第 19 次课 (引力势能，能量与轨道，开普勒问题) 2007.11.14

上节课解决了椭圆轨道问题 （椭圆轨道 $\rightarrow$ 万有引力定律）

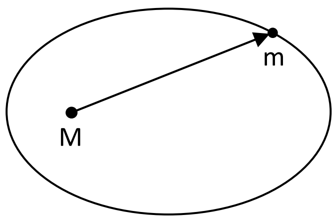
$\leftarrow$

？？ —— 开普勒问题

$$\text{能量} \overset{\text{牛顿方程}}{\rightleftharpoons} \text{轨道}$$

守恒量 $\begin{cases}\text{总能} \\ \text{角动量}\end{cases}$ $\underbrace{m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -G\dfrac{mM}{r^2}\hat{u}_r}_{\text{微分方程}}$ 参数 a 长半轴，e 偏心率

初始条件 $\vec{r}_0$，$\vec{v}_0$



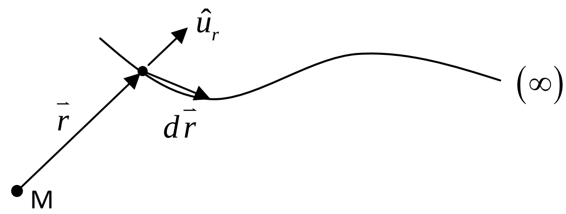
引力势能：

选取无穷远处的引力势能为零

$$u = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}'$$

$$= \int_{\infty}^{r} \left(-G\frac{mM}{r'^2}\right) dr'$$

$$= -G\frac{mM}{r}$$



$$\hat{u}_r \cdot d\vec{r} = dr$$

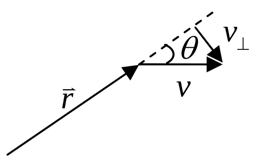
$$u(r) = -\frac{GmM}{r}$$ 为负值，间距 r 越小，势能越小

守恒量： 太阳 + 行星系统 (无外力做功) 总能 E 守恒

(无外力矩，引力通过太阳) 相对于太阳的行星角动量 L 守恒

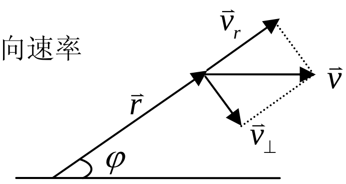
$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = rmv\sin\theta$$

$$= mrv_{\perp} = const \quad (\text{常量})$$



对于椭圆轨道：

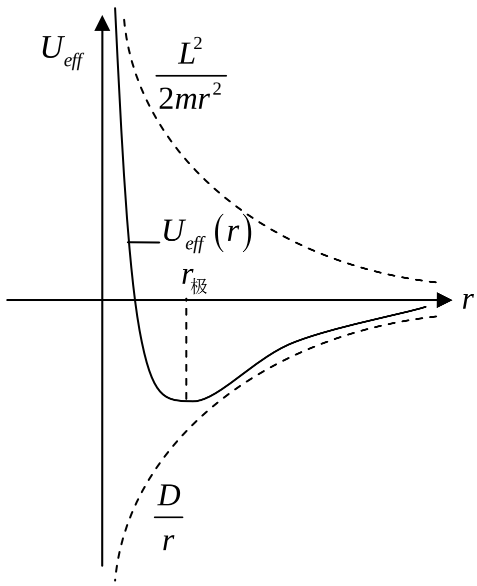
行星每时每刻的速率不相等，即 $\vec{v} = \underbrace{v_r}_{\text{径向速率}} \hat{u}_r + \underbrace{v_\perp}_{\text{垂直于径向速率}} \hat{u}_\varphi$



其中：$v_\perp = r\dot{\varphi} = r\omega$

行星动能：$K = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2}mv_\perp^2 = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$

势能：$U = -\frac{GmM}{r} = -\frac{D}{r}$ （$D = GmM$）



能量：$E = K + U = \underbrace{\frac{1}{2}mv_r^2}_{K_r\text{,径向动能}} + \underbrace{\left(\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{D}{r}\right)}_{U_{eff}(r)\text{，有效势能}}$

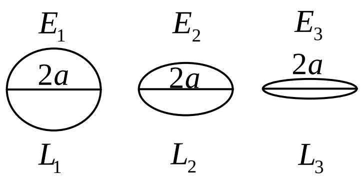
$$U_{eff}(r)\begin{cases} r \to 0 & \to \infty \\ r \to \infty & \to 0 \\ r = r_{极} & \text{有效势能极小点} \end{cases}$$

