§ 4.5 静磁场的能量 静磁作用力

§ 4.5 静磁场的能量 静磁作用力

一、静磁场的能量

§4.5 静磁场的能量 静磁作用力

一、静磁场的能量

能量密度：$u_m = \dfrac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$ 线性介质

§ 4.5 静磁场的能量 静磁作用力

一、静磁场的能量

能量密度：$u_m = \dfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{H}}$　　　　线性介质

静磁能量：$W_m = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{H}}\,\mathrm{d}\tau = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) \cdot \vec{\boldsymbol{H}}\,\mathrm{d}\tau$

§ 4.5 静磁场的能量 静磁作用力

一、静磁场的能量

能量密度：$u_m = \dfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{H}}$ 线性介质

静磁能量：
$$W_m = \frac{1}{2}\int \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{H}}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) \cdot \vec{\boldsymbol{H}}\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \frac{1}{2}\int [\nabla \cdot (\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{H}}) + (\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}}) \cdot \vec{\boldsymbol{A}}]\,\mathrm{d}\tau$$

§ 4.5 静磁场的能量 静磁作用力

一、静磁场的能量

能量密度：$u_m = \dfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol{B}}\cdot\vec{\boldsymbol{H}}$　　线性介质

静磁能量：
$$
\begin{aligned}
W_m &= \frac{1}{2}\int \vec{\boldsymbol{B}}\cdot\vec{\boldsymbol{H}}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int (\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}})\cdot\vec{\boldsymbol{H}}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2}\int [\nabla\cdot(\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{H}}) + (\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}})\cdot\vec{\boldsymbol{A}}]\,\mathrm{d}\tau \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\oint_S \vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{H}})\,\mathrm{d}\sigma}_{\text{对无穷大平面积分为0 (why?)}} + \frac{1}{2}\int \vec{\boldsymbol{j}}_f\cdot\vec{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

§ 4.5 静磁场的能量 静磁作用力

一、静磁场的能量

能量密度：$u_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$ 线性介质

静磁能量：$W_m = \frac{1}{2}\int \vec{B}\cdot\vec{H}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{H}\,\mathrm{d}\tau$

$$= \frac{1}{2}\int [\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H}) + (\nabla\times\vec{H})\cdot\vec{A}]\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\oint_S \vec{n}\cdot(\vec{A}\times\vec{H})\,\mathrm{d}\sigma}_{\text{对无穷大平面积分为0 (why?)}} + \frac{1}{2}\int \vec{j}_f\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}\tau$$

$$W_m = \frac{1}{2}\int \vec{j}_f\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}\tau$$

§ 4.5 静磁场的能量 静磁作用力

一、静磁场的能量

能量密度：$u_m = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{H}}$　　线性介质

静磁能量：
$$W_m = \frac{1}{2}\int \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{H}}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) \cdot \vec{\boldsymbol{H}}\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \frac{1}{2}\int [\nabla \cdot (\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{H}}) + (\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}}) \cdot \vec{\boldsymbol{A}}]\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \underbrace{\frac{1}{2}\oint_S \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{H}})\,\mathrm{d}\sigma}_{\text{对无穷大平面积分为0 (why?)}} + \frac{1}{2}\int \vec{\boldsymbol{j}}_f \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{d}\tau$$

$$W_m = \frac{1}{2}\int \vec{\boldsymbol{j}}_f \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{d}\tau$$

比较静电能

$$W_e = \frac{1}{2}\int \rho_f \varphi\,\mathrm{d}\tau$$

§ 4.5 静磁场的能量 静磁作用力

一、静磁场的能量

能量密度：$u_m = \dfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol{B}}\cdot\vec{\boldsymbol{H}}$ 线性介质

静磁能量：
$$W_m = \frac{1}{2}\int \vec{\boldsymbol{B}}\cdot\vec{\boldsymbol{H}}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int (\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}})\cdot\vec{\boldsymbol{H}}\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \frac{1}{2}\int [\nabla\cdot(\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{H}}) + (\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}})\cdot\vec{\boldsymbol{A}}]\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \underbrace{\frac{1}{2}\oint_S \vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{H}})\,\mathrm{d}\sigma}_{\text{对无穷大平面积分为0 (why?)}} + \frac{1}{2}\int \vec{\boldsymbol{j}}_f\cdot\vec{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{d}\tau$$

$$W_m = \frac{1}{2}\int \vec{\boldsymbol{j}}_f\cdot\vec{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{比较静电能} \qquad W_e = \frac{1}{2}\int \rho_f\varphi\,\mathrm{d}\tau$$

尽管静磁能量表示为 $\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{j}}_f\cdot\vec{\boldsymbol{A}}$ 的积分，但人们并不认为 $\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{j}}_f\cdot\vec{\boldsymbol{A}}$ 是能量密度。

§ 4.5 静磁场的能量 静磁作用力

一、静磁场的能量

能量密度：$u_m = \dfrac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$ 线性介质

静磁能量：$W_m = \dfrac{1}{2}\int \vec{B}\cdot\vec{H}\,\mathrm{d}\tau = \dfrac{1}{2}\int (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{H}\,\mathrm{d}\tau$

$$= \frac{1}{2}\int [\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H}) + (\nabla\times\vec{H})\cdot\vec{A}]\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\oint_S \vec{n}\cdot(\vec{A}\times\vec{H})\,\mathrm{d}\sigma}_{\text{对无穷大平面积分为0 (why?)}} + \frac{1}{2}\int \vec{j}_f\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}\tau$$

$W_m = \dfrac{1}{2}\int \vec{j}_f\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}\tau$ 比较静电能 $W_e = \dfrac{1}{2}\int \rho_f\varphi\,\mathrm{d}\tau$

尽管静磁能量表示为 $\frac{1}{2}\vec{j}_f\cdot\vec{A}$ 的积分，但人们并不认为 $\frac{1}{2}\vec{j}_f\cdot\vec{A}$ 是能量密度。

只有对整个空间的积分，才有 $\dfrac{1}{2}\int \vec{B}\cdot\vec{H}\,\mathrm{d}\tau = \dfrac{1}{2}\int \vec{j}_f\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}\tau = \dfrac{1}{2}\int \vec{A}\cdot\vec{j}_f\,\mathrm{d}\tau$

求某区域的静磁能量，必须用 $W = \dfrac{1}{2}\int_V \vec{B}\cdot\vec{H}\,\mathrm{d}\tau \neq \dfrac{1}{2}\int_V \vec{j}_f\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}\tau$

对载流线圈： $$W_m = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} \vec{\boldsymbol{A}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}_f\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\sum_i \oint_{L_i} I_i\,\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$$

对载流线圈： $W_m = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} \vec{\boldsymbol{A}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}_f\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\sum_i \oint_{L_i} I_i\,\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$ $\vec{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\tau \Longrightarrow I\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$

对载流线圈：
$$W_m = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} \vec{\boldsymbol{A}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}_f\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\sum_i \oint_{L_i} I_i\,\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \qquad \vec{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\tau \Longrightarrow I\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_i I_i \oint_{L_i} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}})\mathrm{d}\sigma$$

对载流线圈：

$$W_m = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} \vec{A}\cdot\vec{j}_f \,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\sum_i \oint_{L_i} I_i\,\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l} \qquad \vec{j}\,\mathrm{d}\tau \Longrightarrow I\,\mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i I_i \oint_{L_i} \vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{A})\mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i I_i\Phi_i$$

I_i 和 Φ_i 分别为线圈 i 的电流和穿过线圈 i 的磁通量

对载流线圈：
$$W_m = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} \vec{A}\cdot\vec{j}_f\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\sum_i \oint_{L_i} I_i\,\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l} \qquad \vec{j}\,\mathrm{d}\tau \Longrightarrow I\,\mathrm{d}\vec{l}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_i I_i \oint_{L_i} \vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{A})\mathrm{d}\sigma$$
$$= \frac{1}{2}\sum_i I_i\Phi_i$$

I_i 和 Φ_i 分别为线圈 i 的电流和穿过线圈 i 的磁通量

比较：
$$W_e = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i$$

Q_i 和 φ_i 分别为导体 i 的电量和电势

对载流线圈：

$$W_m = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} \vec{A}\cdot\vec{j}_f\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\sum_i \oint_{L_i} I_i\,\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$\vec{j}\,\mathrm{d}\tau \Longrightarrow I\,\mathrm{d}\vec{l}$

$$= \frac{1}{2}\sum_i I_i \oint_{L_i} \vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{A})\mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i I_i\Phi_i$$

I_i 和 Φ_i 分别为线圈 i 的电流和穿过线圈 i 的磁通量

比较：

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i$$

Q_i 和 φ_i 分别为导体 i 的电量和电势

类似于导体系： 对载流线圈：$\Phi_i = \sum_j L_{ij}I_j$ 试比较：$\varphi_i = \sum_i p_{ij}Q_j$

对载流线圈：
$$W_m = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} \vec{\boldsymbol{A}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}_f\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\sum_i \oint_{L_i} I_i\,\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \qquad \vec{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\tau \Longrightarrow I\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_i I_i \oint_{L_i} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}})\mathrm{d}\sigma$$
$$= \frac{1}{2}\sum_i I_i\Phi_i$$
I_i 和 Φ_i 分别为线圈 i 的电流和穿过线圈 i 的磁通量

比较：
$$W_e = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i$$
Q_i 和 φ_i 分别为导体 i 的电量和电势

类似于导体系：　对载流线圈：$\Phi_i = \sum_j L_{ij}I_j$　　试比较：$\varphi_i = \sum_j p_{ij}Q_j$

L_{ii} 称为自感系数，L_{ij} $(i\neq j)$ 称为互感系数，也写成：M_{ij}。

对载流线圈：
$$W_m = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} \vec{A}\cdot\vec{j}_f\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\sum_i \oint_{L_i} I_i\,\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l} \qquad \vec{j}\,\mathrm{d}\tau \Longrightarrow I\,\mathrm{d}\vec{l}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_i I_i \oint_{L_i} \vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{A})\mathrm{d}\sigma$$
$$= \frac{1}{2}\sum_i I_i\Phi_i$$

I_i 和 Φ_i 分别为线圈 i 的电流和穿过线圈 i 的磁通量

比较：
$$W_e = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i$$

Q_i 和 φ_i 分别为导体 i 的电量和电势

类似于导体系：　对载流线圈：$\Phi_i = \sum_j L_{ij}I_j$　　试比较：$\varphi_i = \sum_i p_{ij}Q_j$

L_{ii} 称为自感系数，L_{ij} $(i\neq j)$ 称为互感系数，也写成：M_{ij}。

静磁能：
$$W_m = \frac{1}{2}\sum_i I_i\Phi_i = \frac{1}{2}\sum_{i,j} L_{ij}I_iI_j$$

对载流线圈：
$$W_m = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} \vec{A}\cdot\vec{j}_f \,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\sum_i \oint_{L_i} I_i \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$
$\vec{j}\,\mathrm{d}\tau \implies I\,\mathrm{d}\vec{l}$
$$= \frac{1}{2}\sum_i I_i \oint_{L_i} \vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{A})\mathrm{d}\sigma$$
$$= \frac{1}{2}\sum_i I_i\Phi_i$$
I_i 和 Φ_i 分别为线圈 i 的电流和穿过线圈 i 的磁通量

比较：
$$W_e = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i$$
Q_i 和 φ_i 分别为导体 i 的电量和电势

类似于导体系： 对载流线圈：$\Phi_i = \sum_j L_{ij} I_j$ 试比较：$\varphi_i = \sum_i p_{ij} Q_j$

L_{ii} 称为**自感系数**，$L_{ij}\ (i\neq j)$ 称为**互感系数**，也写成：M_{ij}。

静磁能：
$$W_m = \frac{1}{2}\sum_i I_i\Phi_i = \frac{1}{2}\sum_{i,j} L_{ij} I_i I_j$$

$$\Phi_{21} = \int_{\mathcal{S}_2} \vec{n}\cdot\vec{B}_1\,\mathrm{d}\sigma_2 = \int_{\mathcal{S}_2}\vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{A}_1)\,\mathrm{d}\sigma_2 = \oint_{\mathcal{L}_2}\vec{A}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2, \qquad 而\ \ \vec{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\oint_{\mathcal{L}_1}\frac{\mathrm{d}\vec{l}_1}{R}$$

对载流线圈： $W_m = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} \vec{A}\cdot\vec{j}_f\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\sum_i \oint_{L_i} I_i\,\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ $\vec{j}\,\mathrm{d}\tau \Longrightarrow I\,\mathrm{d}\vec{l}$

$$= \frac{1}{2}\sum_i I_i \oint_{L_i} \vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{A})\mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i I_i\Phi_i$$

I_i 和 Φ_i 分别为线圈 i 的电流和穿过线圈 i 的磁通量

比较： $W_e = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i$ Q_i 和 φ_i 分别为导体 i 的电量和电势

类似于导体系： 对载流线圈：$\Phi_i = \sum_j L_{ij}I_j$ 试比较：$\varphi_i = \sum_i p_{ij}Q_j$

L_{ii} 称为自感系数，L_{ij} $(i \neq j)$ 称为互感系数，也写成：M_{ij}。

静磁能： $W_m = \frac{1}{2}\sum_i I_i\Phi_i = \frac{1}{2}\sum_{i,j} L_{ij}I_iI_j$

$$\Phi_{21} = \int_{\mathcal{S}_2} \vec{n}\cdot\vec{B}_1\,\mathrm{d}\sigma_2 = \int_{\mathcal{S}_2} \vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{A}_1)\,\mathrm{d}\sigma_2 = \oint_{\mathcal{L}_2} \vec{A}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2, \qquad \text{而} \quad \vec{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\oint_{\mathcal{L}_1} \frac{\mathrm{d}\vec{l}_1}{R}$$

$$\Longrightarrow \quad \Phi_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\oint_{\mathcal{L}_2}\oint_{\mathcal{L}_1} \frac{\mathrm{d}\vec{l}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2}{R} = L_{21}I_1$$

对载流线圈： $W_m = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} \vec{A}\cdot\vec{j}_f\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\sum_i \oint_{L_i} I_i\,\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ $\qquad \vec{j}\,\mathrm{d}\tau \Longrightarrow I\,\mathrm{d}\vec{l}$

$$= \frac{1}{2}\sum_i I_i \oint_{L_i} \vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{A})\mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i I_i\Phi_i$$

I_i 和 Φ_i 分别为线圈 i 的电流和穿过线圈 i 的磁通量

比较： $W_e = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i$ $\qquad Q_i$ 和 φ_i 分别为导体 i 的电量和电势

类似于导体系： 对载流线圈：$\Phi_i = \sum_j L_{ij}I_j$ $\qquad$ 试比较：$\varphi_i = \sum_i p_{ij}Q_j$

L_{ii} 称为自感系数，L_{ij} $(i\neq j)$ 称为互感系数，也写成：M_{ij}。

静磁能： $W_m = \frac{1}{2}\sum_i I_i\Phi_i = \frac{1}{2}\sum_{i,j} L_{ij}I_iI_j$

$$\Phi_{21} = \int_{\mathcal{S}_2} \vec{n}\cdot\vec{B}_1\,\mathrm{d}\sigma_2 = \int_{\mathcal{S}_2}\vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{A}_1)\,\mathrm{d}\sigma_2 = \oint_{\mathcal{L}_2}\vec{A}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2, \qquad \text{而}\quad \vec{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\oint_{\mathcal{L}_1}\frac{\mathrm{d}\vec{l}_1}{R}$$

$$\Longrightarrow\quad \Phi_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\oint_{\mathcal{L}_2}\oint_{\mathcal{L}_1}\frac{\mathrm{d}\vec{l}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2}{R} = L_{21}I_1 \quad\Longrightarrow\quad L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\mathcal{L}_2}\oint_{\mathcal{L}_1}\frac{\mathrm{d}\vec{l}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2}{R} = L_{12}$$

