第三讲　数学基础（II）：线性代数

樊潇彦

复旦大学经济学院

本讲主要内容

1. 线性代数基本概念

1.1 向量、矩阵和线性空间

1.2 内积、范数和距离

1.3 特征值、特征向量与相似矩阵

2. 经济应用

2.1 剑桥食谱

2.2 宏观经济稳定性

2.3 投入-产出分析

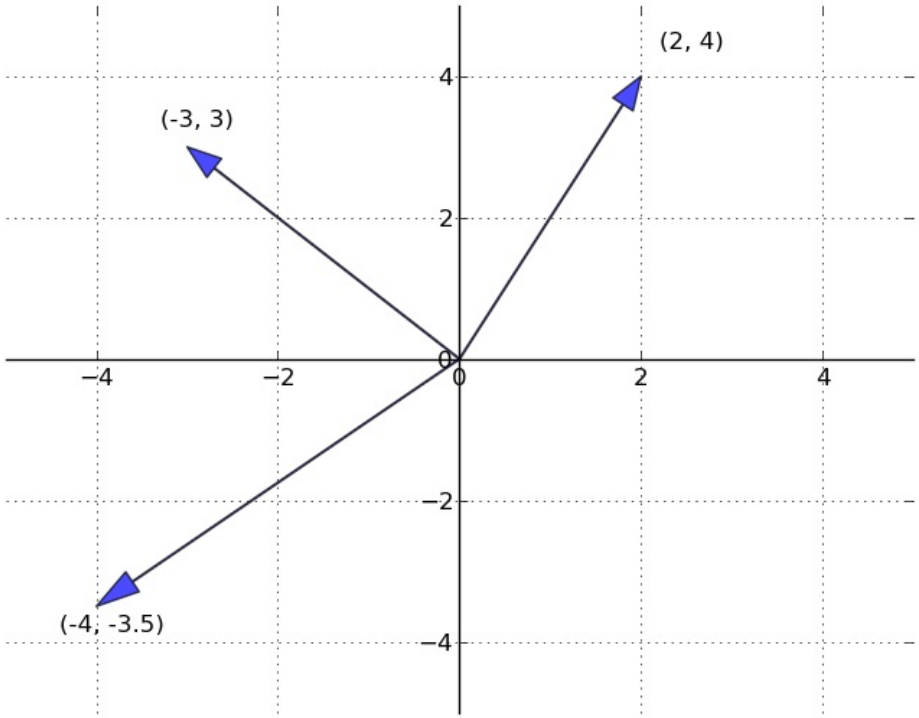
2.4 寻找核心结点

向量 $x \in \mathbb{C}^N$：点坐标

向量 x（vector）是定义在数域 $\mathbb{C}$ 上的 N 元数组，用来表示 N 维空间中的点坐标。

一般我们使用列向量：

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$



转置（transpose）后得到行向量：

$$x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

矩阵 $X \in \mathbb{C}^{N\times K}$：多个点坐标

$N \times K$ 维矩阵 X 记为：

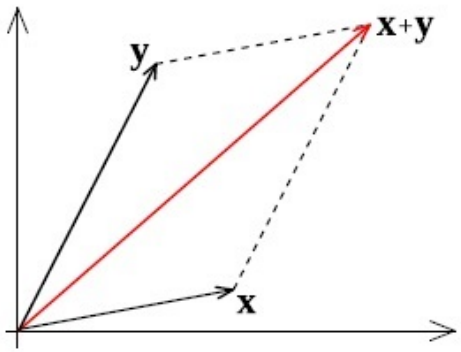
$$X_{N\times K} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & \cdots & x_{NK} \end{bmatrix}$$

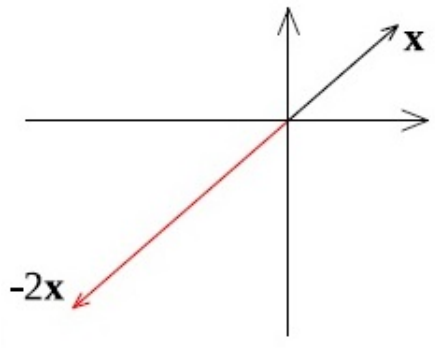
对于一个有 N 个样本、K 个变量的数据集 X，我们可以将其视为 K 维空间中的 N 个点，每个行向量都是样本坐标；或者 N 维空间中的 K 个点，每个列向量为变量坐标。

$$X_{N\times K} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \vdots \\ \tilde{X}_N \end{bmatrix} = [X_1 \ \dots \ X_K]$$