$E(r) = const$ 常量 与 r，v_r 无关

$r = \frac{r_0}{1 - e\cos\varphi}$ ，$r_0 = \frac{b^2}{a}$ ，$\dot{r} = v_r$ ，代入 E

可得：$E = -\frac{D}{2a} = \frac{D^2 m}{2L^2}(e^2 - 1)$

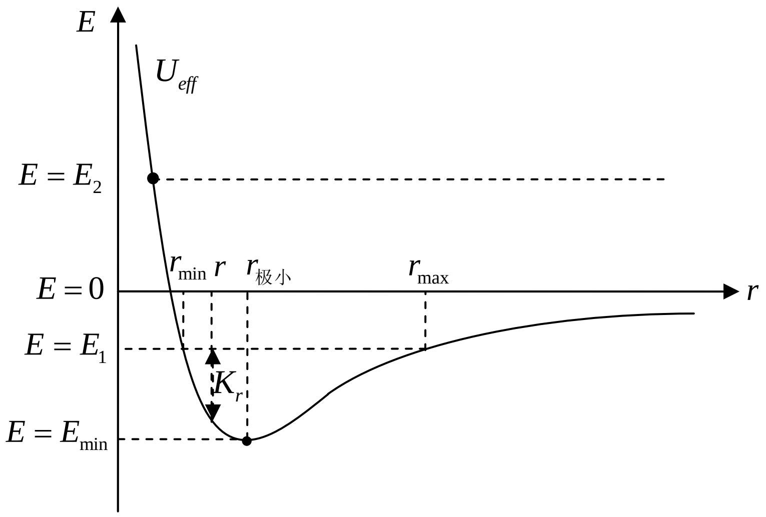
- $a\uparrow$，$E\uparrow$ 轨道大能量大 (近地卫星，能量小)
- 同一长半轴 a 的不同轨道，不同偏心率，但能量一样大



$E_1 = E_2 = E_3$

同样：$L = \sqrt{aDm(1 - e^2)}$

- 同一长半轴 a 的不同轨道，$e\uparrow$，$L\uparrow$ 越扁 L 越小
- $L_1 > L_2 > L_3$



1) $E=E_{\min}<0$， $e=0$， $K_r=E-U_{eff}=0$，轨道为圆，半径 $r_{极小}=\dfrac{L^2}{mD}=-\dfrac{D}{2E}$

2) $E_{\min}<E_1<0$， $r=\begin{cases} r_{\min}，E\left(r_{\min}\right)=U_{eff}\left(r_{\min}\right)，K_r=0，\text{近日点(只有切向速率)} \\ r_{\max}，E\left(r_{\max}\right)=U_{eff}\left(r_{\max}\right)，K_r=0，\text{远日点(只有切向速率)} \\ r_{\min}<r<r_{\max}，E=U_{eff}\left(r\right)+K_r=const \end{cases}$

（$0<e<1$）

3) $E=0$， $e=1$， $r_{\min}<r<\infty$， 抛物线

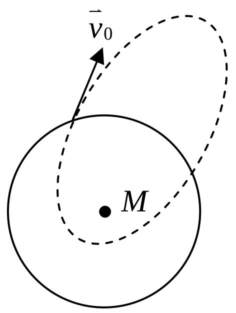
4) $E>0$， $e>1$， $r_{\min}<r<\infty$， 双曲线

守恒量　　轨道参数　初始条件

$$\begin{pmatrix} E \\ L \end{pmatrix} \rightleftharpoons \begin{pmatrix} a \\ e \end{pmatrix} \rightleftharpoons \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

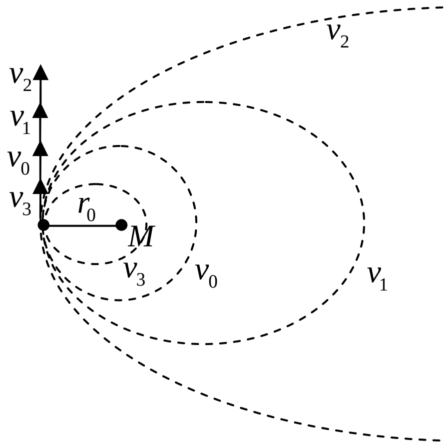
不同初始条件$\left(r_0,v_0\right)$决定了轨道参量$\left(a,e\right)$，也决定了系统的能量和角动量$\left(E,L\right)$，反之亦然。

能量 $\longrightarrow$ 决定轨道



严格讲，地球表面上抛物运动实际上是一个椭圆曲线。

v_0 初速 $\longrightarrow$ 圆形轨道



$E<0$，闭合轨道

在近日点（或远日点）加速或减速 $\longrightarrow$ 轨道变化

$\uparrow$

能量改变

$\uparrow$

来源于动能

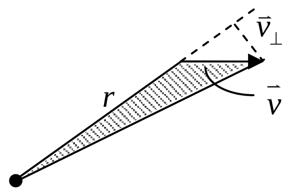
举例：嫦娥卫星的近月制动！

解决开普勒问题：由万有引力定律导出开普勒三定律！

① $$m\frac{d\bar{v}}{dt}=-G\frac{mM}{r^2}\hat{u}_r=-\frac{D}{r^2}\hat{u}_r$$

$$\underbrace{\vec{r}\times m\frac{d\bar{v}}{dt}}_{\|}=-\frac{D}{r^2}\vec{r}\times\hat{u}_r=0$$

$$\frac{d\bar{L}}{dt}=0 \quad\longrightarrow\quad \bar{L}=const$$ 常矢量，守恒量

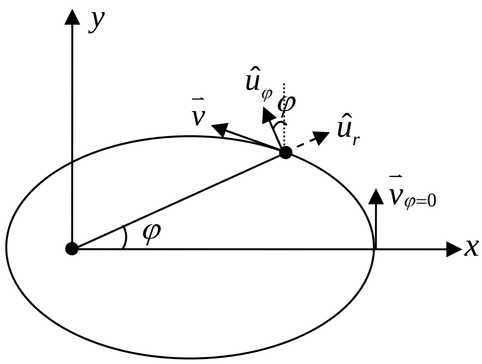


$$\bar{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=rmv_\perp=2m\left(\frac{1}{2}rv_\perp\right)=2m\dot{S} \quad\longrightarrow\quad \dot{S}=const$$ — 开普勒第二定律证毕