对载流线圈： $$W_m = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} \vec{A}\cdot\vec{j}_f\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\sum_i \oint_{L_i} I_i\,\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$ $\vec{j}\,\mathrm{d}\tau \Longrightarrow I\,\mathrm{d}\vec{l}$

$$= \frac{1}{2}\sum_i I_i \oint_{L_i} \vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{A})\mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i I_i\Phi_i$$

I_i 和 Φ_i 分别为线圈 i 的电流和穿过线圈 i 的磁通量

比较： $$W_e = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i$$ Q_i 和 φ_i 分别为导体 i 的电量和电势

类似于导体系： 对载流线圈：$\Phi_i = \sum_j L_{ij}I_j$ 试比较：$\varphi_i = \sum_i p_{ij}Q_j$

L_{ii} 称为自感系数，L_{ij} $(i \neq j)$ 称为互感系数，也写成：M_{ij}。

静磁能： $$W_m = \frac{1}{2}\sum_i I_i\Phi_i = \frac{1}{2}\sum_{i,j} L_{ij}I_iI_j$$

$$\Phi_{21} = \int_{\mathcal{S}_2} \vec{n}\cdot\vec{B}_1\,\mathrm{d}\sigma_2 = \int_{\mathcal{S}_2} \vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{A}_1)\,\mathrm{d}\sigma_2 = \oint_{\mathcal{L}_2} \vec{A}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2,$$ 而 $$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\oint_{\mathcal{L}_1}\frac{\mathrm{d}\vec{l}_1}{R}$$

$$\Longrightarrow \quad \Phi_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\oint_{\mathcal{L}_2}\oint_{\mathcal{L}_1}\frac{\mathrm{d}\vec{l}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2}{R} = L_{21}I_1 \quad \Longrightarrow \quad L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\mathcal{L}_2}\oint_{\mathcal{L}_1}\frac{\mathrm{d}\vec{l}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2}{R} = L_{12}$$

Neumann 公式

二、电流体系和外场相互作用能的多极展开

二、电流体系和外场相互作用能的多极展开

设：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})$, $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为小局域电流分布及其激发的矢势

二、电流体系和外场相互作用能的多极展开

设：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})$, $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为小局域电流分布及其激发的矢势

$\vec{\boldsymbol{j}}_e(\vec{\boldsymbol{r}})$, $\vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为激发外场的电流分布和外场的矢势

二、电流体系和外场相互作用能的多极展开

设：$\vec{j}(\vec{r})$, $\vec{A}(\vec{r})$ 为小局域电流分布及其激发的矢势

$\vec{j}_e(\vec{r})$, $\vec{A}_e(\vec{r})$ 为激发外场的电流分布和外场的矢势

整个体系的静磁能：

二、电流体系和外场相互作用能的多极展开

设：$\vec{j}(\vec{r})$, $\vec{A}(\vec{r})$ 为小局域电流分布及其激发的矢势

$\vec{j}_e(\vec{r})$, $\vec{A}_e(\vec{r})$ 为激发外场的电流分布和外场的矢势

整个体系的静磁能：

$$W_m = \frac{1}{2}\int \underbrace{(\vec{A}+\vec{A}_e)}_{\text{总电势}} \cdot \underbrace{(\vec{j}+\vec{j}_e)}_{\text{总电荷分布}} \, \mathrm{d}\tau$$

二、电流体系和外场相互作用能的多极展开

设：$\vec{j}(\vec{r})$, $\vec{A}(\vec{r})$ 为小局域电流分布及其激发的矢势

$\vec{j}_e(\vec{r})$, $\vec{A}_e(\vec{r})$ 为激发外场的电流分布和外场的矢势

整个体系的静磁能：

$$
\begin{aligned}
W_m &= \frac{1}{2}\int \underbrace{(\vec{A}+\vec{A}_e)}_{\text{总电势}} \cdot \underbrace{(\vec{j}+\vec{j}_e)}_{\text{总电荷分布}} \,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2}\int (\vec{j}_e\cdot\vec{A}+\vec{j}\cdot\vec{A}_e)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\int \vec{j}_e\cdot\vec{A}_e\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\int \vec{j}\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

二、电流体系和外场相互作用能的多极展开

设：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})$, $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为小局域电流分布及其激发的矢势

$\vec{\boldsymbol{j}}_e(\vec{\boldsymbol{r}})$, $\vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为激发外场的电流分布和外场的矢势

整个体系的静磁能：

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2}\int \underbrace{(\vec{\boldsymbol{A}}+\vec{\boldsymbol{A}}_e)}_{\text{总电势}}\cdot \underbrace{(\vec{\boldsymbol{j}}+\vec{\boldsymbol{j}}_e)}_{\text{总电荷分布}}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\int (\vec{\boldsymbol{j}}_e\cdot\vec{\boldsymbol{A}}+\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{A}}_e)\,\mathrm{d}\tau}_{\text{小局域电流分布与外场的相互作用能}} + \frac{1}{2}\int \vec{\boldsymbol{j}}_e\cdot\vec{\boldsymbol{A}}_e\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\int \vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

二、电流体系和外场相互作用能的多极展开

设：$\vec{j}(\vec{r})$, $\vec{A}(\vec{r})$ 为小局域电流分布及其激发的矢势

$\vec{j}_e(\vec{r})$, $\vec{A}_e(\vec{r})$ 为激发外场的电流分布和外场的矢势

整个体系的静磁能：

$$
\begin{aligned}
W_m &= \frac{1}{2}\int \underbrace{(\vec{A}+\vec{A}_e)}_{\text{总电势}}\cdot \underbrace{(\vec{j}+\vec{j}_e)}_{\text{总电荷分布}}\, \mathrm{d}\tau \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\int (\vec{j}_e\cdot\vec{A}+\vec{j}\cdot\vec{A}_e)\,\mathrm{d}\tau}_{\text{小局域电流分布与外场的相互作用能}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \vec{j}_e\cdot\vec{A}_e\,\mathrm{d}\tau}_{\text{外电流分布的自能}} + \frac{1}{2}\int \vec{j}\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

二、电流体系和外场相互作用能的多极展开

设：$\vec{j}(\vec{r})$, $\vec{A}(\vec{r})$ 为小局域电流分布及其激发的矢势

$\vec{j}_e(\vec{r})$, $\vec{A}_e(\vec{r})$ 为激发外场的电流分布和外场的矢势

整个体系的静磁能：

$$
\begin{aligned}
W_m &= \frac{1}{2}\int \underbrace{(\vec{A}+\vec{A}_e)}_{\text{总电势}}\cdot \underbrace{(\vec{j}+\vec{j}_e)}_{\text{总电荷分布}}\, \mathrm{d}\tau \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\int (\vec{j}_e\cdot\vec{A}+\vec{j}\cdot\vec{A}_e)\,\mathrm{d}\tau}_{\text{小局域电流分布与外场的相互作用能}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \vec{j}_e\cdot\vec{A}_e\,\mathrm{d}\tau}_{\text{外电流分布的自能}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \vec{j}\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{小局域电流分布的自能}}
\end{aligned}
$$

二、电流体系和外场相互作用能的多极展开

设：$\vec{j}(\vec{r})$, $\vec{A}(\vec{r})$ 为小局域电流分布及其激发的矢势

$\vec{j}_e(\vec{r})$, $\vec{A}_e(\vec{r})$ 为激发外场的电流分布和外场的矢势

整个体系的静磁能：

$$W_m = \frac{1}{2}\int \underbrace{(\vec{A}+\vec{A}_e)}_{\text{总电势}} \cdot \underbrace{(\vec{j}+\vec{j}_e)}_{\text{总电荷分布}} \, \mathrm{d}\tau$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int (\vec{j}_e \cdot \vec{A} + \vec{j} \cdot \vec{A}_e)\, \mathrm{d}\tau}_{\text{小局域电流分布与外场的相互作用能}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \vec{j}_e \cdot \vec{A}_e \, \mathrm{d}\tau}_{\text{外电流分布的自能}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \vec{j} \cdot \vec{A} \, \mathrm{d}\tau}_{\text{小局域电流分布的自能}}$$

电流体系和外场相互作用能：$W_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int (\vec{j}_e \cdot \vec{A} + \vec{j} \cdot \vec{A}_e)\, \mathrm{d}\tau$

二、电流体系和外场相互作用能的多极展开

设：$\vec{j}(\vec{r})$, $\vec{A}(\vec{r})$ 为小局域电流分布及其激发的矢势

$\vec{j}_e(\vec{r})$, $\vec{A}_e(\vec{r})$ 为激发外场的电流分布和外场的矢势

整个体系的静磁能：

$$W_m = \frac{1}{2}\int \underbrace{(\vec{A}+\vec{A}_e)}_{\text{总电势}}\cdot \underbrace{(\vec{j}+\vec{j}_e)}_{\text{总电荷分布}}\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int(\vec{j}_e\cdot\vec{A}+\vec{j}\cdot\vec{A}_e)\,\mathrm{d}\tau}_{\text{小局域电流分布与外场的相互作用能}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \vec{j}_e\cdot\vec{A}_e\,\mathrm{d}\tau}_{\text{外电流分布的自能}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \vec{j}\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{小局域电流分布的自能}}$$

电流体系和外场相互作用能：$W_{\mathrm{int}} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int(\vec{j}_e\cdot\vec{A}+\vec{j}\cdot\vec{A}_e)\,\mathrm{d}\tau$

$$\int \vec{j}_e(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r})\mathrm{d}\tau = \int \vec{j}_e(\vec{r})\cdot\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right]\mathrm{d}\tau$$

二、电流体系和外场相互作用能的多极展开

设：$\vec{j}(\vec{r})$, $\vec{A}(\vec{r})$ 为小局域电流分布及其激发的矢势

$\vec{j}_e(\vec{r})$, $\vec{A}_e(\vec{r})$ 为激发外场的电流分布和外场的矢势

整个体系的静磁能：

$$
\begin{aligned}
W_m &= \frac{1}{2}\int \underbrace{(\vec{A}+\vec{A}_e)}_{\text{总电势}}\cdot\underbrace{(\vec{j}+\vec{j}_e)}_{\text{总电荷分布}}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\int(\vec{j}_e\cdot\vec{A}+\vec{j}\cdot\vec{A}_e)\,\mathrm{d}\tau}_{\text{小局域电流分布与外场的相互作用能}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int\vec{j}_e\cdot\vec{A}_e\,\mathrm{d}\tau}_{\text{外电流分布的自能}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int\vec{j}\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{小局域电流分布的自能}}
\end{aligned}
$$

电流体系和外场相互作用能：$W_{\text{int}} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int(\vec{j}_e\cdot\vec{A}+\vec{j}\cdot\vec{A}_e)\,\mathrm{d}\tau$

$$
\int\vec{j}_e(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r})\mathrm{d}\tau = \int\vec{j}_e(\vec{r})\cdot\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right]\mathrm{d}\tau = \int\vec{j}(\vec{r}\,')\cdot\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}_e(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\tau'
$$

二、电流体系和外场相互作用能的多极展开

设：$\vec{j}(\vec{r})$, $\vec{A}(\vec{r})$ 为小局域电流分布及其激发的矢势

$\vec{j}_e(\vec{r})$, $\vec{A}_e(\vec{r})$ 为激发外场的电流分布和外场的矢势

整个体系的静磁能：

$$W_m = \frac{1}{2}\int \underbrace{(\vec{A}+\vec{A}_e)}_{\text{总电势}}\cdot \underbrace{(\vec{j}+\vec{j}_e)}_{\text{总电荷分布}}\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int (\vec{j}_e\cdot\vec{A}+\vec{j}\cdot\vec{A}_e)\,\mathrm{d}\tau}_{\text{小局域电流分布与外场的相互作用能}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \vec{j}_e\cdot\vec{A}_e\,\mathrm{d}\tau}_{\text{外电流分布的自能}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \vec{j}\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{小局域电流分布的自能}}$$

电流体系和外场相互作用能：$W_{\text{int}} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int (\vec{j}_e\cdot\vec{A}+\vec{j}\cdot\vec{A}_e)\,\mathrm{d}\tau$

$$\int \vec{j}_e(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r})\mathrm{d}\tau = \int \vec{j}_e(\vec{r})\cdot\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right]\mathrm{d}\tau = \int \vec{j}(\vec{r}\,')\cdot\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}_e(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\tau'$$

$$= \int \vec{j}(\vec{r}\,')\cdot\vec{A}_e(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}\tau'$$

二、电流体系和外场相互作用能的多极展开

设：$\vec{j}(\vec{r})$, $\vec{A}(\vec{r})$ 为小局域电流分布及其激发的矢势

$\vec{j}_e(\vec{r})$, $\vec{A}_e(\vec{r})$ 为激发外场的电流分布和外场的矢势

整个体系的静磁能：

$$W_m = \frac{1}{2}\int \underbrace{(\vec{A}+\vec{A}_e)}_{\text{总电势}}\cdot\underbrace{(\vec{j}+\vec{j}_e)}_{\text{总电荷分布}}\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int(\vec{j}_e\cdot\vec{A}+\vec{j}\cdot\vec{A}_e)\,\mathrm{d}\tau}_{\text{小局域电流分布与外场的相互作用能}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int\vec{j}_e\cdot\vec{A}_e\,\mathrm{d}\tau}_{\text{外电流分布的自能}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int\vec{j}\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{小局域电流分布的自能}}$$

电流体系和外场相互作用能：$W_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int(\vec{j}_e\cdot\vec{A}+\vec{j}\cdot\vec{A}_e)\,\mathrm{d}\tau$

$$\int\vec{j}_e(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r})\mathrm{d}\tau = \int\vec{j}_e(\vec{r})\cdot\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right]\mathrm{d}\tau = \int\vec{j}(\vec{r}\,')\cdot\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}_e(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\tau'$$

$$= \int\vec{j}(\vec{r}\,')\cdot\vec{A}_e(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}\tau' \quad\Longrightarrow\quad \boxed{W_{\text{int}} = \int\vec{j}\cdot\vec{A}_e\,\mathrm{d}\tau}$$

二、电流体系和外场相互作用能的多极展开

设：$\vec{j}(\vec{r})$, $\vec{A}(\vec{r})$ 为小局域电流分布及其激发的矢势

$\vec{j}_e(\vec{r})$, $\vec{A}_e(\vec{r})$ 为激发外场的电流分布和外场的矢势

整个体系的静磁能：

$$W_m = \frac{1}{2}\int \underbrace{(\vec{A}+\vec{A}_e)}_{\text{总电势}}\cdot\underbrace{(\vec{j}+\vec{j}_e)}_{\text{总电荷分布}}\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int(\vec{j}_e\cdot\vec{A}+\vec{j}\cdot\vec{A}_e)\,\mathrm{d}\tau}_{\text{小局域电流分布与外场的相互作用能}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int\vec{j}_e\cdot\vec{A}_e\,\mathrm{d}\tau}_{\text{外电流分布的自能}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int\vec{j}\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{小局域电流分布的自能}}$$