线性空间 $(V, \mathbb{C}^N, (+, \circ))$

- 对向量 $x, y \in \mathbb{C}^N$ 和数 $a \in \mathbb{C}$，定义向量加法和数量乘法：





$z = x + y$，$z_i = x_i + y_i$　　$z = a \circ x$，$z_i = a x_i$

- 线性空间（Linear space，又称向量空间 Vector space）是定义在 $\mathbb{C}^N$ 上的非空集合，对向量加法和数量乘法封闭（对 $\forall x, y \in V$，$a \in \mathbb{C}$，有 $x + y \in V$、$a \circ x \in V$），且满足加法交换律等8条运算性质。

线性空间的基 E：坐标系

如果线性空间 V 中的 N 个向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...\varepsilon_N$ 满足：(1) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...\varepsilon_N$ 线性无关；(2) 对任意 $v \in V$，有：

$$v = Ex = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 ... + x_N\varepsilon_N$$

则称：

- 矩阵 $E = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...\varepsilon_N)$ 的列向量为 V 的一组基
- $x = (x_1, x_2, ...x_N)^T$ 为 v 在基 E 下的坐标
- 线性空间 V 的维数为 N，记为 $dim(V) = rank(E) = N$。

练习：如果二维空间中的点在单位坐标系 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 下有坐标 $(1, 2)^T$，请问在坐标系 $E = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 下的坐标是多少？

线性转换 $X\beta: \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^N$

- 矩阵 $X_{N\times K}$ 右乘列向量 $\beta_{K\times 1}$，得到的列向量 $y_{N\times 1}$ 是 X 的列向量的线性组合：

$$y = X\beta = \sum_{k=1}^{K} X_k \beta_k$$

- 行向量 $\tilde{\alpha}_{1\times N}$ 左乘矩阵 $X_{N\times K}$，得到的行向量 $z_{1\times K}$ 是 X 的行向量的线性组合：

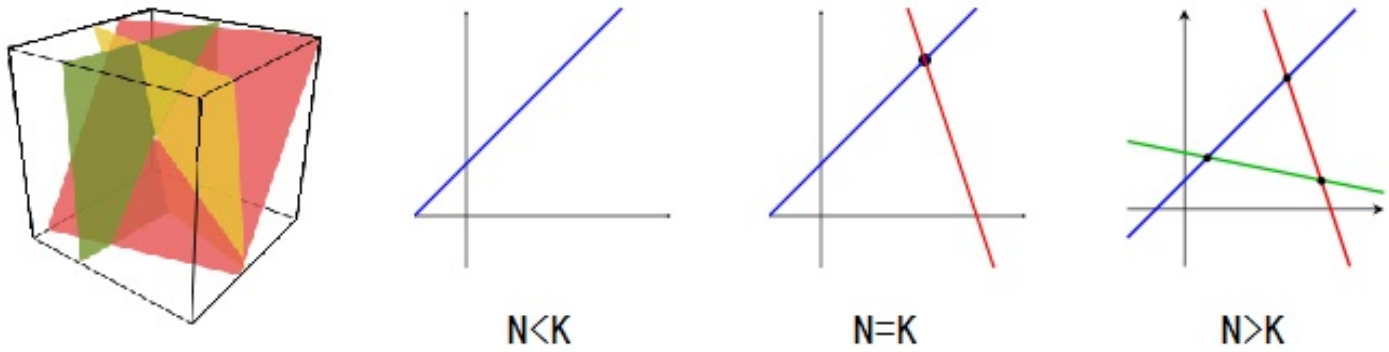
$$z = \tilde{\alpha} X = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \tilde{X}_i$$

因此 $X_{N\times K}$ 也被称为不同维度的线性空间之间的转换矩阵：

$$X\beta: \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^N$$
$$\tilde{\alpha} X: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K$$

应用：求解线性方程组

- 求解线性方程组 $Ax = b$ 可以看成寻找矩阵 $A_{N\times K}$ 的 N 个行向量所表示的超平面的交点 x：



相应的解的判定定理是：

  - $\text{rank}\,(A) < K$ 时有无穷多解（under-determined）；
  - $\text{rank}\,(A) = K = N$ 时，有唯一解（just-determined），$x = A^{-1}b$；
  - $\text{rank}\,(A) = K < N$ 时无解（over-determined），A 为方阵时不可逆。

