(f,P,\xi) - \int_a^b f(x)dx| \to 0 \quad as \quad |P| \to 0$　故以下估计$|\sigma(g,P,\xi) - \sigma(f,P,\xi)|$

$= |\sum_{i=1}^{N}(g(\xi_i) - f(\xi_i)) \triangle x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{N}|g(\xi_i) - f(\xi_i)| \triangle x_i = \sum_{[x_{i-1},x_i]\cap\{x_j\}_{j=1}^{+\infty}\neq\emptyset} |g(\xi_i) - f(\xi_i)| \triangle x_i$

由于$x_i \to x_0 \in [a,b] \quad as \quad i \to +\infty$

故$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$有$x_n \in B_\epsilon(x_0), \forall n \geqslant N_\epsilon$

$RHS \leqslant \sum_{[x_{i-1},x_i]\cap\{x_j\}_{j=1}^{N_\epsilon-1}\neq\emptyset} |g(\xi_i) - f(\xi_i)| \triangle x_i + \sum_{[x_{i-1},x_i]\cap\{x_j\}_{j\geqslant N_\epsilon}\neq\emptyset} |g(\xi_i) - f(\xi_i)| \triangle x_i$

$\leqslant M \cdot 2(N_\epsilon - 1)|P| + M(2\epsilon + 2|P|)$

$= M \cdot 2N_\epsilon|P| + M \cdot 2\epsilon < 3M\epsilon \quad \forall |P| < \frac{\epsilon}{2N_\epsilon} =: \delta_\epsilon$

此处$M = 2\max\{\sup_{[a,b]}|f(x)|, \sup_{i\in\mathbb{N}}\{|c_i|\}\} \in \mathbb{R}^+$

综上有$\lim_{|P|\to 0}\sigma(g,P,\xi) = \int_a^b f(x)dx$

6.3

现$h(x)$在$[a,b]$上分段连续，不妨设$h(x)\in C[a,\xi),h(x)\in C(\xi,b]$

作：$\hat{h}(x)\triangleq\begin{cases}h(x),x\in[a,\xi)\\ \lim_{x\to\xi-}h(x),x=\xi\end{cases}$

则有$\begin{cases}\hat{h}(x)\in C[a,\xi]\\ \hat{h}(x)\in\mathscr{R}[a,\xi]\end{cases}$

且$\displaystyle\int_a^\xi h(x)dx=\int_a^\xi\hat{h}(x)dx$

作$\widetilde{h}(x)\triangleq\begin{cases}h(x),x\in(\xi,b]\\ \lim_{x\to\xi+}h(x),x=\xi\end{cases}$

则有$\begin{cases}\widetilde{h}(x)\in C[\xi,b]\\ \widetilde{h}(x)\in\mathscr{R}[\xi,b]\end{cases}$

且$\displaystyle\int_\xi^b h(x)dx=\int_\xi^b\widetilde{h}(x)dx$

综上有$\displaystyle\int_a^b h(x)dx=(\int_a^\xi+\int_\xi^b)h(x)dx=\int_a^\xi\hat{h}(x)dx+\int_\xi^b\widetilde{h}(x)dx$

$h(x)\in\mathscr{R}[a,b]$且右方二项可基于$Newton-Leibnize$公式计算

注：由$h(x)\in\mathscr{R}[a,\xi]\cap\mathscr{R}[\xi,b]$

证：$h(x)\in\mathscr{R}[a,b]$

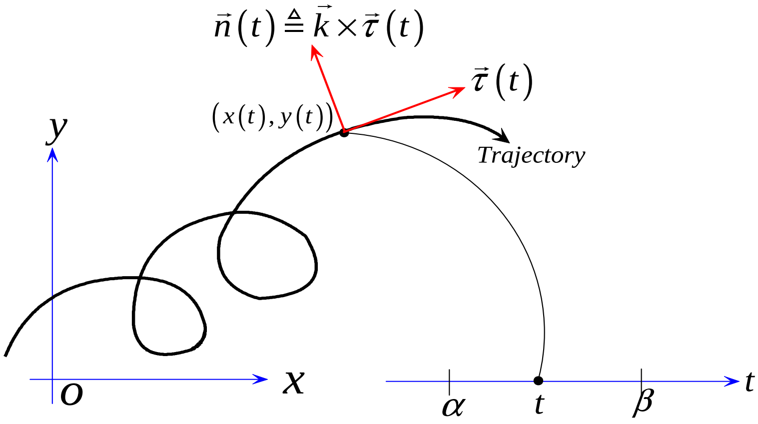
基于$\omega(h(x),P_{[a,b]})=U(h,P_{[a,b]})-L(h,P_{[a,b]})$