电流体系和外场相互作用能：$W_{\text{int}} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int(\vec{j}_e\cdot\vec{A}+\vec{j}\cdot\vec{A}_e)\,\mathrm{d}\tau$

$$\int\vec{j}_e(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r})\mathrm{d}\tau = \int\vec{j}_e(\vec{r})\cdot\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right]\mathrm{d}\tau = \int\vec{j}(\vec{r}\,')\cdot\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}_e(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\tau'$$

$$= \int\vec{j}(\vec{r}\,')\cdot\vec{A}_e(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}\tau' \quad\Longrightarrow\quad \boxed{W_{\text{int}} = \int\vec{j}\cdot\vec{A}_e\,\mathrm{d}\tau}$$

比较静电 $W_{\text{int}} = \displaystyle\int\rho\,\varphi_e\,\mathrm{d}\tau$

对小局域电流，电流分布在 $\vec{r} \sim 0$ 区，故 $\vec{A}_e(\vec{r})$ 在 $\vec{r} = 0$ 作泰勒展开

对小局域电流，电流分布在 $\vec{\boldsymbol{r}} \sim 0$ 区，故 $\vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}})$ 在 $\vec{\boldsymbol{r}} = 0$ 作泰勒展开

$$\vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}})\Big|_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \sum_i x_i \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}_e}{\partial x_i}\Big|_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{A}}_e}{\partial x_i x_j}\Big|_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \dots$$

对小局域电流，电流分布在 $\vec{\boldsymbol{r}} \sim 0$ 区，故 $\vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}})$ 在 $\vec{\boldsymbol{r}} = 0$ 作泰勒展开

$$\vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}})\Big|_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \sum_i x_i \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}_e}{\partial x_i}\Big|_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{A}}_e}{\partial x_i x_j}\Big|_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \ldots$$

写成矢量形式

对小局域电流，电流分布在 $\vec{\boldsymbol{r}} \sim 0$ 区，故 $\vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}})$ 在 $\vec{\boldsymbol{r}} = 0$ 作泰勒展开

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}})\Big|_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \sum_i x_i \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}_e}{\partial x_i}\Big|_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{A}}_e}{\partial x_i x_j}\Big|_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \ldots \\ &= \vec{\boldsymbol{A}}_e(0) + \vec{\boldsymbol{r}} \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{A}}_e(0) + \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{r}}\vec{\boldsymbol{r}}) : \nabla\nabla \vec{\boldsymbol{A}}_e(0) + \ldots\end{aligned}$$

写成矢量形式

对小局域电流，电流分布在 $\vec{r} \sim 0$ 区，故 $\vec{A}_e(\vec{r})$ 在 $\vec{r}=0$ 作泰勒展开

$$\begin{aligned}\vec{A}_e(\vec{r}) &= \vec{A}_e(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=0} + \sum_i x_i \frac{\partial \vec{A}_e}{\partial x_i}\Big|_{\vec{r}=0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \vec{A}_e}{\partial x_i x_j}\Big|_{\vec{r}=0} + \dots \\ &= \vec{A}_e(0) + \vec{r}\cdot\nabla\vec{A}_e(0) + \frac{1}{2}(\vec{r}\vec{r}) : \nabla\nabla\vec{A}_e(0) + \dots\end{aligned}$$

写成矢量形式

$$W_{\text{int}} = \int \vec{j}\cdot\vec{A}_e\,\mathrm{d}\tau$$

对小局域电流，电流分布在 $\vec{\boldsymbol{r}} \sim 0$ 区，故 $\vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}})$ 在 $\vec{\boldsymbol{r}} = 0$ 作泰勒展开

$$\vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}})\Big|_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \sum_i x_i \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}_e}{\partial x_i}\Big|_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{A}}_e}{\partial x_i x_j}\Big|_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \ldots$$

写成矢量形式

$$= \vec{\boldsymbol{A}}_e(0) + \vec{\boldsymbol{r}} \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{A}}_e(0) + \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{r}}\vec{\boldsymbol{r}}) : \nabla\nabla \vec{\boldsymbol{A}}_e(0) + \ldots$$

$$W_{\text{int}} = \int \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}_e \, \mathrm{d}\tau = \int \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}_e(0) \, \mathrm{d}\tau + \int \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \left[\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{A}}_e(0)\right] \mathrm{d}\tau + \ldots$$

对小局域电流，电流分布在 $\vec{r} \sim 0$ 区，故 $\vec{A}_e(\vec{r})$ 在 $\vec{r}=0$ 作泰勒展开

$$\vec{A}_e(\vec{r}) = \vec{A}_e(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=0} + \sum_i x_i \frac{\partial \vec{A}_e}{\partial x_i}\Big|_{\vec{r}=0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \vec{A}_e}{\partial x_i x_j}\Big|_{\vec{r}=0} + \dots$$

写成矢量形式

$$= \vec{A}_e(0) + \vec{r}\cdot\nabla\vec{A}_e(0) + \frac{1}{2}(\vec{r}\vec{r}) : \nabla\nabla\vec{A}_e(0) + \dots$$

$$W_{\text{int}} = \int \vec{j}\cdot\vec{A}_e \, \mathrm{d}\tau = \int \vec{j}\cdot\vec{A}_e(0)\, \mathrm{d}\tau + \int \vec{j}\cdot\left[\vec{r}\cdot\nabla\vec{A}_e(0)\right] \mathrm{d}\tau + \dots$$

$$W_{\text{int}} = \left[\int \vec{j}\, \mathrm{d}\tau\right]\cdot\vec{A}_e(0) + \int (\vec{j}\,\vec{r}) : \nabla\vec{A}_e(0)\, \mathrm{d}\tau + \dots$$

对小局域电流，电流分布在 $\vec{r}\sim 0$ 区，故 $\vec{A}_e(\vec{r})$ 在 $\vec{r}=0$ 作泰勒展开

$$\vec{A}_e(\vec{r}) = \vec{A}_e(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=0} + \sum_i x_i \frac{\partial \vec{A}_e}{\partial x_i}\Big|_{\vec{r}=0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \vec{A}_e}{\partial x_i x_j}\Big|_{\vec{r}=0} + \ldots \qquad \text{写成矢量形式}$$

$$= \vec{A}_e(0) + \vec{r}\cdot\nabla\vec{A}_e(0) + \frac{1}{2}(\vec{r}\vec{r}) : \nabla\nabla\vec{A}_e(0) + \ldots$$

$$W_{\text{int}} = \int \vec{j}\cdot\vec{A}_e\,\mathrm{d}\tau = \int \vec{j}\cdot\vec{A}_e(0)\,\mathrm{d}\tau + \int \vec{j}\cdot\left[\vec{r}\cdot\nabla\vec{A}_e(0)\right]\mathrm{d}\tau + \ldots$$

$$W_{\text{int}} = \left[\int \vec{j}\,\mathrm{d}\tau\right]\cdot\vec{A}_e(0) + \int (\vec{j}\,\vec{r}) : \nabla\vec{A}_e(0)\,\mathrm{d}\tau + \ldots \qquad \text{利用 } \int \vec{j}\,\mathrm{d}\tau = 0$$

对小局域电流，电流分布在 $\vec{\boldsymbol{r}} \sim 0$ 区，故 $\vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}})$ 在 $\vec{\boldsymbol{r}} = 0$ 作泰勒展开

$$\vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}})\Big|_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \sum_i x_i \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}_e}{\partial x_i}\Big|_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{A}}_e}{\partial x_i x_j}\Big|_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \dots$$

写成矢量形式

$$= \vec{\boldsymbol{A}}_e(0) + \vec{\boldsymbol{r}} \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{A}}_e(0) + \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{r}}\vec{\boldsymbol{r}}) : \nabla\nabla \vec{\boldsymbol{A}}_e(0) + \dots$$

$$W_{\text{int}} = \int \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}_e \, \mathrm{d}\tau = \int \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}_e(0) \, \mathrm{d}\tau + \int \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \left[\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{A}}_e(0)\right] \mathrm{d}\tau + \dots$$

$$W_{\text{int}} = \left[\int \vec{\boldsymbol{j}} \, \mathrm{d}\tau\right] \cdot \vec{\boldsymbol{A}}_e(0) + \int (\vec{\boldsymbol{j}}\,\vec{\boldsymbol{r}}) : \nabla \vec{\boldsymbol{A}}_e(0) \, \mathrm{d}\tau + \dots$$

利用 $\int \vec{\boldsymbol{j}} \, \mathrm{d}\tau = 0$

$$= \int (\vec{\boldsymbol{j}}\,\vec{\boldsymbol{r}}) \, \mathrm{d}\tau : \left[\nabla' \vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}\,'=0} + \dots$$

对小局域电流，电流分布在 $\vec{\boldsymbol{r}} \sim 0$ 区，故 $\vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}})$ 在 $\vec{\boldsymbol{r}} = 0$ 作泰勒展开

$$\vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}})\Big|_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \sum_i x_i \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}_e}{\partial x_i}\Big|_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{A}}_e}{\partial x_i x_j}\Big|_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \dots$$

写成矢量形式

$$= \vec{\boldsymbol{A}}_e(0) + \vec{\boldsymbol{r}} \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{A}}_e(0) + \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{r}}\vec{\boldsymbol{r}}) : \nabla\nabla \vec{\boldsymbol{A}}_e(0) + \dots$$

$$W_{\mathsf{int}} = \int \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}_e \, \mathrm{d}\tau = \int \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}_e(0) \, \mathrm{d}\tau + \int \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \left[\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{A}}_e(0)\right] \mathrm{d}\tau + \dots$$

$$W_{\mathsf{int}} = \left[\int \vec{\boldsymbol{j}} \, \mathrm{d}\tau\right] \cdot \vec{\boldsymbol{A}}_e(0) + \int (\vec{\boldsymbol{j}}\,\vec{\boldsymbol{r}}) : \nabla \vec{\boldsymbol{A}}_e(0) \, \mathrm{d}\tau + \dots$$

利用 $\int \vec{\boldsymbol{j}} \, \mathrm{d}\tau = 0$

$$= \int (\vec{\boldsymbol{j}}\,\vec{\boldsymbol{r}}) \, \mathrm{d}\tau : \left[\nabla' \vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}\,'=0} + \dots$$

利用 $\int (\vec{\boldsymbol{j}}\vec{\boldsymbol{r}} + \vec{\boldsymbol{r}}\vec{\boldsymbol{j}}) \, \mathrm{d}\tau = 0$

对小局域电流，电流分布在 $\vec{r} \sim 0$ 区，故 $\vec{A}_e(\vec{r})$ 在 $\vec{r}=0$ 作泰勒展开

$$\vec{A}_e(\vec{r}) = \vec{A}_e(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=0} + \sum_i x_i \frac{\partial \vec{A}_e}{\partial x_i}\Big|_{\vec{r}=0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \vec{A}_e}{\partial x_i x_j}\Big|_{\vec{r}=0} + \dots \qquad \text{写成矢量形式}$$

$$= \vec{A}_e(0) + \vec{r}\cdot\nabla\vec{A}_e(0) + \frac{1}{2}(\vec{r}\vec{r}) : \nabla\nabla\vec{A}_e(0) + \dots$$

$$W_{\text{int}} = \int \vec{j}\cdot\vec{A}_e \,\mathrm{d}\tau = \int \vec{j}\cdot\vec{A}_e(0)\,\mathrm{d}\tau + \int \vec{j}\cdot\left[\vec{r}\cdot\nabla\vec{A}_e(0)\right]\mathrm{d}\tau + \dots$$

$$W_{\text{int}} = \left[\int \vec{j}\,\mathrm{d}\tau\right]\cdot\vec{A}_e(0) + \int (\vec{j}\,\vec{r}) : \nabla\vec{A}_e(0)\,\mathrm{d}\tau + \dots \qquad \text{利用} \int \vec{j}\,\mathrm{d}\tau = 0$$

$$= \int (\vec{j}\,\vec{r})\,\mathrm{d}\tau : \left[\nabla'\vec{A}_e(\vec{r}\,')\right]_{\vec{r}\,'=0} + \dots \qquad \text{利用} \int (\vec{j}\vec{r} + \vec{r}\vec{j})\,\mathrm{d}\tau = 0$$

$$W_{\text{int}} = \tfrac{1}{2}\int (\vec{j}\,\vec{r} - \vec{r}\,\vec{j}) : \left[\nabla'\vec{A}_e(\vec{r}\,')\right]\mathrm{d}\tau + \dots$$

对小局域电流，电流分布在 $\vec{r}\sim 0$ 区，故 $\vec{A}_e(\vec{r})$ 在 $\vec{r}=0$ 作泰勒展开

$$\vec{A}_e(\vec{r}) = \vec{A}_e(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=0} + \sum_i x_i \frac{\partial \vec{A}_e}{\partial x_i}\Big|_{\vec{r}=0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \vec{A}_e}{\partial x_i x_j}\Big|_{\vec{r}=0} + \ldots \quad \text{写成矢量形式}$$

$$= \vec{A}_e(0) + \vec{r}\cdot\nabla\vec{A}_e(0) + \frac{1}{2}(\vec{r}\vec{r}) : \nabla\nabla\vec{A}_e(0) + \ldots$$

$$W_{\text{int}} = \int \vec{j}\cdot\vec{A}_e\,\mathrm{d}\tau = \int \vec{j}\cdot\vec{A}_e(0)\,\mathrm{d}\tau + \int \vec{j}\cdot\left[\vec{r}\cdot\nabla\vec{A}_e(0)\right]\mathrm{d}\tau + \ldots$$

$$W_{\text{int}} = \left[\int \vec{j}\,\mathrm{d}\tau\right]\cdot\vec{A}_e(0) + \int (\vec{j}\,\vec{r}) : \nabla\vec{A}_e(0)\,\mathrm{d}\tau + \ldots \qquad \text{利用} \quad \int \vec{j}\,\mathrm{d}\tau = 0$$

$$= \int (\vec{j}\,\vec{r})\,\mathrm{d}\tau : \left[\nabla'\vec{A}_e(\vec{r}\,')\right]_{\vec{r}\,'=0} + \ldots \qquad \text{利用} \quad \int (\vec{j}\vec{r} + \vec{r}\vec{j})\,\mathrm{d}\tau = 0$$

$$W_{\text{int}} = \tfrac{1}{2}\int (\vec{j}\,\vec{r} - \vec{r}\,\vec{j}) : \left[\nabla'\vec{A}_e(\vec{r}\,')\right]\mathrm{d}\tau + \ldots$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\nabla\times\vec{A})$$

对小局域电流，电流分布在 $\vec{r}\sim 0$ 区，故 $\vec{A}_e(\vec{r})$ 在 $\vec{r}=0$ 作泰勒展开

$$\vec{A}_e(\vec{r}) = \vec{A}_e(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=0} + \sum_i x_i \frac{\partial \vec{A}_e}{\partial x_i}\Big|_{\vec{r}=0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \vec{A}_e}{\partial x_i x_j}\Big|_{\vec{r}=0} + \dots \qquad \text{写成矢量形式}$$

$$= \vec{A}_e(0) + \vec{r}\cdot\nabla\vec{A}_e(0) + \frac{1}{2}(\vec{r}\vec{r}) : \nabla\nabla\vec{A}_e(0) + \dots$$

$$W_{\text{int}} = \int \vec{j}\cdot\vec{A}_e\,\mathrm{d}\tau = \int \vec{j}\cdot\vec{A}_e(0)\,\mathrm{d}\tau + \int \vec{j}\cdot\left[\vec{r}\cdot\nabla\vec{A}_e(0)\right]\mathrm{d}\tau + \dots$$

$$W_{\text{int}} = \left[\int \vec{j}\,\mathrm{d}\tau\right]\cdot\vec{A}_e(0) + \int (\vec{j}\,\vec{r}) : \nabla\vec{A}_e(0)\,\mathrm{d}\tau + \dots \qquad \text{利用} \int \vec{j}\,\mathrm{d}\tau = 0$$

$$= \int (\vec{j}\,\vec{r})\,\mathrm{d}\tau : \left[\nabla'\vec{A}_e(\vec{r}\,')\right]_{\vec{r}\,'=0} + \dots \qquad \text{利用} \int (\vec{j}\vec{r} + \vec{r}\vec{j})\,\mathrm{d}\tau = 0$$

