线性代数

张祥朝

复旦大学光科学与工程系

2013-2-28

联系方式

- 电话：51630347
- 手机：15900913306
- 电邮：zxchao@fudan.edu.cn
- 地址：江湾校区先进材料楼405室
- **助教：刘连亮**
- 手机：15026895546
- 电邮：12210720012@fudan.edu.cn

线性代数 (Linear Algebra)

- WHAT
- WHY
- HOW

第一章　行列式(Determinant)

- 内容提要

§1　二阶与三阶行列式

§2　行列式的定义

$\Big\}$ 行列式的概念

§3　行列式的性质

§4　行列式按行（列）展开

$\Big\}$ 行列式的性质及计算

§5　Cramer法则 —— 行列式的应用，
线性方程组的求解

一、二元线性方程组与二阶行列式

二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

由消元法，得 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，该方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}} x_1 + \boxed{a_{12}} x_2 = b_1 \\ \boxed{a_{21}} x_1 + \boxed{a_{22}} x_2 = b_2 \end{cases}$$

求解公式为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{\boxed{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{\boxed{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}} \end{cases}$$

请观察，此公式有何特点？

- 分母相同，由方程组的四个系数确定.
- 分子、分母都是四个数分成两对相乘再相减而得.

二元线性方程组

我们引进新的符号来表示“四个数分成两对相乘再相减”.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

数表 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$ 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

其求解公式为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{\boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{\boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}} \end{cases}$$

原则：横行竖列

表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为由该数表所确定的二阶行列式，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

其中，$a_{ij}(i=1,2; j=1,2)$ 称为元素.

i 为行标，表明元素位于第i 行；

j 为列标，表明元素位于第j 列.

二阶行列式的计算 ——对角线法则

主对角线

副对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

即：主对角线上两元素之积－副对角线上两元素之积

二元线性方程组 $\begin{cases} \boxed{a_{11}}x_1 + \boxed{a_{12}}x_2 = b_1 \\ \boxed{a_{21}}x_1 + \boxed{a_{22}}x_2 = b_2 \end{cases}$

若令 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ (方程组的系数行列式)

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则上述二元线性方程组的解可表示为

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{D_1}{D} \qquad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{D_2}{D}$$

- 17世纪晚期日本数学家关孝和 以及 德国数学家 Leibnitz 首先提出。
- 最初是为了解线性方程组
- 名称为德国数学家 Gauss给出，意思为：判据，可以据此判别二次曲面的性质：本书6.4节；还可以判别不同矢量在空间中的性质，线性方程组的解的性质等

例1 求解二元线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

解 因为 $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-(-4) = 7 \neq 0$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12-(-2) = 14$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-24 = -21$$

所以 $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{14}{7} = 2,\qquad x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{-21}{7} = -3$

二、三阶行列式

定义　设有9个数排成3行3列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

原则：横行竖列

引进记号

主对角线

副对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

称为三阶行列式.

二阶行列式的对角线法则并不适用！

三阶行列式的计算 ——对角线法则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

实线上的三个元素的乘积冠正号，

虚线上的三个元素的乘积冠负号.

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

注意：对角线法则只适用于二阶与三阶行列式.

例2 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

解 按对角线法则，有

$$D=1\times 2\times(-2)+2\times 1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times 4$$

$$-1\times 1\times 4-2\times(-2)\times(-2)-(-4)\times 2\times(-3)$$

$$=-4-6+32-4-8-24$$

$$=-14.$$

例3 求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$

解 方程左端

$$D = 3x^2 + 4x + 18 - 9x - 2x^2 - 12$$

$$= x^2 - 5x + 6,$$

由 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 得

$$x = 2 \text{ 或 } x = 3.$$

§2 n 阶行列式的定义

引例 用1、2、3三个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解 $\overbrace{1 \quad 2 \quad 3}$

百位 $\boxed{1}\ \boxed{}\ \boxed{}\quad \boxed{2}\ \boxed{}\ \boxed{}\quad \boxed{3}\ \boxed{}\ \boxed{}$ 3种放法

十位 $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{}\quad \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{}$ 2种放法

个位 $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}$ 1种放法

共有 $3\times2\times1=6$ 种放法.