$\leqslant(U(h,P_{[a,b]}\cup\{\xi\})+\Omega|P|)-(L(h,P_{[a,b]}\cup\{\xi\})-\Omega|P|)$

$=U(h,P_{[a,b]}\cup\{\xi\})-L(h,P_{[a,b]}\cup\{\xi\})+2\Omega|P|$

$<(\epsilon+\epsilon)+2|\Omega||P|\quad as\quad|P|<\delta_\epsilon\quad\text{thanks to }h(x)\in\mathscr{R}[a,\xi]\cap\mathscr{R}[\xi,b]$

$<(2+2|\Omega|)\epsilon\quad as\quad|P|<\min\{\delta_\epsilon,\epsilon\}$



Problem 7 (平面运动方程的基本理论及应用) *一般平面运动的轨迹（Trajectory），如上图所示，可按以下参数形式表示：*

$$\gamma(t) : [\alpha, \beta] \ni t \to \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

此处参数 t 为时间。可得，此运动的加速度在局部自然基 $\{\vec{\tau}(t), \vec{n}(t)\}$ 下的表达式为：

$$\begin{cases} a_\tau(t) = dv/dt(t) \\ a_n(t) = sgn\,(\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y})\,(t) \cdot \kappa(t) \cdot v^2(t) = sgn\,(\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y})\,(t) \cdot v^2(t)/\rho(t) \end{cases}$$

此处 $v(t) \triangleq \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}$ 为速率，$\kappa(t) \triangleq |\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}| \,/\, \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}$ 为曲率，$\rho(t) \triangleq 1/\kappa(t)$ 为曲率半径。

1. (10%) *设 t_0 时刻，$\dot{y}(t_0) \neq 0$，则有局部微分同胚 $y(t) \in \mathscr{C}^2(\,B_\lambda(t_0); y(B_\lambda(t_0))\,)$。籍此，试说明：$sgn\,(\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y})$ 取决于轨迹的局部凹凸性以及运动方向，需给出表达式。*

2. (10%) *考虑质量为 m 的小珠串在一光滑的铁丝上，铁丝在竖直平面内且其形状为抛物线 $y^2 = 2px\,(p > 0)$。初始时刻小珠高度为 $y = h$ 且初速度为零，试证明小珠下滑过程所受的约束力为*

$$\mathbf{N}(y) = mg \cdot \left[2p^2 \frac{h - y}{(p^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{y}{(p^2 + y^2)^{1/2}} \right] \mathbf{n}(y)$$

此处，右式第一项为法向加速度贡献，右式第二项为重力贡献。注：小珠下滑过程的速率可基于机械能守恒获得。

3. (10%) *试基于无需小增量公式，分析在 $y = 0$ 附近约束力的多项式逼近形式。*

4. (10%) *试从单调性方面，分析上述法向加速度贡献以及重力贡献的变化规律。*

答案

7.1

$\dot{y}(t_0)\neq 0$则$\exists y(t)\in C^2(B_\lambda(t_0);y(B_\lambda(t_0)))$

故$x=x(t)=x(t(y))=\widetilde{x}(y)$

故$\dfrac{d\widetilde{x}}{dy}(y)=\dot{x}(t)\cdot\dfrac{dt}{dy}(t)=\dfrac{\dot{x}(t)}{\dot{y}(t)}$

$\dfrac{d^2\widetilde{x}}{dy^2}(y)=\dfrac{d}{dt}(\dfrac{\dot{x}(t)}{\dot{y}(t)})\dfrac{dt}{dy}(t)=\dfrac{\ddot{x}(t)\dot{y}(t)-\dot{x}(t)\ddot{y}(t)}{\dot{y}^2(t)}\dfrac{1}{\dot{y}(t)}$

故$sgn(\ddot{y}(t)\dot{x}(t)-\ddot{x}(t)\dot{y}(t))=-sgn(\dfrac{d^2\widetilde{x}}{dy^2}(y)\dot{y}(t))$

7.2

本问题，由于自小珠开始下落，即$t>0$，有$\dot{y}(t)\neq 0$，故有：

$$mg\cos\theta+N=m\frac{v^2}{\rho}sgn(-\frac{d^2\widetilde{x}}{dy^2}(y)\dot{y}(t))$$