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int (\vec{j}\,\vec{r} - \vec{r}\,\vec{j}) : \left[\nabla'\vec{A}_e(\vec{r}\,')\right]\mathrm{d}\tau + \dots$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\nabla\times\vec{A}) = \vec{a}\cdot\left[\vec{b}\times(\nabla\times\vec{A})\right]$$

对小局域电流，电流分布在 $\vec{r}\sim 0$ 区，故 $\vec{A}_e(\vec{r})$ 在 $\vec{r}=0$ 作泰勒展开

$$\vec{A}_e(\vec{r}) = \vec{A}_e(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=0} + \sum_i x_i \frac{\partial \vec{A}_e}{\partial x_i}\Big|_{\vec{r}=0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \vec{A}_e}{\partial x_i x_j}\Big|_{\vec{r}=0} + \dots \qquad \text{写成矢量形式}$$

$$= \vec{A}_e(0) + \vec{r}\cdot\nabla\vec{A}_e(0) + \frac{1}{2}(\vec{r}\vec{r}) : \nabla\nabla\vec{A}_e(0) + \dots$$

$$W_{\text{int}} = \int \vec{j}\cdot\vec{A}_e\,\mathrm{d}\tau = \int \vec{j}\cdot\vec{A}_e(0)\,\mathrm{d}\tau + \int \vec{j}\cdot\left[\vec{r}\cdot\nabla\vec{A}_e(0)\right]\mathrm{d}\tau + \dots$$

$$W_{\text{int}} = \left[\int \vec{j}\,\mathrm{d}\tau\right]\cdot\vec{A}_e(0) + \int (\vec{j}\,\vec{r}) : \nabla\vec{A}_e(0)\,\mathrm{d}\tau + \dots \qquad \text{利用} \int \vec{j}\,\mathrm{d}\tau = 0$$

$$= \int (\vec{j}\,\vec{r})\,\mathrm{d}\tau : \left[\nabla'\vec{A}_e(\vec{r}\,')\right]_{\vec{r}\,'=0} + \dots \qquad \text{利用} \int (\vec{j}\vec{r} + \vec{r}\vec{j})\,\mathrm{d}\tau = 0$$

$$W_{\text{int}} = \tfrac{1}{2}\int (\vec{j}\,\vec{r} - \vec{r}\,\vec{j}) : \left[\nabla'\vec{A}_e(\vec{r}\,')\right]\mathrm{d}\tau + \dots$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\nabla\times\vec{A}) = \vec{a}\cdot\left[\vec{b}\times(\nabla\times\vec{A})\right] \qquad \text{利用了混合积公式，再利用连续叉乘公式}$$

对小局域电流，电流分布在 $\vec{r}\sim 0$ 区，故 $\vec{A}_e(\vec{r})$ 在 $\vec{r}=0$ 作泰勒展开

$$\vec{A}_e(\vec{r}) = \vec{A}_e(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=0} + \sum_i x_i \frac{\partial \vec{A}_e}{\partial x_i}\Big|_{\vec{r}=0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \vec{A}_e}{\partial x_i x_j}\Big|_{\vec{r}=0} + \dots$$

写成矢量形式

$$= \vec{A}_e(0) + \vec{r}\cdot\nabla\vec{A}_e(0) + \frac{1}{2}(\vec{r}\vec{r}) : \nabla\nabla\vec{A}_e(0) + \dots$$

$$W_{\text{int}} = \int \vec{j}\cdot\vec{A}_e\,\mathrm{d}\tau = \int \vec{j}\cdot\vec{A}_e(0)\,\mathrm{d}\tau + \int \vec{j}\cdot\left[\vec{r}\cdot\nabla\vec{A}_e(0)\right]\mathrm{d}\tau + \dots$$

$$W_{\text{int}} = \left[\int \vec{j}\,\mathrm{d}\tau\right]\cdot\vec{A}_e(0) + \int (\vec{j}\,\vec{r}) : \nabla\vec{A}_e(0)\,\mathrm{d}\tau + \dots$$

利用 $\int \vec{j}\,\mathrm{d}\tau = 0$

$$= \int (\vec{j}\,\vec{r})\,\mathrm{d}\tau : \left[\nabla'\vec{A}_e(\vec{r}\,')\right]_{\vec{r}\,'=0} + \dots$$

利用 $\int (\vec{j}\vec{r} + \vec{r}\vec{j})\,\mathrm{d}\tau = 0$

$$W_{\text{int}} = \tfrac{1}{2}\int (\vec{j}\,\vec{r} - \vec{r}\,\vec{j}) : \left[\nabla'\vec{A}_e(\vec{r}\,')\right]\mathrm{d}\tau + \dots$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\nabla\times\vec{A}) = \vec{a}\cdot\left[\vec{b}\times(\nabla\times\vec{A})\right]$$

利用了混合积公式，再利用连续叉乘公式

$$= \vec{a}\cdot\left[\nabla_A(\vec{A}\cdot\vec{b}) - (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{A}\right] = \vec{a}\cdot\left[(\nabla\vec{A})\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot(\nabla\vec{A})\right]$$

对小局域电流，电流分布在 $\vec{r}\sim 0$ 区，故 $\vec{A}_e(\vec{r})$ 在 $\vec{r}=0$ 作泰勒展开

$$\vec{A}_e(\vec{r}) = \vec{A}_e(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=0} + \sum_i x_i \frac{\partial \vec{A}_e}{\partial x_i}\Big|_{\vec{r}=0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \vec{A}_e}{\partial x_i x_j}\Big|_{\vec{r}=0} + \ldots$$

写成矢量形式

$$= \vec{A}_e(0) + \vec{r}\cdot\nabla\vec{A}_e(0) + \frac{1}{2}(\vec{r}\vec{r}) : \nabla\nabla\vec{A}_e(0) + \ldots$$

$$W_{\text{int}} = \int \vec{j}\cdot\vec{A}_e \,\mathrm{d}\tau = \int \vec{j}\cdot\vec{A}_e(0)\,\mathrm{d}\tau + \int \vec{j}\cdot\left[\vec{r}\cdot\nabla\vec{A}_e(0)\right]\mathrm{d}\tau + \ldots$$

$$W_{\text{int}} = \left[\int \vec{j}\,\mathrm{d}\tau\right]\cdot\vec{A}_e(0) + \int (\vec{j}\,\vec{r}) : \nabla\vec{A}_e(0)\,\mathrm{d}\tau + \ldots$$

利用 $\int \vec{j}\,\mathrm{d}\tau = 0$

$$= \int (\vec{j}\,\vec{r})\,\mathrm{d}\tau : \left[\nabla'\vec{A}_e(\vec{r}\,')\right]_{\vec{r}\,'=0} + \ldots$$

利用 $\int (\vec{j}\vec{r} + \vec{r}\vec{j})\,\mathrm{d}\tau = 0$

$$W_{\text{int}} = \tfrac{1}{2}\int (\vec{j}\,\vec{r} - \vec{r}\,\vec{j}) : \left[\nabla'\vec{A}_e(\vec{r}\,')\right]\mathrm{d}\tau + \ldots$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\nabla\times\vec{A}) = \vec{a}\cdot\left[\vec{b}\times(\nabla\times\vec{A})\right]$$

利用了混合积公式，再利用连续叉乘公式

$$= \vec{a}\cdot\left[\nabla_A(\vec{A}\cdot\vec{b}) - (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{A}\right] = \vec{a}\cdot\left[(\nabla\vec{A})\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot(\nabla\vec{A})\right]$$

$$= (\vec{b}\vec{a}) : (\nabla\vec{A}) - (\vec{a}\vec{b}) : (\nabla\vec{A}) = \left[\vec{b}\vec{a} - \vec{a}\vec{b}\right] : (\nabla\vec{A})$$

对小局域电流，电流分布在 $\vec{r}\sim 0$ 区，故 $\vec{A}_e(\vec{r})$ 在 $\vec{r}=0$ 作泰勒展开

$$\vec{A}_e(\vec{r}) = \vec{A}_e(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=0} + \sum_i x_i \frac{\partial \vec{A}_e}{\partial x_i}\Big|_{\vec{r}=0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \vec{A}_e}{\partial x_i x_j}\Big|_{\vec{r}=0} + \ldots \quad \text{写成矢量形式}$$

$$= \vec{A}_e(0) + \vec{r}\cdot\nabla\vec{A}_e(0) + \frac{1}{2}(\vec{r}\vec{r}) : \nabla\nabla\vec{A}_e(0) + \ldots$$

$$W_{\text{int}} = \int \vec{j}\cdot\vec{A}_e\,\mathrm{d}\tau = \int \vec{j}\cdot\vec{A}_e(0)\,\mathrm{d}\tau + \int \vec{j}\cdot\left[\vec{r}\cdot\nabla\vec{A}_e(0)\right]\mathrm{d}\tau + \ldots$$

$$W_{\text{int}} = \left[\int \vec{j}\,\mathrm{d}\tau\right]\cdot\vec{A}_e(0) + \int (\vec{j}\,\vec{r}) : \nabla\vec{A}_e(0)\,\mathrm{d}\tau + \ldots \qquad \text{利用} \int \vec{j}\,\mathrm{d}\tau = 0$$

$$= \int (\vec{j}\,\vec{r})\,\mathrm{d}\tau : \left[\nabla'\vec{A}_e(\vec{r}\,')\right]_{\vec{r}\,'=0} + \ldots \qquad \text{利用} \int (\vec{j}\vec{r} + \vec{r}\vec{j})\,\mathrm{d}\tau = 0$$

$$W_{\text{int}} = \tfrac{1}{2}\int (\vec{j}\,\vec{r} - \vec{r}\,\vec{j}) : \left[\nabla'\vec{A}_e(\vec{r}\,')\right]\mathrm{d}\tau + \ldots$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\nabla\times\vec{A}) = \vec{a}\cdot\left[\vec{b}\times(\nabla\times\vec{A})\right] \qquad \text{利用了混合积公式，再利用连续叉乘公式}$$

$$= \vec{a}\cdot\left[\nabla_A(\vec{A}\cdot\vec{b}) - (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{A}\right] = \vec{a}\cdot\left[(\nabla\vec{A})\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot(\nabla\vec{A})\right]$$

$$= (\vec{b}\vec{a}) : (\nabla\vec{A}) - (\vec{a}\vec{b}) : (\nabla\vec{A}) = \left[\vec{b}\vec{a} - \vec{a}\vec{b}\right] : (\nabla\vec{A}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\nabla\times\vec{A})$$

Let there be light

$$W_{\mathrm{int}} = \frac{1}{2} \int \left(\vec{\boldsymbol{j}}\, \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\, \vec{\boldsymbol{j}} \right) \boldsymbol{:} \left[\nabla' \vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \right] \mathrm{d}\tau + \ldots$$

Let there be light

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int \left(\vec{\boldsymbol{j}}\,\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,\vec{\boldsymbol{j}}\right) \boldsymbol{:} \left[\nabla'\vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\right] \mathsf{d}\tau + \ldots$$

$$(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}) \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) = \left[\,\vec{\boldsymbol{b}}\vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}}\,\right] \boldsymbol{:} (\nabla\vec{\boldsymbol{A}})$$

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int \left(\vec{j}\,\vec{r} - \vec{r}\,\vec{j}\right) : \left[\nabla' \vec{A}_e(\vec{r}\,')\right] \mathrm{d}\tau + \ldots$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \left[\,\vec{b}\vec{a} - \vec{a}\vec{b}\,\right] : (\nabla \vec{A})$$

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int \left(\vec{r} \times \vec{j}\right) \cdot \left[\nabla' \times \vec{A}_e(\vec{r}\,')\right] \mathrm{d}\tau + \ldots$$

利用
$$\frac{1}{2}\int \vec{r} \times \vec{j}\,\mathrm{d}\tau = \vec{m}$$
$$\nabla' \times \vec{A}_e(\vec{r}\,') = \vec{B}(\vec{r}\,')$$

Let there be light

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int (\vec{j}\,\vec{r} - \vec{r}\,\vec{j}) : [\nabla' \vec{A}_e(\vec{r}\,')]\, \mathrm{d}\tau + \ldots$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \left[\vec{b}\vec{a} - \vec{a}\vec{b}\right] : (\nabla \vec{A})$$

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int (\vec{r} \times \vec{j}) \cdot [\nabla' \times \vec{A}_e(\vec{r}\,')]\, \mathrm{d}\tau + \ldots$$

$$= \vec{m} \cdot \vec{B}_e(0) + \ldots$$

利用 $\frac{1}{2}\int \vec{r} \times \vec{j}\, \mathrm{d}\tau = \vec{m}$

$\nabla' \times \vec{A}_e(\vec{r}\,') = \vec{B}(\vec{r}\,')$

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int \left(\vec{\boldsymbol{j}}\,\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,\vec{\boldsymbol{j}}\right) : \left[\nabla'\vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\right] \mathrm{d}\tau + \ldots$$

$$(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}) \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) = \left[\,\vec{\boldsymbol{b}}\vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}}\,\right] : (\nabla\vec{\boldsymbol{A}})$$

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int \left(\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{j}}\right) \cdot \left[\nabla' \times \vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\right] \mathrm{d}\tau + \ldots$$

$$= \vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) + \ldots$$

利用 $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\tau = \vec{\boldsymbol{m}}$

$\nabla' \times \vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,') = \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$

磁偶与外场相互作用能：$W^{(m)}_{\text{int}} = +\vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e$ 比较电偶 $W^{(p)}_{\text{int}} = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}_e$

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int (\vec{\boldsymbol{j}}\,\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,\vec{\boldsymbol{j}}) : \left[\nabla'\vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}')\right] \mathrm{d}\tau + \dots$$

$$(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}) \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) = \left[\vec{\boldsymbol{b}}\vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}}\right] : (\nabla\vec{\boldsymbol{A}})$$

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int (\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{j}}) \cdot \left[\nabla' \times \vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}')\right] \mathrm{d}\tau + \dots$$

$$= \vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) + \dots$$

利用 $\frac{1}{2}\int \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\tau = \vec{\boldsymbol{m}}$

$\nabla' \times \vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}') = \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}')$

磁偶与外场相互作用能：$W_{\text{int}}^{(m)} = +\vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e$ 比较电偶 $W_{\text{int}}^{(p)} = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}_e$

三、磁偶极子在外场中所受的力和力矩

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int \left(\vec{\boldsymbol{j}}\,\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,\vec{\boldsymbol{j}}\right) : \left[\nabla'\vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\right] \mathrm{d}\tau + \dots$$

$$(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}) \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) = \left[\vec{\boldsymbol{b}}\vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}}\right] : (\nabla \vec{\boldsymbol{A}})$$

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int (\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{j}}) \cdot \left[\nabla' \times \vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\right] \mathrm{d}\tau + \dots$$

$$= \vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) + \dots$$

利用 $\frac{1}{2}\int \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\tau = \vec{\boldsymbol{m}}$

$\nabla' \times \vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,') = \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$

磁偶与外场相互作用能：$W_{\text{int}}^{(m)} = +\vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e$ 比较电偶 $W_{\text{int}}^{(p)} = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}_e$

三、磁偶极子在外场中所受的力和力矩

出发点：洛伦兹力 $\vec{\boldsymbol{F}} = \int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,\mathrm{d}\tau'$