② $$\frac{d\bar{v}}{dt}=-G\frac{M}{r^2}\hat{u}_r=\frac{GM}{r^2}\left(\frac{1}{\omega}\frac{d\hat{u}_\varphi}{dt}\right)=\frac{D}{L}\frac{d\hat{u}_\varphi}{dt} \qquad L=mr^2\omega$$

$$d\vec{v}=\frac{D}{L}d\hat{u}_\varphi \xrightarrow{\text{积分}} \frac{L}{D}\vec{v}=\hat{u}_\varphi+\vec{c}$$

$\vec{c}$：由初始条件决定的常矢量



当 $\varphi = 0$，$\vec{v}\Big|_{\varphi=0} \parallel \hat{j}$，$\hat{u}_{\varphi=0} \parallel \hat{j}$

$$\vec{c} \parallel \hat{j},\quad \vec{c} = \frac{L}{D}\vec{v}_{\varphi=0} - \hat{j} = \left(\frac{L}{D}v_{\varphi=0} - 1\right)\hat{j} = c\hat{j}$$

$$\frac{L}{D}\vec{v} = \hat{u}_\varphi + c\hat{j}$$

$$\frac{L}{D}\underbrace{\vec{v}\cdot\hat{u}_\varphi}_{\parallel} = \hat{u}_\varphi\cdot\hat{u}_\varphi + c\hat{j}\cdot\hat{u}_\varphi = 1 + c\cos\varphi$$

$$v_\perp = r\omega = \frac{1}{r}\frac{L}{m}$$

$$r = \frac{L^2}{DM\left(1 + c\cos\varphi\right)}$$ （圆锥曲线）

$$= \frac{r_0}{1 - e\cos\varphi}$$ 可以是椭圆，则 $c = -e$，$r_0 = \frac{L^2}{DM} = a\left(1 - e^2\right) = \frac{b^2}{a} \;\rightarrow\; b^2 = \frac{aL^2}{DM}$

轨道椭圆，**第一定律**证毕.

③ $$\dot{S} = \frac{L}{2m} \qquad dS = \frac{L}{2m}dt \xrightarrow{\text{积分}} \overset{\text{椭圆面积}}{S} = \pi ab = \frac{L}{2m}\overset{\text{周期}}{T}$$

$$T^2 = \left(\frac{2m}{L}\right)^2\pi^2a^2b^2 \overset{b^2 = \frac{aL^2}{Dm}}{=\!=\!=\!=} \frac{4\pi^2 m}{D}a^3 = \underbrace{\frac{4\pi^2}{GM}}_{\text{与行星质量无关常量}}a^3$$ **第三定律证毕**

开普勒问题解决

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{u}_r$$ **牛顿万有引力定律微分方程**

开普勒三个定律是该方程的解，轨道由**微分方程＋初始条件**决定

守恒量　　轨道参数

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{u}_r \;+\; \text{初始条件}\begin{pmatrix}\vec{r}_0\\ \vec{v}_0\end{pmatrix} \xrightleftharpoons{\text{决定}} \begin{pmatrix}E\\ L\end{pmatrix} \xrightleftharpoons{\text{决定}} \begin{pmatrix}a\\ e\end{pmatrix}$$

$\frac{1}{r^2}$规律的有心力 $\longrightarrow$ 导致了美妙的行星运动轨迹（圆锥曲线）

如果不是$\frac{1}{r^2}$的力 $\longrightarrow$ 宇宙将会是什么？行星的轨道？

为什么一定是$\frac{1}{r^2}$规律的力，更深层的原因是什么？

开普勒问题的解是西方思想登峰造极的成就，就像贝多芬的交响乐，或莎士比亚的戏剧，或西斯廷教堂的穹顶一样，她是我们文化遗产的一部分。

物理不仅是自然科学的基石，而且她也是一种文化！

当你在罗马西斯廷大教堂欣赏米开朗基罗的穹顶壁画时，你应该想到牛顿的万有引力定律与她可以比美；当你在纽约联合国邮局发送明信片时，你能向同伴讲解傅科摆；当你在英国游览伦敦桥和大笨钟时，请你不要忘记造访西斯敏斯大教堂，因为那里有科学巨人牛顿的墓。

一个崇尚科学的民族是一个伟大的民族！

一个崇尚科学的国家是一个强盛的国家！

廿一世纪如果是中国的世纪，她不仅要具有先进的技术，她必须是一个崇尚科学的国家。因为科学是先进文化的重要组成部分！