由$y^2=2px\quad 2y\dfrac{dy}{dx}=2p\quad \dfrac{dy}{dx}(x)=\tan\theta=\dfrac{p}{y}$

而$\dfrac{d^2\widetilde{x}}{dy^2}(y)=\dfrac{1}{p}>0\quad \dot{y}(t)<0$

故有$mg\dfrac{y}{\sqrt{p^2+y^2}}+N(y)=m\dfrac{v^2(y)}{\rho(y)}$

按机械能守恒有$mgh=mgy+\dfrac{1}{2}mv^2(y)\quad v^2(y)=2g(h-y)$

另关于曲率半径$k(y)=k(t(y))$

而$k(t)=\dfrac{|\ddot{y}(t)\dot{x}(t)-\ddot{x}(t)\dot{y}(t)|}{(\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t))^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{|\dot{y}^3(t)||\frac{d^2\widetilde{x}}{dy^2}(y)|}{(\dot{y}^2(t)+(\frac{d\widetilde{x}}{dy})^2(y)\dot{y}^2(t))^{\frac{3}{2}}}$

$=\dfrac{|\frac{d^2\widetilde{x}}{dy^2}(y)|}{(1+(\frac{d\widetilde{x}}{dy})^2(y))^{\frac{3}{2}}}=k(y)$

现$\widetilde{x}(y)=\dfrac{y^2}{2p}$

$$\begin{cases}\frac{d\widetilde{x}}{dy}(y)=\frac{y}{p}\\ \frac{d^2\widetilde{x}}{dy^2}(y)=\frac{1}{p}\end{cases}$$

$k(y)=\dfrac{\frac{1}{p}}{(1+\frac{y^2}{p^2})^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{p^2}{(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

综上:$mg\dfrac{y}{\sqrt{p^2+y^2}}+N(y)=m\dfrac{2g(h-y)p^2}{(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$N(y)=mg[2p^2\dfrac{h-y}{(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{y}{(p^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}]$

7.3

$$
\begin{aligned}
&\text{由}N(y) = mg[2p^2\frac{h-y}{(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{y}{(p^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}] \\
&= mg[\frac{2}{p}(h-y)(1+(\frac{y}{p})^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{p}y(1+(\frac{y}{p})^2)^{-\frac{1}{2}}] \\
&= mg[\frac{2}{p}(h-y)(1-\frac{3}{2}(\frac{y}{p})^2+o(y^2)) - \frac{1}{p}y(1-\frac{1}{2}(\frac{y}{p})^2+o(y^2))] \\
&= \frac{mg}{p}[2(h-y)(1-\frac{3}{2}(\frac{y}{p})^2+o(y^2)) - y(1-\frac{1}{2}(\frac{y}{p})^2+o(y^2))] \\
&= \frac{mg}{p}[2h-2y-3h\frac{y^2}{p^2}+o(y^2)-y+o(y^2)] \\
&= \frac{mg}{p}[2h-3y-\frac{3h}{p^2}y^2+o(y^2)] \\
&\text{在}y=0\text{处}N(0) = m\frac{2gh}{p} = \frac{mg}{p}\cdot 2h
\end{aligned}
$$

7.4

$$
\begin{cases}
N_{a_n}(y) = 2mgp^2\frac{h-y}{(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
N_G(y) = -mg\frac{y}{(p^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}
\end{cases}
$$

$$
\frac{dN_G}{dy}(y) = -mg\frac{\sqrt{p^2+y^2}-y\frac{y}{\sqrt{p^2+y^2}}}{(p^2+y^2)} = -mg\frac{p^2}{(p^2+y^2)} < 0
$$

故$N_G(y)$的贡献在下落过程中逐渐减小

$$
\frac{dN_{a_n}}{dy}(y) = mg\cdot 2p^2\frac{-(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}-(h-y)^{\frac{3}{2}}\sqrt{p^2+y^2}}{(p^2+y^2)^3}
$$

$$
= mg\cdot 2p^2\frac{-(p^2+y^2)-\frac{3}{2}(h-y)}{(p^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} = -mg\cdot 2p^2\frac{y^2-\frac{3}{2}y+(p^2+\frac{3}{2}h)}{(p^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}
$$

考虑$\triangle = \frac{9}{4} - 4(p^2+\frac{3}{2}h)$可决定$N_{a_n}(y)$的单调性，无需作进一步说明。

Problem 8 (定积分应用理论) *设$\mathbb{R}^3$ 中的$\mathscr{C}^1$ 曲线，其一般表达形式为：*

$$
\gamma(t):\,[\alpha,\beta]\ni t\;\rightarrow \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3
$$