对小局域电流，电流分布在 $\vec{\boldsymbol{r}}\,' \sim 0$ 区，故 $\vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 在 $\vec{\boldsymbol{r}}\,' = 0$ 作泰勒展开

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int \left(\vec{\boldsymbol{j}}\,\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,\vec{\boldsymbol{j}}\right) : \left[\nabla'\vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}')\right] \mathrm{d}\tau + \dots$$

$$(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}) \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) = \left[\vec{\boldsymbol{b}}\vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}}\right] : (\nabla\vec{\boldsymbol{A}})$$

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int (\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{j}}) \cdot \left[\nabla' \times \vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}')\right] \mathrm{d}\tau + \dots$$

$$= \vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) + \dots$$

利用 $\frac{1}{2}\int \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\tau = \vec{\boldsymbol{m}}$，$\nabla' \times \vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}') = \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}')$

磁偶与外场相互作用能：$W_{\text{int}}^{(m)} = +\vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e$　　比较电偶　$W_{\text{int}}^{(p)} = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}_e$

三、磁偶极子在外场中所受的力和力矩

出发点：洛伦兹力 $\vec{\boldsymbol{F}} = \int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}') \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}')\,\mathrm{d}\tau'$

对小局域电流，电流分布在 $\vec{\boldsymbol{r}}' \sim 0$ 区，故 $\vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}')$ 在 $\vec{\boldsymbol{r}}' = 0$ 作泰勒展开

$$\vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}') = \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) + \vec{\boldsymbol{r}}' \cdot \left[\nabla'\vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}')\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}'=0} + \cdots = \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) + \vec{\boldsymbol{r}}' \cdot \left[\nabla\vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}})\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \dots$$

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int \left(\vec{\boldsymbol{j}}\,\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,\vec{\boldsymbol{j}}\right) : \left[\nabla'\vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\right] \mathrm{d}\tau + \ldots$$

$$(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}) \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) = \left[\vec{\boldsymbol{b}}\vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}}\right] : (\nabla\vec{\boldsymbol{A}})$$

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int \left(\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{j}}\right) \cdot \left[\nabla' \times \vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\right] \mathrm{d}\tau + \ldots$$

$$= \vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) + \ldots$$

利用 $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\tau = \vec{\boldsymbol{m}}$

$\nabla' \times \vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,') = \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$

磁偶与外场相互作用能：$W_{\text{int}}^{(m)} = +\vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e$ 比较电偶 $W_{\text{int}}^{(p)} = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}_e$

三、磁偶极子在外场中所受的力和力矩

出发点：洛伦兹力 $\vec{\boldsymbol{F}} = \displaystyle\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,\mathrm{d}\tau'$

对小局域电流，电流分布在 $\vec{\boldsymbol{r}}\,' \sim 0$ 区，故 $\vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 在 $\vec{\boldsymbol{r}}\,' = 0$ 作泰勒展开

$$\vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,') = \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) + \vec{\boldsymbol{r}}\,' \cdot [\nabla'\vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,')]_{\vec{\boldsymbol{r}}\,'=0} + \cdots = \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) + \vec{\boldsymbol{r}}\,' \cdot [\nabla\vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}})]_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \ldots$$

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \left[\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,\mathrm{d}\tau'\right] \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) + \int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times [\vec{\boldsymbol{r}}\,' \cdot \nabla\vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}})]\,\mathrm{d}\tau'$$

最后再令 $\vec{\boldsymbol{r}} = 0$

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times [\vec{\boldsymbol{r}}\,' \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}})]\, \mathrm{d}\tau'$$

最后再令 $\vec{\boldsymbol{r}} = 0$

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times [\vec{\boldsymbol{r}}\,' \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}})]\,\mathrm{d}\tau'$$ 最后再令 $\vec{\boldsymbol{r}} = 0$

利用：$\nabla \times \{[\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\vec{\boldsymbol{r}}\,'] \cdot \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})\}$

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times [\vec{\boldsymbol{r}}\,' \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}})]\, \mathrm{d}\tau'$$ 最后再令 $\vec{\boldsymbol{r}} = 0$

利用：$\nabla \times \{[\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\vec{\boldsymbol{r}}\,'] \cdot \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})\} = \nabla \times \{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')[\vec{\boldsymbol{r}}\,' \cdot \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})]\}$

$$\vec{F} = \int \vec{j}(\vec{r}\,') \times [\vec{r}\,' \cdot \nabla \vec{B}_e(\vec{r})]\, \mathrm{d}\tau'$$ 最后再令 $\vec{r} = 0$

利用：$\nabla \times \{[\vec{j}(\vec{r}\,')\vec{r}\,'] \cdot \vec{B}(\vec{r})\} = \nabla \times \{\vec{j}(\vec{r}\,')[\vec{r}\,' \cdot \vec{B}(\vec{r})]\} = \{\nabla[\vec{r}\,' \cdot \vec{B}(\vec{r})]\} \times \vec{j}(\vec{r}\,')$

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}') \times [\vec{\boldsymbol{r}}' \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}})]\, \mathrm{d}\tau' \qquad \text{最后再令 } \vec{\boldsymbol{r}} = 0$$

利用：$\nabla \times \{[\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\vec{\boldsymbol{r}}'] \cdot \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})\} = \nabla \times \{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')[\vec{\boldsymbol{r}}' \cdot \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})]\} = \{\nabla[\vec{\boldsymbol{r}}' \cdot \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})]\} \times \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')$

$$= \{[\nabla \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})] \cdot \vec{\boldsymbol{r}}'\} \times \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}') = -\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}') \times \{[\nabla \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})] \cdot \vec{\boldsymbol{r}}'\} = -\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}') \times [\vec{\boldsymbol{r}}' \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})]$$

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times [\vec{\boldsymbol{r}}\,' \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}})]\, \mathrm{d}\tau'$$ 最后再令 $\vec{\boldsymbol{r}} = 0$

利用：$\nabla \times \{[\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\vec{\boldsymbol{r}}\,'] \cdot \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})\} = \nabla \times \{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')[\vec{\boldsymbol{r}}\,' \cdot \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})]\} = \{\nabla[\vec{\boldsymbol{r}}\,' \cdot \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})]\} \times \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$

$$= \{[\nabla \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})] \cdot \vec{\boldsymbol{r}}\,'\} \times \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') = -\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times \{[\nabla \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})] \cdot \vec{\boldsymbol{r}}\,'\} = -\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times [\vec{\boldsymbol{r}}\,' \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})]$$

最后一步利用了由于 $\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}} = 0$，$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot (\nabla \vec{\boldsymbol{B}}) = (\nabla \vec{\boldsymbol{B}}) \cdot \vec{\boldsymbol{a}}$

$$\vec{F} = \int \vec{j}(\vec{r}\,') \times [\vec{r}\,' \cdot \nabla \vec{B}_e(\vec{r})]\, \mathrm{d}\tau' \qquad \text{最后再令 } \vec{r} = 0$$

利用：$\nabla \times \{[\vec{j}(\vec{r}\,')\vec{r}\,'] \cdot \vec{B}(\vec{r})\} = \nabla \times \{\vec{j}(\vec{r}\,')[\vec{r}\,' \cdot \vec{B}(\vec{r})]\} = \{\nabla[\vec{r}\,' \cdot \vec{B}(\vec{r})]\} \times \vec{j}(\vec{r}\,')$

$$= \{[\nabla \vec{B}(\vec{r})] \cdot \vec{r}\,'\} \times \vec{j}(\vec{r}\,') = -\vec{j}(\vec{r}\,') \times \{[\nabla \vec{B}(\vec{r})] \cdot \vec{r}\,'\} = -\vec{j}(\vec{r}\,') \times [\vec{r}\,' \cdot \nabla \vec{B}(\vec{r})]$$

最后一步利用了由于 $\nabla \times \vec{B} = 0$，$\vec{a} \cdot (\nabla \vec{B}) = (\nabla \vec{B}) \cdot \vec{a}$

故：$\vec{F} = -\int \nabla \times \{[\vec{j}(\vec{r}\,')\vec{r}\,'] \cdot \vec{B}_e(\vec{r})\}\, \mathrm{d}\tau' = -\nabla \times \int [\vec{j}(\vec{r}\,')\vec{r}\,'] \cdot \vec{B}_e(\vec{r})\, \mathrm{d}\tau'$

$$\vec{F} = \int \vec{j}(\vec{r}\,') \times [\vec{r}\,' \cdot \nabla \vec{B}_e(\vec{r})]\,\mathrm{d}\tau' \qquad \text{最后再令 } \vec{r} = 0$$

利用：$\nabla \times \{[\vec{j}(\vec{r}\,')\vec{r}\,'] \cdot \vec{B}(\vec{r})\} = \nabla \times \{\vec{j}(\vec{r}\,')[\vec{r}\,' \cdot \vec{B}(\vec{r})]\} = \{\nabla[\vec{r}\,' \cdot \vec{B}(\vec{r})]\} \times \vec{j}(\vec{r}\,')$

$$= \{[\nabla \vec{B}(\vec{r})] \cdot \vec{r}\,'\} \times \vec{j}(\vec{r}\,') = -\vec{j}(\vec{r}\,') \times \{[\nabla \vec{B}(\vec{r})] \cdot \vec{r}\,'\} = -\vec{j}(\vec{r}\,') \times [\vec{r}\,' \cdot \nabla \vec{B}(\vec{r})]$$

最后一步利用了由于 $\nabla \times \vec{B} = 0$，$\vec{a} \cdot (\nabla \vec{B}) = (\nabla \vec{B}) \cdot \vec{a}$

故：$\vec{F} = -\int \nabla \times \{[\vec{j}(\vec{r}\,')\vec{r}\,'] \cdot \vec{B}_e(\vec{r})\}\,\mathrm{d}\tau' = -\nabla \times \int [\vec{j}(\vec{r}\,')\vec{r}\,'] \cdot \vec{B}_e(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau'$

$$= -\frac{1}{2}\nabla \times \int [\vec{j}(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,' - \vec{r}\,'\,\vec{j}] \cdot \vec{B}_e(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau' \qquad \text{利用了} \int [\vec{j}(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,' + \vec{r}\,'\,\vec{j}]\mathrm{d}\tau' = 0$$

$$\vec{F} = \int \vec{j}(\vec{r}\,') \times [\vec{r}\,' \cdot \nabla \vec{B}_e(\vec{r})]\,\mathrm{d}\tau' \qquad \text{最后再令 } \vec{r} = 0$$

利用：$\nabla \times \{[\vec{j}(\vec{r}\,')\vec{r}\,'] \cdot \vec{B}(\vec{r})\} = \nabla \times \{\vec{j}(\vec{r}\,')[\vec{r}\,' \cdot \vec{B}(\vec{r})]\} = \{\nabla[\vec{r}\,' \cdot \vec{B}(\vec{r})]\} \times \vec{j}(\vec{r}\,')$

$$= \{[\nabla \vec{B}(\vec{r})] \cdot \vec{r}\,'\} \times \vec{j}(\vec{r}\,') = -\vec{j}(\vec{r}\,') \times \{[\nabla \vec{B}(\vec{r})] \cdot \vec{r}\,'\} = -\vec{j}(\vec{r}\,') \times [\vec{r}\,' \cdot \nabla \vec{B}(\vec{r})]$$

最后一步利用了由于 $\nabla \times \vec{B} = 0$，$\vec{a} \cdot (\nabla \vec{B}) = (\nabla \vec{B}) \cdot \vec{a}$

故：$\vec{F} = -\int \nabla \times \{[\vec{j}(\vec{r}\,')\vec{r}\,'] \cdot \vec{B}_e(\vec{r})\}\,\mathrm{d}\tau' = -\nabla \times \int [\vec{j}(\vec{r}\,')\vec{r}\,'] \cdot \vec{B}_e(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau'$

$$= -\frac{1}{2}\nabla \times \int [\vec{j}(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,' - \vec{r}\,'\,\vec{j}] \cdot \vec{B}_e(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau' \qquad \text{利用了 } \int [\vec{j}(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,' + \vec{r}\,'\,\vec{j}]\mathrm{d}\tau' = 0$$

$$= -\frac{1}{2}\nabla \times \int \underbrace{\left\{\vec{j}(\vec{r}\,')\,[\vec{r}\,' \cdot \vec{B}_e(\vec{r})] - \vec{r}\,'\,[\vec{j} \cdot \vec{B}_e(\vec{r})]\right\}}_{\vec{B}_e(\vec{r}) \times [\vec{j}(\vec{r}\,') \times \vec{r}\,']}\,\mathrm{d}\tau'$$

$$\vec{F} = \int \vec{j}(\vec{r}\,') \times [\vec{r}\,' \cdot \nabla \vec{B}_e(\vec{r})]\, \mathrm{d}\tau' \qquad \text{最后再令 } \vec{r} = 0$$

利用：$\nabla \times \{[\vec{j}(\vec{r}\,')\vec{r}\,'] \cdot \vec{B}(\vec{r})\} = \nabla \times \{\vec{j}(\vec{r}\,')[\vec{r}\,' \cdot \vec{B}(\vec{r})]\} = \{\nabla[\vec{r}\,' \cdot \vec{B}(\vec{r})]\} \times \vec{j}(\vec{r}\,')$

$$= \{[\nabla \vec{B}(\vec{r})] \cdot \vec{r}\,'\} \times \vec{j}(\vec{r}\,') = -\vec{j}(\vec{r}\,') \times \{[\nabla \vec{B}(\vec{r})] \cdot \vec{r}\,'\} = -\vec{j}(\vec{r}\,') \times [\vec{r}\,' \cdot \nabla \vec{B}(\vec{r})]$$

最后一步利用了由于 $\nabla \times \vec{B} = 0$，$\vec{a} \cdot (\nabla \vec{B}) = (\nabla \vec{B}) \cdot \vec{a}$

故：$\vec{F} = -\int \nabla \times \{[\vec{j}(\vec{r}\,')\vec{r}\,'] \cdot \vec{B}_e(\vec{r})\}\, \mathrm{d}\tau' = -\nabla \times \int [\vec{j}(\vec{r}\,')\vec{r}\,'] \cdot \vec{B}_e(\vec{r})\, \mathrm{d}\tau'$

$$= -\frac{1}{2}\nabla \times \int [\vec{j}(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,' - \vec{r}\,'\,\vec{j}] \cdot \vec{B}_e(\vec{r})\, \mathrm{d}\tau' \qquad \text{利用了} \int [\vec{j}(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,' + \vec{r}\,'\,\vec{j}]\mathrm{d}\tau' = 0$$

$$= -\frac{1}{2}\nabla \times \int \underbrace{\left\{\vec{j}(\vec{r}\,')\,[\vec{r}\,' \cdot \vec{B}_e(\vec{r})] - \vec{r}\,'\,[\vec{j} \cdot \vec{B}_e(\vec{r})]\right\}}_{\vec{B}_e(\vec{r}) \times [\vec{j}(\vec{r}\,') \times \vec{r}\,']} \mathrm{d}\tau'$$

$$= -\nabla \times \left\{ \underbrace{\left[\frac{1}{2}\int \vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,')\right]}_{\vec{m}} \times \vec{B}_e(\vec{r}) \right\}$$

$$\vec{F}=\int\vec{j}(\vec{r}\,')\times[\vec{r}\,'\cdot\nabla\vec{B}_e(\vec{r})]\,\mathrm{d}\tau' \qquad \text{最后再令 } \vec{r}=0$$