- 如果把求解 $Ax = b$ 理解为将 b 表示为矩阵 $A_{N\times K}$ 的 K 个列向量的线性组合，请重新解释解的判定定理。

内积

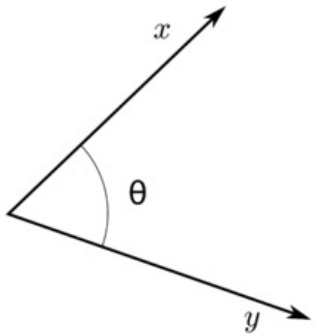
- 定义：对于 $x, y \in V$，内积（inner product，也称点积 dot product）为：

$$x \cdot y = x^T y = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

- 含义：
  - 总支出是价格向量和消费向量的内积 $W = p^T c = c^T p$
  - 向量长度（或欧氏范数）$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$
  - 向量 x, y 的相关系数（correlation coefficient）与两者之间夹角的关系为：

$$\rho = Cor\,(x, y) = \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|} = cos\,(\theta)$$

两者独立时 $\rho = 0 \Leftrightarrow x \perp y$。



范数和距离

- 范数（norm）：向量的长度（length），或点到原点的距离（distance）。
  - 欧氏范数（Euclidean norm）：

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

  - p 范数（p-norm）：

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \ p \geq 1$$

- 由 p 范数可定义两个向量之间的距离（或度量，metric），$p = 2$ 时即为欧氏距离：

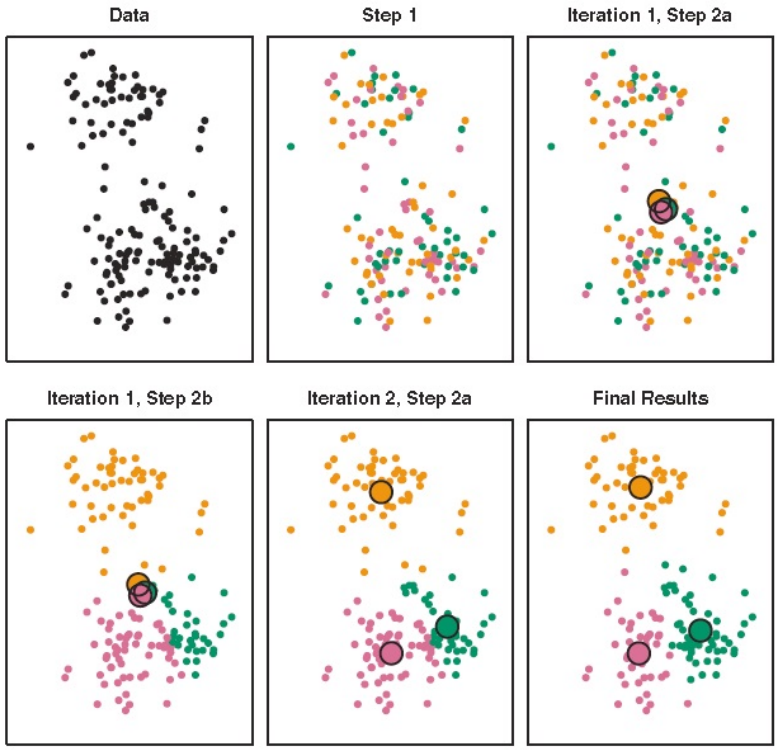
$$\|x - y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}, \ p \geq 1$$

应用：基于欧氏距离的聚类分析

- 聚类分析（clustering）是在一个数据集中寻找子群或类的技术。
- K均值聚类（K-means Clustering）是将观测划分到事先规定的 K 个类中，使类内差异尽可能小。公式为：

$$\min \sum_{k=1}^{K} W\left(C_k\right) = \frac{1}{\left|C_k\right|} \sum_{u,v \in C_k} \left\|x_u - x_v\right\|$$