按折线逼近的思想，我们可获得$\mathbb{R}^3$ 中$\mathscr{C}^1$ 曲线弧长计算式：

$$
S = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt
$$

进一步，如已知曲线上任一点的密度为$\rho(x,y,z)$，则可研究此曲线的质量。基本思想仍然为：（1）先在曲线上打分点，由此获得相邻两分点间的微弧长，设想每段微弧长上的项密度为常数（取微弧长中任意一点处的线密度），由此获得微质量；（2）将每段微弧长对应的微质量求和得到部分和；（3）对部分和求极限，则得到曲线质量的计算式。具体分析过程，归结如下：

1. (10%) 证明：微弧长具有如下性质

$$\triangle S_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt = \sqrt{\dot{x}^2(\eta_i)+\dot{y}^2(\eta_i)+\dot{z}^2(\eta_i)}\triangle t_i$$

此处 $\eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$

2. (10%) 证明：当 $\rho(t) \triangleq \rho(x(t), y(t), z(t)) \in \mathscr{R}[\alpha, \beta]$，则有

$$\exists \lim_{|P_t| \to 0} \sum_{i=1}^{N} \rho(\xi_i)\triangle S_i = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t)\cdot\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt \in \mathbb{R}$$

此处，$\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]\,(i=1,\cdots,N)$ 可为任意选取。

3. (10%) 如果上述分析中，直接以折线替代弧长，则仍有：

$$\exists \lim_{|P_t| \to 0} \sum_{i=1}^{N} \rho(\xi_i)\triangle L_i = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t)\cdot\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt \in \mathbb{R}$$

此处

$$\triangle L_i = \sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2+(z(t_i)-z(t_{i-1}))^2}$$

$\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]\,(i=1,\cdots,N)$ 可为任意选取。

4. (10%) $\mathbb{R}^3$ 中柱面 $(x-\frac{R}{2})^2+y^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所截出曲线称为 $Viviani$ 曲线，其参数表示可选择为：

$$\gamma(\theta):\ [0,2\pi]\ni\theta\ \to \begin{bmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \\ z(\theta) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos\theta \\ \frac{R}{2}\sin\theta \\ \sqrt{R^2-x^2(\theta)-y^2(\theta)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

设其密度分布为 $\rho(\theta)=\sqrt{1+\cos^2(\frac{\theta}{2})}$。试计算此 $Viviani$ 曲线的质量。

答案

8.1

$$\triangle\, s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}dt$$

$$\frac{\triangle s_i}{\triangle t_i} = \frac{1}{\triangle t_i}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}dt \in [m, M]$$

m, M为$\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}$在$[t_{i-1}, t_i]$上的最值

由介值定理$\exists\eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$使得$\frac{\triangle s_i}{\triangle t_i} = \sqrt{\dot{x}^2(\eta_i)+\dot{y}^2(\eta_i)+\dot{z}^2(\eta_i)}$

8.2

对于以弧长逼近

$$估计|\sum_{i=1}^{N}\rho(\xi_i)\triangle s_i-\int_\alpha^\beta\rho(t)\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}dt|$$

$$\leqslant|\sum_{i=1}^{N}\rho(\xi_i)\triangle s_i-\sum_{i-1}^{N}\rho(\xi_i)\sqrt{\dot{x}^2(\xi_i)+\dot{y}^2(\xi_i)+\dot{z}^2(\xi_i)}\triangle t_i|$$

$$+|\sum_{i=1}^{N}\rho(\xi_i)\sqrt{\dot{x}^2(\xi_i)+\dot{y}^2(\xi_i)+\dot{z}^2(\xi_i)}\triangle t_i-\int_\alpha^\beta\rho(t)\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}dt|$$

$$估计|\sum_{i=1}^{N}\rho(\xi_i)\triangle s_i-\sum_{i=1}^{N}\rho(\xi_i)\sqrt{\dot{x}^2(\xi_i)+\dot{y}^2(\xi_i)+\dot{z}^2(\xi_i)}\triangle t_i|$$