利用：$\nabla\times\{[\vec{j}(\vec{r}\,')\vec{r}\,']\cdot\vec{B}(\vec{r})\}=\nabla\times\{\vec{j}(\vec{r}\,')[\vec{r}\,'\cdot\vec{B}(\vec{r})]\}=\{\nabla[\vec{r}\,'\cdot\vec{B}(\vec{r})]\}\times\vec{j}(\vec{r}\,')$

$$=\{[\nabla\vec{B}(\vec{r})]\cdot\vec{r}\,'\}\times\vec{j}(\vec{r}\,')=-\vec{j}(\vec{r}\,')\times\{[\nabla\vec{B}(\vec{r})]\cdot\vec{r}\,'\}=-\vec{j}(\vec{r}\,')\times[\vec{r}\,'\cdot\nabla\vec{B}(\vec{r})]$$

最后一步利用了由于 $\nabla\times\vec{B}=0$，$\vec{a}\cdot(\nabla\vec{B})=(\nabla\vec{B})\cdot\vec{a}$

故：$\vec{F}=-\int\nabla\times\{[\vec{j}(\vec{r}\,')\vec{r}\,']\cdot\vec{B}_e(\vec{r})\}\,\mathrm{d}\tau'=-\nabla\times\int[\vec{j}(\vec{r}\,')\vec{r}\,']\cdot\vec{B}_e(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau'$

$$=-\frac{1}{2}\nabla\times\int[\vec{j}(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,'-\vec{r}\,'\,\vec{j}]\cdot\vec{B}_e(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau' \qquad \text{利用了} \int[\vec{j}(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,'+\vec{r}\,'\,\vec{j}]\mathrm{d}\tau'=0$$

$$=-\frac{1}{2}\nabla\times\int\underbrace{\left\{\vec{j}(\vec{r}\,')\,[\vec{r}\,'\cdot\vec{B}_e(\vec{r})]-\vec{r}\,'\,[\vec{j}\cdot\vec{B}_e(\vec{r})]\right\}}_{\vec{B}_e(\vec{r})\times[\vec{j}(\vec{r}\,')\times\vec{r}\,']}\,\mathrm{d}\tau'$$

$$=-\nabla\times\left\{\underbrace{\left[\frac{1}{2}\int\vec{r}\,'\times\vec{j}(\vec{r}\,')\right]}_{\vec{m}}\times\vec{B}_e(\vec{r})\right\}=-\nabla\times[\vec{m}\times\vec{B}_e(\vec{r})]$$

$$\vec{F} = \int \vec{j}(\vec{r}\,') \times [\vec{r}\,' \cdot \nabla \vec{B}_e(\vec{r})]\,\mathrm{d}\tau' \qquad \text{最后再令 } \vec{r} = 0$$

利用：$\nabla \times \{[\vec{j}(\vec{r}\,')\vec{r}\,'] \cdot \vec{B}(\vec{r})\} = \nabla \times \{\vec{j}(\vec{r}\,')[\vec{r}\,' \cdot \vec{B}(\vec{r})]\} = \{\nabla[\vec{r}\,' \cdot \vec{B}(\vec{r})]\} \times \vec{j}(\vec{r}\,')$

$$= \{[\nabla \vec{B}(\vec{r})] \cdot \vec{r}\,'\} \times \vec{j}(\vec{r}\,') = -\vec{j}(\vec{r}\,') \times \{[\nabla \vec{B}(\vec{r})] \cdot \vec{r}\,'\} = -\vec{j}(\vec{r}\,') \times [\vec{r}\,' \cdot \nabla \vec{B}(\vec{r})]$$

最后一步利用了由于 $\nabla \times \vec{B} = 0$，$\vec{a} \cdot (\nabla \vec{B}) = (\nabla \vec{B}) \cdot \vec{a}$

故：$\vec{F} = -\int \nabla \times \{[\vec{j}(\vec{r}\,')\vec{r}\,'] \cdot \vec{B}_e(\vec{r})\}\,\mathrm{d}\tau' = -\nabla \times \int [\vec{j}(\vec{r}\,')\vec{r}\,'] \cdot \vec{B}_e(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau'$

$$= -\frac{1}{2}\nabla \times \int [\vec{j}(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,' - \vec{r}\,'\,\vec{j}] \cdot \vec{B}_e(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau' \qquad \text{利用了} \int [\vec{j}(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,' + \vec{r}\,'\,\vec{j}]\mathrm{d}\tau' = 0$$

$$= -\frac{1}{2}\nabla \times \int \underbrace{\left\{\vec{j}(\vec{r}\,')\,[\vec{r}\,' \cdot \vec{B}_e(\vec{r})] - \vec{r}\,'\,[\vec{j} \cdot \vec{B}_e(\vec{r})]\right\}}_{\vec{B}_e(\vec{r}) \times [\vec{j}(\vec{r}\,') \times \vec{r}\,']}\,\mathrm{d}\tau'$$

$$= -\nabla \times \left\{\underbrace{\left[\frac{1}{2}\int \vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,')\right]}_{\vec{m}} \times \vec{B}_e(\vec{r})\right\} = -\nabla \times [\vec{m} \times \vec{B}_e(\vec{r})]$$

$$\vec{F} = -\nabla \times [\vec{m} \times \vec{B}_e(\vec{r})] = -[\nabla \cdot \vec{B}_e(\vec{r})]\vec{m} + (\vec{m} \cdot \nabla)\vec{B}_e(\vec{r}) = \vec{m} \cdot \nabla \vec{B}_e(\vec{r})$$

$$\vec{F} = \int \vec{j}(\vec{r}\,') \times [\vec{r}\,' \cdot \nabla \vec{B}_e(\vec{r})]\, \mathrm{d}\tau' \qquad \text{最后再令 } \vec{r} = 0$$

利用：$\nabla \times \{[\vec{j}(\vec{r}\,')\vec{r}\,'] \cdot \vec{B}(\vec{r})\} = \nabla \times \{\vec{j}(\vec{r}\,')[\vec{r}\,' \cdot \vec{B}(\vec{r})]\} = \{\nabla[\vec{r}\,' \cdot \vec{B}(\vec{r})]\} \times \vec{j}(\vec{r}\,')$

$$= \{[\nabla \vec{B}(\vec{r})] \cdot \vec{r}\,'\} \times \vec{j}(\vec{r}\,') = -\vec{j}(\vec{r}\,') \times \{[\nabla \vec{B}(\vec{r})] \cdot \vec{r}\,'\} = -\vec{j}(\vec{r}\,') \times [\vec{r}\,' \cdot \nabla \vec{B}(\vec{r})]$$

最后一步利用了由于 $\nabla \times \vec{B} = 0$，$\vec{a} \cdot (\nabla \vec{B}) = (\nabla \vec{B}) \cdot \vec{a}$

故：$\vec{F} = -\int \nabla \times \{[\vec{j}(\vec{r}\,')\vec{r}\,'] \cdot \vec{B}_e(\vec{r})\}\, \mathrm{d}\tau' = -\nabla \times \int [\vec{j}(\vec{r}\,')\vec{r}\,'] \cdot \vec{B}_e(\vec{r})\, \mathrm{d}\tau'$

$$= -\frac{1}{2}\nabla \times \int [\vec{j}(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,' - \vec{r}\,'\,\vec{j}] \cdot \vec{B}_e(\vec{r})\, \mathrm{d}\tau' \qquad \text{利用了 } \int [\vec{j}(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,' + \vec{r}\,'\,\vec{j}]\mathrm{d}\tau' = 0$$

$$= -\frac{1}{2}\nabla \times \int \underbrace{\left\{\vec{j}(\vec{r}\,')\,[\vec{r}\,' \cdot \vec{B}_e(\vec{r})] - \vec{r}\,'\,[\vec{j} \cdot \vec{B}_e(\vec{r})]\right\}}_{\vec{B}_e(\vec{r}) \times [\vec{j}(\vec{r}\,') \times \vec{r}\,']}\, \mathrm{d}\tau'$$

$$= -\nabla \times \left\{\underbrace{\left[\frac{1}{2}\int \vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,')\right]}_{\vec{m}} \times \vec{B}_e(\vec{r})\right\} = -\nabla \times [\vec{m} \times \vec{B}_e(\vec{r})]$$

$$\vec{F} = -\nabla \times [\vec{m} \times \vec{B}_e(\vec{r})] = -[\nabla \cdot \vec{B}_e(\vec{r})]\vec{m} + (\vec{m} \cdot \nabla)\vec{B}_e(\vec{r}) = \vec{m} \cdot \nabla \vec{B}_e(\vec{r})$$

$$\vec{F} = \vec{m} \cdot \nabla \vec{B}_e(\vec{r}) = [\nabla \vec{B}_e(\vec{r})] \cdot \vec{m} = \nabla[\vec{m} \cdot \vec{B}_e(\vec{r})]$$

力矩：$\vec{\boldsymbol{L}} = \int \vec{\boldsymbol{r}}\,' \times [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,')]\, \mathrm{d}\tau'$

力矩：$\vec{\boldsymbol{L}} = \int \vec{\boldsymbol{r}}\,' \times [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,')]\,\mathrm{d}\tau'$

小局域电流分布在 $\vec{\boldsymbol{r}}\,' \sim 0$ 区，$\vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 在 $\vec{\boldsymbol{r}}\,' = 0$ 作泰勒展开只保留第一项

力矩：$\vec{\boldsymbol{L}} = \int \vec{\boldsymbol{r}}\,' \times [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,')]\,\mathrm{d}\tau'$

小局域电流分布在 $\vec{\boldsymbol{r}}\,' \sim 0$ 区，$\vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 在 $\vec{\boldsymbol{r}}\,' = 0$ 作泰勒展开只保留第一项

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \int \vec{\boldsymbol{r}}\,' \times [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)]\,\mathrm{d}\tau' = \int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')[\vec{\boldsymbol{r}}\,' \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)]\mathrm{d}\tau - \int [\vec{\boldsymbol{r}}\,' \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')]\,\mathrm{d}\tau' \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)$$

力矩：$\vec{\boldsymbol{L}} = \displaystyle\int \vec{\boldsymbol{r}}\,' \times [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,')]\,\mathrm{d}\tau'$

小局域电流分布在 $\vec{\boldsymbol{r}}\,' \sim 0$ 区，$\vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 在 $\vec{\boldsymbol{r}}\,' = 0$ 作泰勒展开只保留第一项

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{L}} &= \int \vec{\boldsymbol{r}}\,' \times [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)]\,\mathrm{d}\tau' = \int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')[\vec{\boldsymbol{r}}\,' \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)]\mathrm{d}\tau - \int [\vec{\boldsymbol{r}}\,' \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')]\,\mathrm{d}\tau' \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) \\
&= \int [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\vec{\boldsymbol{r}}\,'] \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\mathrm{d}\tau - \int [\vec{\boldsymbol{r}}\,' \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')]\,\mathrm{d}\tau' \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)
\end{aligned}
$$

力矩：$\vec{\boldsymbol{L}} = \int \vec{\boldsymbol{r}}' \times [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}') \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}')]\, \mathrm{d}\tau'$

小局域电流分布在 $\vec{\boldsymbol{r}}' \sim 0$ 区，$\vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}')$ 在 $\vec{\boldsymbol{r}}' = 0$ 作泰勒展开只保留第一项

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{L}} &= \int \vec{\boldsymbol{r}}' \times [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}') \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)]\, \mathrm{d}\tau' = \int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')[\vec{\boldsymbol{r}}' \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)]\mathrm{d}\tau - \int [\vec{\boldsymbol{r}}' \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')]\, \mathrm{d}\tau' \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) \\
&= \int [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\vec{\boldsymbol{r}}'] \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\mathrm{d}\tau - \int [\vec{\boldsymbol{r}}' \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')]\, \mathrm{d}\tau' \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)
\end{aligned}$$

第一项 $= \dfrac{1}{2}\int [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\vec{\boldsymbol{r}}' - \vec{\boldsymbol{r}}'\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')] \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\mathrm{d}\tau' = \dfrac{1}{2}\int [\vec{\boldsymbol{r}}' \times \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')] \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\mathrm{d}\tau'$

力矩：$\vec{\boldsymbol{L}} = \int \vec{\boldsymbol{r}}' \times [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}') \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}')]\,\mathrm{d}\tau'$

小局域电流分布在 $\vec{\boldsymbol{r}}' \sim 0$ 区，$\vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}')$ 在 $\vec{\boldsymbol{r}}' = 0$ 作泰勒展开只保留第一项

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{L}} &= \int \vec{\boldsymbol{r}}' \times [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}') \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)]\,\mathrm{d}\tau' = \int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')[\vec{\boldsymbol{r}}' \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)]\mathrm{d}\tau - \int [\vec{\boldsymbol{r}}' \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')]\,\mathrm{d}\tau' \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) \\ &= \int [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\vec{\boldsymbol{r}}'] \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\mathrm{d}\tau - \int [\vec{\boldsymbol{r}}' \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')]\,\mathrm{d}\tau' \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{第一项} &= \frac{1}{2}\int [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\vec{\boldsymbol{r}}' - \vec{\boldsymbol{r}}'\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')] \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{2}\int [\vec{\boldsymbol{r}}' \times \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')] \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\mathrm{d}\tau' \\ &= \vec{\boldsymbol{m}} \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\end{aligned}$$

力矩：$\vec{\boldsymbol{L}}=\int\vec{\boldsymbol{r}}'\times[\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\times\vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}')]\,\mathrm{d}\tau'$

小局域电流分布在 $\vec{\boldsymbol{r}}'\sim 0$ 区，$\vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}')$ 在 $\vec{\boldsymbol{r}}'=0$ 作泰勒展开只保留第一项

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{L}}&=\int\vec{\boldsymbol{r}}'\times[\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\times\vec{\boldsymbol{B}}_e(0)]\,\mathrm{d}\tau'=\int\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')[\vec{\boldsymbol{r}}'\cdot\vec{\boldsymbol{B}}_e(0)]\mathrm{d}\tau-\int[\vec{\boldsymbol{r}}'\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')]\,\mathrm{d}\tau'\vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\\&=\int[\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\vec{\boldsymbol{r}}']\cdot\vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\mathrm{d}\tau-\int[\vec{\boldsymbol{r}}'\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')]\,\mathrm{d}\tau'\vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{第一项}&=\frac{1}{2}\int[\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\vec{\boldsymbol{r}}'-\vec{\boldsymbol{r}}'\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')]\cdot\vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\mathrm{d}\tau'=\frac{1}{2}\int[\vec{\boldsymbol{r}}'\times\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')]\times\vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\mathrm{d}\tau'\\&=\vec{\boldsymbol{m}}\times\vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\end{aligned}$$

利用：$\int\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\cdot\vec{\boldsymbol{r}}'\,\mathrm{d}\tau'=0$ (稳定电流满足的第三个数学公式)，第二项为 0

力矩：$\vec{\boldsymbol{L}} = \int \vec{\boldsymbol{r}}\,' \times [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,')]\,\mathrm{d}\tau'$

小局域电流分布在 $\vec{\boldsymbol{r}}\,' \sim 0$ 区，$\vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 在 $\vec{\boldsymbol{r}}\,' = 0$ 作泰勒展开只保留第一项

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \int \vec{\boldsymbol{r}}\,' \times [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)]\,\mathrm{d}\tau' = \int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')[\vec{\boldsymbol{r}}\,' \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)]\mathrm{d}\tau - \int [\vec{\boldsymbol{r}}\,' \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')]\,\mathrm{d}\tau' \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)$$
$$= \int [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\vec{\boldsymbol{r}}\,'] \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\mathrm{d}\tau - \int [\vec{\boldsymbol{r}}\,' \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')]\,\mathrm{d}\tau' \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)$$

$$\text{第一项} = \frac{1}{2}\int [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\vec{\boldsymbol{r}}\,' - \vec{\boldsymbol{r}}\,'\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')] \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{2}\int [\vec{\boldsymbol{r}}\,' \times \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')] \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\mathrm{d}\tau'$$
$$= \vec{\boldsymbol{m}} \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)$$