$123, 132, 213, 231, 312, 321$

问题 把 n 个不同的元素排成一列，共有多少种不同的排法？

定义 把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的**排列**(permutation)． n 个不同元素的所有排列的种数，通常用 P_n 表示.

显然 $$P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1 = n!$$

即 n 个不同的元素一共有 $n!$ 种不同的排法.

3个不同的元素一共有3! =6种不同的排法

123，132，213，231，312，321

所有6种不同的排法中，只有一种排法（123）中的数字是按从小到大的自然顺序排列（标准排列）的，而其他排列中都有大的数排在小的数之前.

因此大部分的排列都不是“顺序”，而是“逆序”.

对于n个不同的元素，可规定各元素之间的标准次序.

n个不同的自然数，规定从小到大为标准次序.

定义 当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就称这两个元素组成一个逆序.

例如 在排列32514中，

逆序

3 2 5 1 4

逆序 逆序

思考题：还能找到其它逆序吗？

答：2和1，3和1也构成逆序.

定义 排列中所有逆序的总数称为此排列的**逆序数**

(Inverted sequence number).

排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数通常记为 $\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n)$.

奇排列：逆序数为奇数的排列.

偶排列：逆序数为偶数的排列.

思考题：符合标准次序的排列是奇排列还是偶排列？

答：符合标准次序的排列（例如：123）的逆序数等于零，因而是偶排列.

计算排列的逆序数的方法

设 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 是 1, 2, …, n 这 n 个自然数的任一排列，并规定由小到大为标准次序.

先看有多少个比 p_1 大的数排在 p_1 前面，记为 t_1；

再看有多少个比 p_2 大的数排在 p_2 前面，记为 t_2；

……

最后看有多少个比 p_n 大的数排在 p_n 前面，记为 t_n；

则此排列的逆序数为 $t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$

例1: 求排列 32514 的逆序数.

解: $t(32514) = 0 + 1 + 0 + 3 + 1 = 5$

练习: 求排列 453162 的逆序数.

解: $t = 9$

N阶行列式

一、概念的引入

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \end{matrix}$$

规律：

1. 三阶行列式共有6项，即3!项.
2. 每一项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积.
3. 每一项可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ （正负号除外），其中$p_1p_2p_3$是1、2、3的某个排列.
4. 当$p_1p_2p_3$ 是偶排列时，对应的项取正号；当 $p_1p_2p_3$ 是奇排列时，对应的项取负号.

所以，三阶行列式可以写成

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$=\sum_{p_1p_2p_3}(-1)^{t(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中 $\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 表示对1、2、3的所有排列求和.

二阶行列式有类似规律. 下面将行列式推广到一般的情形.

二、n 阶行列式的定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

简记作 $\det(a_{ij})$ ，

其中 a_{ij} 为行列式 D 的 (i,j) 元

1. n 阶行列式共有 $n!$ 项.
2. 每一项都是位于不同行不同列的 n 个元素的乘积.
3. 每一项可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$（正负号除外），其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是1, 2, …, n 的某个排列.
4. 当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是偶排列时，对应的项取正号；
   当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是奇排列时，对应的项取负号.

思考题：$\left|-1\right| = -1$成立吗？

答：符号$\left|-1\right|$可以有两种理解：

✓若理解成绝对值，则$\left|-1\right| = +1$；

✓若理解成一阶行列式，则$\left|-1\right| = -1$.

注意：当$n = 1$时，一阶行列式$|a| = a$，注意不要与绝对值的记号相混淆. 例如：一阶行列式$\left|-1\right| = -1$.