$$=|\sum_{i=1}^{N}(\rho(\xi_i)\sqrt{\dot{x}^2(\eta_i)+\dot{y}^2(\eta_i)+\dot{z}^2(\eta_i)}\triangle t_i-\rho(\xi_i)\sqrt{\dot{x}^2(\xi_i)+\dot{y}^2(\xi_i)+\dot{z}^2(\xi_i)})\triangle t_i|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{N}|\rho(\xi_i)|(|\dot{x}(\eta_i)-\dot{x}(\xi_i)|+|\dot{y}(\eta_i)-\dot{y}(\xi_i)|+|\dot{z}(\eta_i)-\dot{z}(\xi_i)|)\triangle t_i$$

$$=\sup_{[\alpha,\beta]}|\rho(t)|(\omega(\dot{x}(t),P_t)+\omega(\dot{y}(t),P_t)+\omega(\dot{z}(t),P(t)))\to 0\quad as\quad \dot{x}(t),\dot{y}(t),\dot{z}(t)\in\mathscr{R}[a,b]$$

8.3

对于以折线逼近

$$|\sum_{i=1}^{N}\rho(\xi_i)\triangle L_i-\int_\alpha^\beta\rho(t)\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}dt|$$

$$\leqslant|\sum_{i=1}^{N}\rho(\xi_i)\triangle L_i-\sigma(f,P_t,\xi)|+|\sigma(\rho,P_t,\xi)-\int_\alpha^\beta\rho(t)\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}dt|$$

$$此处|\sum_{i=1}^{N}\rho(\xi_i)\triangle L_i-\sigma(\rho,P_t,\xi)|$$

$$=|\sum_{i=1}^{N}\rho(\xi_i)\sqrt{\dot{x}^2(\lambda_i)+\dot{y}^2(\mu_i)+\dot{z}^2(\theta_i)}\triangle t_i-\sum_{i=1}^{N}\rho(\xi_i)\sqrt{\dot{x}^2(\xi_i)+\dot{y}^2(\xi_i)+\dot{z}^2(\xi_i)}\triangle t_i|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{N}|\rho(\xi_i)|(|\dot{x}(\lambda_i)-\dot{x}(\xi_i)|+|\dot{y}(\mu_i)-\dot{y}(\xi_i)|+|\dot{z}(\theta_i)-\dot{z}(\xi_i)|)\triangle t_i$$

$$\leqslant\sup_{[\alpha,\beta]}|\rho(t)|(\omega(\dot{x}(t),P_t)+\omega(\dot{y}(t),P_t)+\omega(\dot{z}(t),P_t))\to 0\quad as\quad |P_t|\to 0\quad \text{thanks to}\quad \dot{x}(t),\dot{y}(t),\dot{z}(t)\in\mathscr{R}[\alpha,\beta]$$

$$而|\sigma(f,P_t,\xi)-\int_\alpha^\beta\rho(t)\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}dt|\to 0\quad as\quad |P_t|\to 0$$

8.4

$$\gamma(\theta):[0,2\pi]\ni\theta\mapsto\begin{bmatrix}x(\theta)\\ y(\theta)\\ z(\theta)\end{bmatrix}\triangleq\begin{bmatrix}\frac{R}{2}(1+\cos\theta)\\ \frac{R}{2}\sin\theta\\ \sqrt{R^2-x^2(\theta)-y^2(\theta)}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

$$\rho(\theta)=\sqrt{1+\cos^2(\frac{\theta}{2})}$$

$$\text{由于}\begin{cases}x(\theta)=\frac{R}{2}(1+\cos\theta)=R\cos^2\frac{\theta}{2}\\ y(\theta)=R\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ z(\theta)=\sqrt{R^2-R^2\cos^2\frac{\theta}{2}}=R\sin\frac{\theta}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{x}(\theta)=-\frac{R}{2}\sin\theta\\ \dot{y}(\theta)=\frac{R}{2}\cos\theta\\ \dot{z}(\theta)=\frac{R}{2}\cos\frac{\theta}{2}\end{cases}$$

$$m=\int_0^{2\pi}\rho(\theta)\sqrt{\dot{x}^2(\theta)+\dot{y}^2(\theta)+\dot{z}^2(\theta)}d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2\frac{\theta}{2}}\frac{R}{2}\sqrt{1+\cos^2\frac{\theta}{2}}d\theta$$

$$=\frac{R}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos^2\frac{\theta}{2})d\theta=\frac{R}{2}\int_0^{2\pi}(1+\frac{1+\cos\theta}{2})d\theta=\frac{3}{2}\pi R$$

注：尽量详细地给出推理和运算步骤，给分上侧重正确的思想和方法

注：本卷共计 200 分（每小题记 10 分，为便于计分），力求体现微积分基本理论及其应用