利用：$\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \cdot \vec{\boldsymbol{r}}\,'\,\mathrm{d}\tau' = 0$ (稳定电流满足的第三个数学公式)，第二项为 0

故：$\boxed{\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{m}} \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)}$

力矩：$\vec{L} = \int \vec{r}\,' \times [\vec{j}(\vec{r}\,') \times \vec{B}_e(\vec{r}\,')]\, \mathrm{d}\tau'$

小局域电流分布在 $\vec{r}\,' \sim 0$ 区，$\vec{B}_e(\vec{r}\,')$ 在 $\vec{r}\,' = 0$ 作泰勒展开只保留第一项

$$\vec{L} = \int \vec{r}\,' \times [\vec{j}(\vec{r}\,') \times \vec{B}_e(0)]\, \mathrm{d}\tau' = \int \vec{j}(\vec{r}\,')[\vec{r}\,' \cdot \vec{B}_e(0)]\mathrm{d}\tau - \int [\vec{r}\,' \cdot \vec{j}(\vec{r}\,')]\, \mathrm{d}\tau' \vec{B}_e(0)$$

$$= \int [\vec{j}(\vec{r}\,')\vec{r}\,'] \cdot \vec{B}_e(0)\mathrm{d}\tau - \int [\vec{r}\,' \cdot \vec{j}(\vec{r}\,')]\, \mathrm{d}\tau' \vec{B}_e(0)$$

$$\text{第一项} = \frac{1}{2}\int [\vec{j}(\vec{r}\,')\vec{r}\,' - \vec{r}\,'\vec{j}(\vec{r}\,')] \cdot \vec{B}_e(0)\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{2}\int [\vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,')] \times \vec{B}_e(0)\mathrm{d}\tau'$$

$$= \vec{m} \times \vec{B}_e(0)$$

利用：$\int \vec{j}(\vec{r}\,') \cdot \vec{r}\,'\, \mathrm{d}\tau' = 0$ (稳定电流满足的第三个数学公式)，第二项为 0

故：$\boxed{\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B}_e(0)}$

下证 $\int \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{r}\, \mathrm{d}\tau = 0$：

$$\vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{r} = \frac{1}{2}\vec{j}(\vec{r}) \cdot \nabla r^2 = \frac{1}{2}\nabla \cdot [\vec{j}(\vec{r})r^2] - \frac{1}{2}r^2 \underbrace{\nabla \cdot \vec{j}(\vec{r})}_{0}$$

力矩：$\vec{\boldsymbol{L}} = \int \vec{\boldsymbol{r}}' \times [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}') \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}')]\, \mathrm{d}\tau'$

小局域电流分布在 $\vec{\boldsymbol{r}}' \sim 0$ 区，$\vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}')$ 在 $\vec{\boldsymbol{r}}' = 0$ 作泰勒展开只保留第一项

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \int \vec{\boldsymbol{r}}' \times [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}') \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)]\, \mathrm{d}\tau' = \int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')[\vec{\boldsymbol{r}}' \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)]\mathrm{d}\tau - \int [\vec{\boldsymbol{r}}' \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')]\, \mathrm{d}\tau' \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)$$

$$= \int [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\vec{\boldsymbol{r}}'] \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\mathrm{d}\tau - \int [\vec{\boldsymbol{r}}' \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')]\, \mathrm{d}\tau' \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)$$

$$\text{第一项} = \frac{1}{2}\int [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\vec{\boldsymbol{r}}' - \vec{\boldsymbol{r}}'\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')] \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{2}\int [\vec{\boldsymbol{r}}' \times \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')] \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\mathrm{d}\tau'$$

$$= \vec{\boldsymbol{m}} \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)$$

利用：$\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}') \cdot \vec{\boldsymbol{r}}'\, \mathrm{d}\tau' = 0$ (稳定电流满足的第三个数学公式)，第二项为 0

故：$\boxed{\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{m}} \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)}$

下证 $\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \vec{\boldsymbol{r}}\, \mathrm{d}\tau = 0$：

$$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \vec{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \nabla r^2 = \frac{1}{2}\nabla \cdot [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})r^2] - \frac{1}{2}r^2 \underbrace{\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})}_{0}$$

即：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \vec{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{2}\nabla \cdot [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})r^2]$

力矩：$\vec{\boldsymbol{L}} = \displaystyle\int \vec{\boldsymbol{r}}\,' \times [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,')]\,\mathrm{d}\tau'$

小局域电流分布在 $\vec{\boldsymbol{r}}\,' \sim 0$ 区，$\vec{\boldsymbol{B}}_e(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 在 $\vec{\boldsymbol{r}}\,' = 0$ 作泰勒展开只保留第一项

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{L}} &= \int \vec{\boldsymbol{r}}\,' \times [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)]\,\mathrm{d}\tau' = \int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')[\vec{\boldsymbol{r}}\,' \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)]\mathrm{d}\tau - \int [\vec{\boldsymbol{r}}\,' \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')]\,\mathrm{d}\tau' \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) \\ &= \int [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\vec{\boldsymbol{r}}\,'] \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\mathrm{d}\tau - \int [\vec{\boldsymbol{r}}\,' \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')]\,\mathrm{d}\tau' \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{第一项} &= \frac{1}{2}\int [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\vec{\boldsymbol{r}}\,' - \vec{\boldsymbol{r}}\,'\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')] \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{2}\int [\vec{\boldsymbol{r}}\,' \times \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')] \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\mathrm{d}\tau' \\ &= \vec{\boldsymbol{m}} \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\end{aligned}$$

利用：$\displaystyle\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \cdot \vec{\boldsymbol{r}}\,'\,\mathrm{d}\tau' = 0$ (稳定电流满足的第三个数学公式)，第二项为 0

故：$\boxed{\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{m}} \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)}$

下证 $\displaystyle\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \vec{\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}\tau = 0$：　$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \vec{\boldsymbol{r}} = \dfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \nabla r^2 = \dfrac{1}{2}\nabla \cdot [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})r^2] - \dfrac{1}{2}r^2 \underbrace{\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})}_{0}$

即：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \vec{\boldsymbol{r}} = \dfrac{1}{2}\nabla \cdot [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})r^2]$

两边同时积分：$\displaystyle\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \vec{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int \nabla \cdot [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})r^2]\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\oint \vec{\boldsymbol{n}} \cdot [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})r^2]\mathrm{d}\sigma = 0$

附：利用磁偶极子的电流密度推导受力公式：

磁偶极子的电流密度：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)$

附：利用磁偶极子的电流密度推导受力公式：

磁偶极子的电流密度：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)$

力：$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \mathrm{d}\tau = -\int \left[\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)\right] \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \mathrm{d}\tau$

附：利用磁偶极子的电流密度推导受力公式：

磁偶极子的电流密度：$\vec{j}(\vec{r}) = -\vec{m} \times \nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_m)$

力：$\vec{F} = \int \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})\mathrm{d}\tau = -\int [\vec{m} \times \nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_m)] \times \vec{B}(\vec{r})\mathrm{d}\tau$

利用连续叉乘公式：$\vec{F} = \int \vec{B}(\vec{r}) \times [\vec{m} \times \nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_m)]\mathrm{d}\tau$

附：利用磁偶极子的电流密度推导受力公式：

磁偶极子的电流密度：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)$

力：$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})\mathrm{d}\tau = -\int [\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)] \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})\mathrm{d}\tau$

利用连续叉乘公式：
$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{F}} &= \int \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \times [\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)]\mathrm{d}\tau \\ &= \int \left\{\vec{\boldsymbol{m}}\,[\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)] - (\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}})\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)\right\}\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

附：利用磁偶极子的电流密度推导受力公式：

磁偶极子的电流密度：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)$

力：$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})\mathrm{d}\tau = -\int [\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)] \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})\mathrm{d}\tau$

利用连续叉乘公式：
$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{F}} &= \int \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \times [\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)]\mathrm{d}\tau \\ &= \int \left\{\vec{\boldsymbol{m}}\,[\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)] - (\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}})\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)\right\}\mathrm{d}\tau \\ &= \vec{\boldsymbol{m}}\int \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)\,\mathrm{d}\tau - \int (\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}})\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

附：利用磁偶极子的电流密度推导受力公式：

磁偶极子的电流密度：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)$

力：$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})\mathrm{d}\tau = -\int [\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)] \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})\mathrm{d}\tau$

利用连续叉乘公式：
$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{F}} &= \int \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \times [\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)]\mathrm{d}\tau \\ &= \int \left\{\vec{\boldsymbol{m}}\,[\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)] - (\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}})\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)\right\}\mathrm{d}\tau \\ &= \vec{\boldsymbol{m}}\int \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)\,\mathrm{d}\tau - \int (\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}})\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

利用：$\int f(\vec{\boldsymbol{r}})\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)\,\mathrm{d}\tau = -\Big[\nabla f(\vec{\boldsymbol{r}})\Big]_{\vec{\boldsymbol{r}}=\vec{\boldsymbol{r}}_m}$

附：利用磁偶极子的电流密度推导受力公式：

磁偶极子的电流密度：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)$

力：$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})\mathrm{d}\tau = -\int [\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)] \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})\mathrm{d}\tau$

利用连续叉乘公式：
$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{F}} &= \int \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \times [\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)]\mathrm{d}\tau \\
&= \int \left\{\vec{\boldsymbol{m}}\,[\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)] - (\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}})\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)\right\}\mathrm{d}\tau \\
&= \vec{\boldsymbol{m}} \int \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)\,\mathrm{d}\tau - \int (\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}})\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

利用：
$$
\begin{aligned}
\int f(\vec{\boldsymbol{r}})\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)\,\mathrm{d}\tau &= -\Big[\nabla f(\vec{\boldsymbol{r}})\Big]_{\vec{\boldsymbol{r}}=\vec{\boldsymbol{r}}_m} \\
\int \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)\,\mathrm{d}\tau &= -\Big[\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\Big]_{\vec{\boldsymbol{r}}=\vec{\boldsymbol{r}}_m}
\end{aligned}
$$

附：利用磁偶极子的电流密度推导受力公式：

磁偶极子的电流密度：$\vec{j}(\vec{r}) = -\vec{m} \times \nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_m)$

力：$\vec{F} = \int \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \mathrm{d}\tau = -\int [\vec{m} \times \nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_m)] \times \vec{B}(\vec{r}) \mathrm{d}\tau$

利用连续叉乘公式：
$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= \int \vec{B}(\vec{r}) \times [\vec{m} \times \nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_m)] \mathrm{d}\tau \\
&= \int \left\{ \vec{m}\, [\vec{B} \cdot \nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_m)] - (\vec{B} \cdot \vec{m}) \nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_m) \right\} \mathrm{d}\tau \\
&= \vec{m} \int \vec{B} \cdot \nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_m)\, \mathrm{d}\tau - \int (\vec{B} \cdot \vec{m}) \nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_m) \mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

利用：
$$
\begin{aligned}
&\int f(\vec{r}) \nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_m)\, \mathrm{d}\tau = -\Big[\nabla f(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=\vec{r}_m} \\
&\int \vec{g}(\vec{r}) \cdot \nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_m)\, \mathrm{d}\tau = -\Big[\nabla \cdot \vec{g}(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=\vec{r}_m} \\
&\int \vec{g}(\vec{r}) \times \nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_m)\, \mathrm{d}\tau = \Big[\nabla \times \vec{g}(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=\vec{r}_m}
\end{aligned}
$$

附：利用磁偶极子的电流密度推导受力公式：

磁偶极子的电流密度：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)$

力：$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})\mathrm{d}\tau = -\int [\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)] \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})\mathrm{d}\tau$

利用连续叉乘公式：

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{F}} &= \int \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \times [\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)]\mathrm{d}\tau \\ &= \int \left\{\vec{\boldsymbol{m}}\,[\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)] - (\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}})\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)\right\}\mathrm{d}\tau \\ &= \vec{\boldsymbol{m}} \int \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)\,\mathrm{d}\tau - \int (\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}})\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

利用：

$$\int f(\vec{\boldsymbol{r}})\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)\,\mathrm{d}\tau = -\Big[\nabla f(\vec{\boldsymbol{r}})\Big]_{\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_m}$$

$$\int \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)\,\mathrm{d}\tau = -\Big[\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\Big]_{\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_m}$$

$$\int \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)\,\mathrm{d}\tau = \Big[\nabla \times \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\Big]_{\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_m}$$

$$= -\vec{\boldsymbol{m}}\,(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}}) + \nabla(\vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}})$$

附：利用磁偶极子的电流密度推导受力公式：

磁偶极子的电流密度：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)$

力：$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \mathrm{d}\tau = -\int [\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)] \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \mathrm{d}\tau$

利用连续叉乘公式：
$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{F}} &= \int \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \times [\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)] \mathrm{d}\tau \\ &= \int \left\{\vec{\boldsymbol{m}}\, [\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)] - (\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}}) \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)\right\} \mathrm{d}\tau \\ &= \vec{\boldsymbol{m}} \int \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)\, \mathrm{d}\tau - \int (\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}}) \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m) \mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

利用：
$$\int f(\vec{\boldsymbol{r}}) \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)\, \mathrm{d}\tau = -\Big[\nabla f(\vec{\boldsymbol{r}})\Big]_{\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_m}$$
$$\int \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)\, \mathrm{d}\tau = -\Big[\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\Big]_{\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_m}$$
$$\int \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)\, \mathrm{d}\tau = \Big[\nabla \times \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\Big]_{\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_m}$$

$$= -\vec{\boldsymbol{m}}\, (\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}}) + \nabla(\vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}) \qquad \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$$

附：利用磁偶极子的电流密度推导受力公式：

磁偶极子的电流密度：$\vec{j}(\vec{r}) = -\vec{m} \times \nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}_m)$

力：$\vec{F} = \int \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})\mathrm{d}\tau = -\int [\vec{m} \times \nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}_m)] \times \vec{B}(\vec{r})\mathrm{d}\tau$

利用连续叉乘公式：
$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int \vec{B}(\vec{r}) \times [\vec{m} \times \nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}_m)]\mathrm{d}\tau \\ &= \int \Big\{\vec{m}\,[\vec{B}\cdot\nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}_m)] - (\vec{B}\cdot\vec{m})\nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}_m)\Big\}\mathrm{d}\tau \\ &= \vec{m}\int \vec{B}\cdot\nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}_m)\,\mathrm{d}\tau - \int(\vec{B}\cdot\vec{m})\nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}_m)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

利用：
$$\int f(\vec{r})\nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}_m)\,\mathrm{d}\tau = -\Big[\nabla f(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=\vec{r}_m}$$
$$\int \vec{g}(\vec{r})\cdot\nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}_m)\,\mathrm{d}\tau = -\Big[\nabla\cdot\vec{g}(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=\vec{r}_m}$$
$$\int \vec{g}(\vec{r})\times\nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}_m)\,\mathrm{d}\tau = \Big[\nabla\times\vec{g}(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=\vec{r}_m}$$

$$= -\vec{m}\,(\nabla\cdot\vec{B}) + \nabla(\vec{m}\cdot\vec{B}) \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0$$

故：$\vec{F} = \nabla(\vec{m}\cdot\vec{B}) = (\nabla\vec{B})\cdot\vec{m} = \vec{m}\cdot(\nabla\vec{B})$