例： 写出四阶行列式中含有因子$a_{11}a_{23}$的项.

解： $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

例： 计算行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} \qquad D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

解:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{t(4321)} a_{14}a_{23}a_{33}a_{41} = a_{14}a_{23}a_{33}a_{41}$$

其中 $t(4321) = 0 + 1 + 2 + 3 = \dfrac{3 \times 4}{2} = 6.$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{14}a_{23}a_{33}a_{41}$$

四个结论：

（1） 对角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

（2）

$$D=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \dots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=\boxed{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(3)　上三角形行列式　（主对角线下侧元素都为0）

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(4)　下三角形行列式　（主对角线上侧元素都为0）

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

思考题：用定义计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

解：用树图分析

$$-1\begin{cases} 1\begin{cases} 3 \text{ —— } -1 & \tau(2134)=1 \\ 1 \text{ —— } -2 & \tau(2143)=2 \end{cases} \\ 3\begin{cases} 2 \text{ —— } -2 & \tau(2413)=3 \\ 3 \text{ —— } -1 & \tau(2431)=4 \end{cases} \end{cases}$$

故 $D=-3+2-12+9=-4$

思考题

已知 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$，求 x^3 的系数.

解　含x^3的项有两项，即

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

对应于

$$(-1)^{t(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + (-1)^{t(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$$

$$(-1)^{t(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = x^3,$$

$$(-1)^{t(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} = -2x^3$$

故x^3的系数为-1.

对换

一、对换的定义

定义　在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的手续叫做**对换**.

将相邻两个元素对换，叫做**相邻对换**.

例如

$$a_1 \cdots a_l \; a \; b \; b_1 \cdots b_m \qquad\qquad a_1 \cdots a_l \; a \; b_1 \cdots b_m \; b \; c_1 \cdots c_n$$

$$a_1 \cdots a_l \; b \; a \; b_1 \cdots b_m \qquad\qquad a_1 \cdots a_l \; b \; b_1 \cdots b_m \; a \; c_1 \cdots c_n$$

备注

1. 相邻对换是对换的特殊情形.

2. 一般的对换可以通过一系列的相邻对换来实现.

3. 如果连续施行两次相同的对换，那么排列就还原了.

$$a_1 \cdots a_l \; a \; b_1 \cdots b_m b \; c_1 \cdots c_n$$

$$\xrightarrow{m\text{ 次相邻对换}} a_1 \cdots a_l \; a \; b \; b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_n$$

$$\xrightarrow{m+1\text{次相邻对换}} a_1 \cdots a_l \; b \; b_1 \cdots b_m a \; c_1 \cdots c_n$$

$$\xrightarrow{m\text{ 次相邻对换}} a_1 \cdots a_l \; b \; a \; b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_n$$

$$\xrightarrow{m+1\text{次相邻对换}} a_1 \cdots a_l \; a \; b_1 \cdots b_m b \; c_1 \cdots c_n$$

二、对换与排列奇偶性的关系

定理1　对换改变排列的奇偶性.

证明　先考虑相邻对换的情形.

$$a_1 \cdots a_l \; a \; b \; b_1 \cdots b_m$$

$$\Downarrow$$

$$a_1 \cdots a_l \; b \; a \; b_1 \cdots b_m$$

$$t = \boxed{t_{a_1} + \cdots + t_{a_l}} + t_a + t_b + \boxed{t_{b_1} + \cdots + t_{b_m}}$$

$$a_1 \cdots a_l \; a \; b \; b_1 \cdots b_m$$

$$\Downarrow$$

$$a_1 \cdots a_l \; b \; a \; b_1 \cdots b_m$$

$$r = \boxed{t_{a_1} + \cdots + t_{a_l}} + r_b + r_a + \boxed{t_{b_1} + \cdots + t_{b_m}}$$

注意到除 a,b 外，其它元素的逆序数不改变.

$$t = t_{a_1} + \cdots + t_{a_l} + t_a + t_b + t_{b_1} + \cdots + t_{b_m}$$

$$a_1 \cdots a_l \; a \; b \; b_1 \cdots b_m$$

$$a_1 \cdots a_l \; b \; a \; b_1 \cdots b_m$$

$$r = t_{a_1} + \cdots + t_{a_l} + r_b + r_a + t_{b_1} + \cdots + t_{b_m}$$

当 $a < b$ 时，$r_a = t_a + 1$ ，$r_b = t_b$ ，$r = t + 1$.