其中 $\|\cdot\|$ 为欧几里得距离，$|C_k|$ 为第 k 类所包含的样本数。



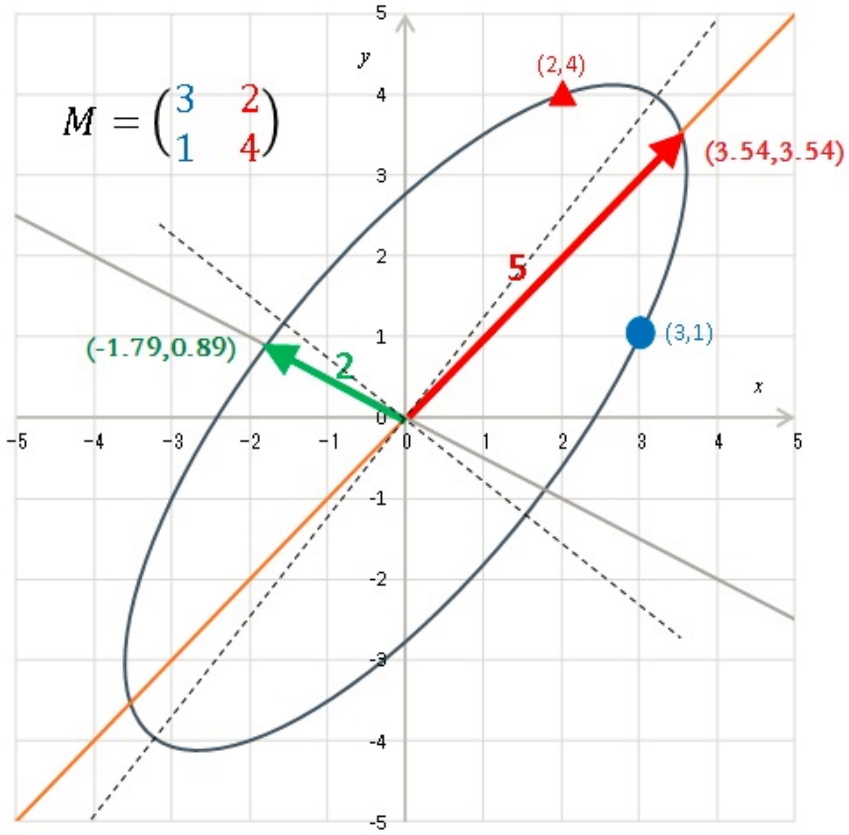
Source: G. James, D. Vitten, T. Hastie, R. Tibshirani(2015)

特征值和特征向量

对于 N 维方阵 A，如果存在常数 λ 和非零向量 x，使得 $Ax = \lambda x$ （或 $\tilde{x}A = \lambda\tilde{x}$），则称 λ 是 A 的特征值（eigen value），x（或 $\tilde{x}$）是对应于 λ 的右（或左）特征向量（eigen vector）。

以二维方阵 M 为例：

- 特征值是方阵的点所在的椭圆的长轴和短轴；
- 特征向量是经过其线性变换后，方向不变、长度伸缩的向量。



相似矩阵 $B = P^{-1}AP$

- 如果线性空间 V 中的向量 $v = Ex$ 与向量 $u = Ey$ 存在线性转换关系 $u = Av$，则两个向量的坐标之间存在下面的转换关系：

$$y = Bx = E^{-1}AEx$$

- 对 N 阶矩阵 A, B，若存在可逆矩阵 P，使 $B = P^{-1}AP$，则称矩阵 A 与 B 相似，记为 $A \sim B$。
- 练习：若矩阵 A 的特征向量构成的矩阵 $P = (P_1, P_2, ...P_N)$ 可逆，写出 $B = P^{-1}AP$。

剑桥食谱

假定牛奶等三种食品每100克所含的营养成分，以及每天应摄入的总营养成分如下表所示：

	脱脂牛奶	大豆粉	乳清	应摄入
蛋白质	36	51	13	33
碳水化合物	52	34	74	45
脂肪	0	7	1.1	3

请制定一份健康食谱，列出三种食品的占比。

两部门宏观经济模型

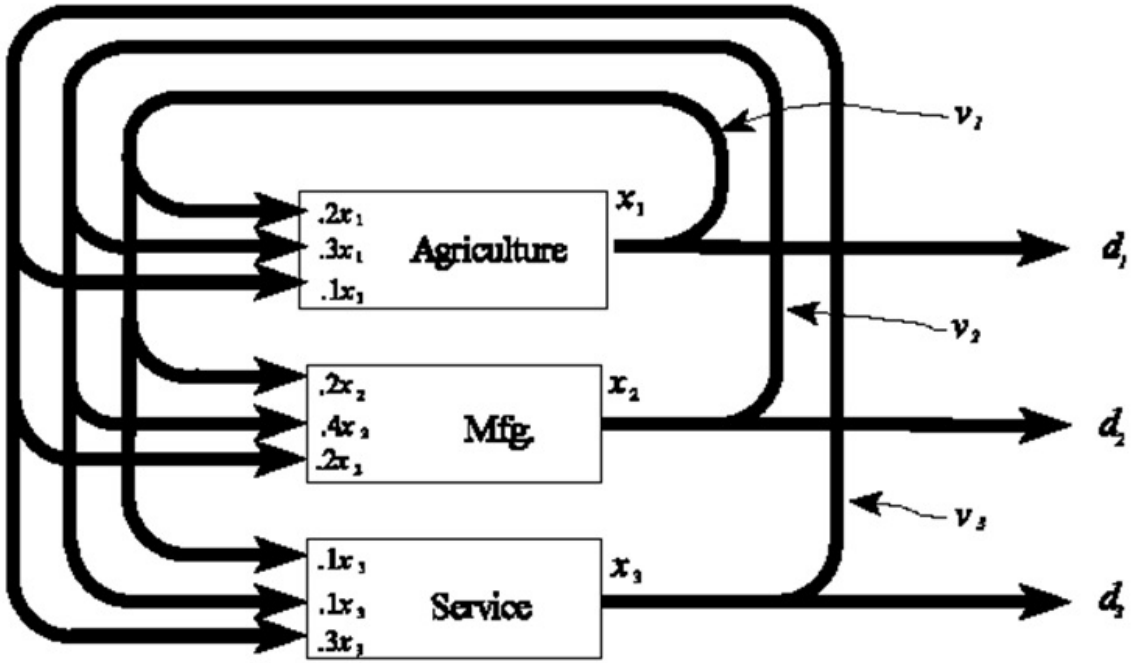
假定一个国家的宏观经济可以表述为下面的差分方程组：

$$
\begin{aligned}
Y_t &= C_t + I_t \\
C_t &= C_0 + cY_{t-1} \\
I_t &= I_0 + \beta\left(C_t - C_{t-1}\right)
\end{aligned}
$$

- 请将上述模型改写为消费和投资的二元一阶差分方程组；
- 如果 $c = 0.9$，$\beta = 0.5$，该国的宏观经济是否稳定？
- 假如 $C_0 = 100$，$I_0 = 1000$，请问该国长期的稳态产出、消费和投资分别为多少？

投入-产出表：经济背景

20世纪30年代美国经济学家瓦西里·列昂惕夫（W.Leontief）在前人关于经济活动相互依存的研究基础上提出了投入-产出表（Input-Output Table）的分析框架，1936年发表了“美国经济制度中投入产出数量关系”一文，1953 年与他人合作出版了《美国经济结构研究》一书，1973年获得诺贝尔经济学奖。



投入-产出表（Input-Output Table）：数学表述

		中间需求				最终需求			总产出
		部门1	部门2	…	部门N	消费	投资	净出口	
中间投入	部门1	$a_{11}x_1$	$a_{12}x_2$	$\cdots$	$a_{1N}x_N$	d_1			x_1
	部门2	$a_{21}x_1$	$a_{22}x_2$	$\cdots$	$a_{2N}x_N$	d_2			x_2
	…	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
	部门N	$a_{N1}x_1$	$a_{N2}x_2$	$\cdots$	$a_{NN}x_N$	d_N			x_N
最终投入	工资 折旧 利润 税收	v_1	v_2	$\cdots$	v_N				
总投入		x_1	x_2	$\cdots$	x_N				

- x_{ij}：第 i 个部门对第 j 个部门的中间投入
- A：直接消耗矩阵，元素 $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$
- d_i：第 i 个部门的最终需求，等于支出法核算的GDP
- v_j：第 j 个部门的最终投入，等于收入法核算的GDP
- x_i：第 i 个部门的总产出（总需求），等于总投入（总供给）

投入-产出表：求解公式

- 中间需求+最终需求=总产出：

$$Ax + d = x \Leftrightarrow x = (I - A)^{-1} d$$

- 中间投入+最终投入=总投入：

$$Dx + v = x \Leftrightarrow x = (I - D)^{-1} v$$

$$D = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^{N} a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{i=1}^{N} a_{iN} \end{bmatrix}$$

投入-产出表：分析示例

	第一产业	第二产业	第三产业	最终需求	总产出
第一产业	15	20	30	35	100
第二产业	30	10	45	115	200
第三产业	20	60	0	70	150

- 检验最终需求和总产出之间的关系公式；
- 假定投入产出关系不变，当最终需求变为 $(100, 200, 300)$ 个单位时，总产出等于多少？

寻找核心结点：Google的法宝

Wiki: The PageRank values are the entries of the dominant right eigenvector of the modified adjacency matrix.