当 $a > b$ 时，$r_a = t_a$ ，$r_b = t_b - 1$ ，$r = t - 1$.

因此相邻对换改变排列的奇偶性.

既然相邻对换改变排列的奇偶性，那么

$$a_1 \cdots a_l \; a \; b_1 \cdots b_m \; b \; c_1 \cdots c_n$$

$$\xrightarrow{2m+1\text{次相邻对换}} a_1 \cdots a_l \; b \; b_1 \cdots b_m \; a \; c_1 \cdots c_n$$

因此，一个排列中的任意两个元素对换，排列的奇偶性改变.

推论　奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，
偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

证明　由定理1知，对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列(逆序数为零)，因此可知推论成立.

因为数的乘法是可以交换的，所以 n 个元素相乘的次序是可以任意的，即

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2}, \cdots, a_{i_n j_n} = a_{1 p_1} a_{2 p_2} \cdots a_{n p_n} = a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

每作一次交换，元素的行标与列标所成的排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 与 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 都同时作一次对换，即 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 与 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 同时改变奇偶性，但是这两个排列的逆序数之和的奇偶性不变.

设对换前行标排列的逆序数为 s，列标排列的逆序数为 t .

设经过一次对换后行标排列的逆序数为 s'

列标排列的逆序数为 t'

因为对换改变排列的奇偶性，$s'-s$是奇数， $t'-t$ 也是奇数.

所以 $(s'-s)+(t'-t)$是偶数，

即$(s'+t')-(s+t)$ 是偶数.

于是$(s'+t')$ 与 $(s+t)$ 同时为奇数或同时为偶数.

因此，交换 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2},\cdots,a_{i_nj_n}$中任意两个元素的位置后，

其行标排列与列标排列的逆序数之和的奇偶性不变.

经过一次对换是如此，经过多次对换还是如此．所以，在一系列对换之后有

$$(-1)^{t(i_1 i_2 \cdots i_n)+t(j_1 j_2 \cdots j_n)} = (-1)^{t(12\cdots n)+t(p_1 p_2 \cdots p_n)}$$

$$= (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)}$$

定理2 n 阶行列式也可定义为

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$

定理3 n 阶行列式也可定义为

$$D=\sum_{\substack{i_1i_2\cdots i_n\\ j_1j_2\cdots j_n}}(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

例1 试判断$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 和 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$是否都是六阶行列式中的项.

解 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$下标的逆序数为

$$t(431265)=0+1+2+2+0+1=6$$

所以$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$是六阶行列式中的项.

$-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$行标和列标的逆序数之和

$$t(341526)+t(234156)=5+3=8$$

所以 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$不是六阶行列式中的项.

例2 用行列式的定义计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

解 $D_n = (-1)^t a_{1,n-1} a_{2,n-2} \cdots a_{n-1,1} a_{nn}$

$$= (-1)^t 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$$

$$= (-1)^t n!$$

$$t\left[(n-1)(n-2)\cdots 21n\right]$$

$$= (n-2) + (n-3) + \cdots + 2 + 1$$

$$= (n-1)(n-2)/2$$

$$D_n = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n!$$

三、小结

1. 对换改变排列奇偶性.

2. 行列式的三种表示方法

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$

$$D=\sum_{\substack{i_1i_2\cdots i_n\\ j_1j_2\cdots j_n}}(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$