最后一步利用了当$\nabla\times\vec{B} = 0$ 时，$\vec{m}\cdot(\nabla\vec{B}) = (\nabla\vec{B})\cdot\vec{m}$

附：利用磁偶极子的电流密度推导力矩公式：

位于坐标原点的磁偶极子之电流密度：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})$

附：利用磁偶极子的电流密度推导力矩公式：

位于坐标原点的磁偶极子之电流密度：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})$

力矩：$\vec{\boldsymbol{L}} = \int \vec{\boldsymbol{r}} \times [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})]\mathrm{d}\tau = -\int \vec{\boldsymbol{r}} \times \left\{[\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)] \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})\right\}\mathrm{d}\tau$

附：利用磁偶极子的电流密度推导力矩公式：

位于坐标原点的磁偶极子之电流密度：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})$

力矩：$\vec{\boldsymbol{L}} = \int \vec{\boldsymbol{r}} \times [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})]\mathrm{d}\tau = -\int \vec{\boldsymbol{r}} \times \left\{[\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)] \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})\right\}\mathrm{d}\tau$

利用连续叉乘公式：

$$\vec{\boldsymbol{r}} \times \left\{[\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)] \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})\right\} = (\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}})[\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})] - \left\{\vec{\boldsymbol{r}} \cdot [\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})]\right\}\vec{\boldsymbol{B}}$$

附：利用磁偶极子的电流密度推导力矩公式：

位于坐标原点的磁偶极子之电流密度：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})$

力矩：$\vec{\boldsymbol{L}} = \displaystyle\int \vec{\boldsymbol{r}} \times [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})]\mathrm{d}\tau = -\int \vec{\boldsymbol{r}} \times \Big\{[\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)] \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})\Big\}\mathrm{d}\tau$

利用连续叉乘公式：

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{r}} \times \Big\{[\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)] \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})\Big\} &= (\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}})[\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})] - \Big\{\vec{\boldsymbol{r}} \cdot [\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})]\Big\}\vec{\boldsymbol{B}} \\ &= [(\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}})\vec{\boldsymbol{m}}] \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}) - [(\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{m}}) \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})]\,\vec{\boldsymbol{B}}\end{aligned}$$

附：利用磁偶极子的电流密度推导力矩公式：

位于坐标原点的磁偶极子之电流密度：$\vec{j}(\vec{r}) = -\vec{m} \times \nabla\delta(\vec{r})$

力矩：$\vec{L} = \int \vec{r} \times [\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})]\mathrm{d}\tau = -\int \vec{r} \times \Big\{ [\vec{m} \times \nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_m)] \times \vec{B}(\vec{r}) \Big\} \mathrm{d}\tau$

利用连续叉乘公式：

$$\begin{aligned}\vec{r} \times \Big\{ [\vec{m} \times \nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_m)] \times \vec{B}(\vec{r}) \Big\} &= (\vec{r} \cdot \vec{B})[\vec{m} \times \nabla\delta(\vec{r})] - \Big\{ \vec{r} \cdot [\vec{m} \times \nabla\delta(\vec{r})] \Big\} \vec{B} \\ &= [(\vec{r} \cdot \vec{B})\vec{m}] \times \nabla\delta(\vec{r}) - [(\vec{r} \times \vec{m}) \cdot \nabla\delta(\vec{r})] \vec{B}\end{aligned}$$

$$\vec{L} = -\int \Big\{ [(\vec{r} \cdot \vec{B})\vec{m}] \times \nabla\delta(\vec{r}) - [(\vec{r} \times \vec{m}) \cdot \nabla\delta(\vec{r})]\vec{B} \Big\} \mathrm{d}\tau$$

附：利用磁偶极子的电流密度推导力矩公式：

位于坐标原点的磁偶极子之电流密度：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})$

力矩：$\vec{\boldsymbol{L}} = \int \vec{\boldsymbol{r}} \times [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})]\mathrm{d}\tau = -\int \vec{\boldsymbol{r}} \times \left\{ [\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)] \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \right\}\mathrm{d}\tau$

利用连续叉乘公式：

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{r}} \times \left\{ [\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)] \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \right\} &= (\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}})[\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})] - \left\{ \vec{\boldsymbol{r}} \cdot [\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})] \right\} \vec{\boldsymbol{B}} \\
&= [(\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}})\vec{\boldsymbol{m}}] \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}) - [(\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{m}}) \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})]\, \vec{\boldsymbol{B}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{L}} &= -\int \left\{ [(\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}})\vec{\boldsymbol{m}}] \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}) - [(\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{m}}) \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})]\vec{\boldsymbol{B}} \right\}\mathrm{d}\tau \\
&= -\int \left\{ [(\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}})\vec{\boldsymbol{m}}] \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}) - [\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})] \cdot [(\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{m}})\vec{\boldsymbol{B}}] \right\}\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

附：利用磁偶极子的电流密度推导力矩公式：

位于坐标原点的磁偶极子之电流密度：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})$

力矩：$\vec{\boldsymbol{L}} = \displaystyle\int \vec{\boldsymbol{r}} \times [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})]\mathrm{d}\tau = -\int \vec{\boldsymbol{r}} \times \Big\{[\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)] \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})\Big\}\mathrm{d}\tau$

利用连续叉乘公式：

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{r}} \times \Big\{[\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)] \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})\Big\} &= (\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}})[\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})] - \Big\{\vec{\boldsymbol{r}} \cdot [\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})]\Big\}\vec{\boldsymbol{B}} \\ &= [(\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}})\vec{\boldsymbol{m}}] \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}) - [(\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{m}}) \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})]\,\vec{\boldsymbol{B}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{L}} &= -\int \Big\{[(\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}})\vec{\boldsymbol{m}}] \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}) - [(\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{m}}) \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})]\vec{\boldsymbol{B}}\Big\}\mathrm{d}\tau \\ &= -\int \Big\{[(\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}})\vec{\boldsymbol{m}}] \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}) - [\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})] \cdot [(\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{m}})\vec{\boldsymbol{B}}]\Big\}\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

利用：$\displaystyle\int [\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)] \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = -\Big[\nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{r}})\Big]_{\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_m}$

附：利用磁偶极子的电流密度推导力矩公式：

位于坐标原点的磁偶极子之电流密度：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})$

力矩：$\vec{\boldsymbol{L}} = \displaystyle\int \vec{\boldsymbol{r}} \times [\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})]\mathrm{d}\tau = -\int \vec{\boldsymbol{r}} \times \Big\{[\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)] \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})\Big\}\mathrm{d}\tau$

利用连续叉乘公式：

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{r}} \times \Big\{[\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)] \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})\Big\} &= (\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}})[\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})] - \Big\{\vec{\boldsymbol{r}} \cdot [\vec{\boldsymbol{m}} \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})]\Big\}\,\vec{\boldsymbol{B}} \\
&= [(\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}})\vec{\boldsymbol{m}}] \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}) - [(\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{m}}) \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})]\,\vec{\boldsymbol{B}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{L}} &= -\int \Big\{[(\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}})\vec{\boldsymbol{m}}] \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}) - [(\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{m}}) \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})]\vec{\boldsymbol{B}}\Big\}\mathrm{d}\tau \\
&= -\int \Big\{[(\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}})\vec{\boldsymbol{m}}] \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}) - [\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})] \cdot [(\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{m}})\vec{\boldsymbol{B}}]\Big\}\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

利用：
$$\int [\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)] \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = -\Big[\nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{r}})\Big]_{\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_m}$$
$$\int \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \times \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_m)\,\mathrm{d}\tau = \Big[\nabla \times \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\Big]_{\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_m}$$

附：利用磁偶极子的电流密度推导力矩公式：

位于坐标原点的磁偶极子之电流密度：$\vec{j}(\vec{r}) = -\vec{m} \times \nabla\delta(\vec{r})$

力矩：$\vec{L} = \int \vec{r} \times [\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})]\mathrm{d}\tau = -\int \vec{r} \times \Big\{[\vec{m} \times \nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_m)] \times \vec{B}(\vec{r})\Big\}\mathrm{d}\tau$

利用连续叉乘公式：

$$\begin{aligned}\vec{r} \times \Big\{[\vec{m} \times \nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_m)] \times \vec{B}(\vec{r})\Big\} &= (\vec{r} \cdot \vec{B})[\vec{m} \times \nabla\delta(\vec{r})] - \Big\{\vec{r} \cdot [\vec{m} \times \nabla\delta(\vec{r})]\Big\}\,\vec{B} \\ &= [(\vec{r} \cdot \vec{B})\vec{m}] \times \nabla\delta(\vec{r}) - [(\vec{r} \times \vec{m}) \cdot \nabla\delta(\vec{r})]\,\vec{B}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{L} &= -\int \Big\{[(\vec{r} \cdot \vec{B})\vec{m}] \times \nabla\delta(\vec{r}) - [(\vec{r} \times \vec{m}) \cdot \nabla\delta(\vec{r})]\vec{B}\Big\}\mathrm{d}\tau \\ &= -\int \Big\{[(\vec{r} \cdot \vec{B})\vec{m}] \times \nabla\delta(\vec{r}) - [\nabla\delta(\vec{r})] \cdot [(\vec{r} \times \vec{m})\vec{B}]\Big\}\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

利用：
$$\int [\nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_m)] \cdot \overleftrightarrow{t}(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau = -\Big[\nabla \cdot \overleftrightarrow{t}(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=\vec{r}_m}$$
$$\int \vec{g}(\vec{r}) \times \nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_m)\,\mathrm{d}\tau = \Big[\nabla \times \vec{g}(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=\vec{r}_m}$$

$$= -\Big\{\nabla \times [(\vec{r} \cdot \vec{B})\vec{m}]\Big\}_{\vec{r}=0} - \Big\{\nabla \cdot [(\vec{r} \times \vec{m})\vec{B}]\Big\}_{\vec{r}=0}$$

附：利用磁偶极子的电流密度推导力矩公式：

位于坐标原点的磁偶极子之电流密度：$\vec{j}(\vec{r}) = -\vec{m} \times \nabla\delta(\vec{r})$

力矩：$\vec{L} = \int \vec{r} \times [\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})]\mathrm{d}\tau = -\int \vec{r} \times \Big\{[\vec{m} \times \nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_m)] \times \vec{B}(\vec{r})\Big\}\mathrm{d}\tau$

利用连续叉乘公式：

$$\vec{r} \times \Big\{[\vec{m} \times \nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_m)] \times \vec{B}(\vec{r})\Big\} = (\vec{r}\cdot\vec{B})[\vec{m} \times \nabla\delta(\vec{r})] - \Big\{\vec{r}\cdot[\vec{m} \times \nabla\delta(\vec{r})]\Big\}\vec{B}$$
$$= [(\vec{r}\cdot\vec{B})\vec{m}] \times \nabla\delta(\vec{r}) - [(\vec{r} \times \vec{m})\cdot\nabla\delta(\vec{r})]\vec{B}$$

$$\vec{L} = -\int \Big\{[(\vec{r}\cdot\vec{B})\vec{m}] \times \nabla\delta(\vec{r}) - [(\vec{r} \times \vec{m})\cdot\nabla\delta(\vec{r})]\vec{B}\Big\}\mathrm{d}\tau$$
$$= -\int \Big\{[(\vec{r}\cdot\vec{B})\vec{m}] \times \nabla\delta(\vec{r}) - [\nabla\delta(\vec{r})]\cdot[(\vec{r} \times \vec{m})\vec{B}]\Big\}\mathrm{d}\tau$$

利用：$\int [\nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_m)]\cdot\overleftrightarrow{t}(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau = -\Big[\nabla\cdot\overleftrightarrow{t}(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=\vec{r}_m}$

$\int \vec{g}(\vec{r}) \times \nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_m)\,\mathrm{d}\tau = \Big[\nabla \times \vec{g}(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=\vec{r}_m}$

$$= -\Big\{\nabla \times [(\vec{r}\cdot\vec{B})\vec{m}]\Big\}_{\vec{r}=0} - \Big\{\nabla\cdot[(\vec{r} \times \vec{m})\vec{B}]\Big\}_{\vec{r}=0}$$
$$= -[\nabla(\vec{r}\cdot\vec{B})] \times \vec{m} - [\nabla\cdot(\vec{r} \times \vec{m})]\vec{B}$$

由于最后取 $\vec{r} = 0$
故求导只需对 $\vec{r}$ 进行

附：利用磁偶极子的电流密度推导力矩公式：

位于坐标原点的磁偶极子之电流密度：$\vec{j}(\vec{r}) = -\vec{m}\times\nabla\delta(\vec{r})$

力矩：$\vec{L} = \int \vec{r}\times[\vec{j}(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{r})]\mathrm{d}\tau = -\int \vec{r}\times\Big\{[\vec{m}\times\nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}_m)]\times\vec{B}(\vec{r})\Big\}\mathrm{d}\tau$

利用连续叉乘公式：

$$\begin{aligned}\vec{r}\times\Big\{[\vec{m}\times\nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}_m)]\times\vec{B}(\vec{r})\Big\} &= (\vec{r}\cdot\vec{B})[\vec{m}\times\nabla\delta(\vec{r})] - \Big\{\vec{r}\cdot[\vec{m}\times\nabla\delta(\vec{r})]\Big\}\vec{B}\\ &= [(\vec{r}\cdot\vec{B})\vec{m}]\times\nabla\delta(\vec{r}) - [(\vec{r}\times\vec{m})\cdot\nabla\delta(\vec{r})]\,\vec{B}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{L} &= -\int\Big\{[(\vec{r}\cdot\vec{B})\vec{m}]\times\nabla\delta(\vec{r}) - [(\vec{r}\times\vec{m})\cdot\nabla\delta(\vec{r})]\vec{B}\Big\}\mathrm{d}\tau\\ &= -\int\Big\{[(\vec{r}\cdot\vec{B})\vec{m}]\times\nabla\delta(\vec{r}) - [\nabla\delta(\vec{r})]\cdot[(\vec{r}\times\vec{m})\vec{B}]\Big\}\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

利用：
$$\int[\nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}_m)]\cdot\overleftrightarrow{t}(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau = -\Big[\nabla\cdot\overleftrightarrow{t}(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=\vec{r}_m}$$
$$\int\vec{g}(\vec{r})\times\nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}_m)\,\mathrm{d}\tau = \Big[\nabla\times\vec{g}(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=\vec{r}_m}$$

$$\begin{aligned}&= -\Big\{\nabla\times[(\vec{r}\cdot\vec{B})\vec{m}]\Big\}_{\vec{r}=0} - \Big\{\nabla\cdot[(\vec{r}\times\vec{m})\vec{B}]\Big\}_{\vec{r}=0}\\ &= -[\nabla(\vec{r}\cdot\vec{B})]\times\vec{m} - [\nabla\cdot(\vec{r}\times\vec{m})]\vec{B}\\ &= -\vec{B}\times\vec{m} \quad\Longrightarrow\quad \vec{L} = \vec{m}\times\vec{B}\end{aligned}$$

由于最后取 $\vec{r}=0$
故求导只需对 $\vec{r}$ 进行

磁偶极子与电偶极子之比较：

类比 $\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{m}} \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) \iff \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{E}}_e(0)$

$\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{m}} \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) \iff \vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{p}} \times \vec{\boldsymbol{E}}_e(0)$

差异 $W_{\mathsf{int}} = +\vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) \iff W_{\mathsf{int}} = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}_e(0)$

磁偶极子与电偶极子之比较：

类比 $\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{m}} \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) \iff \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{E}}_e(0)$

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{m}} \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) \iff \vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{p}} \times \vec{\boldsymbol{E}}_e(0)$$

差异 $W_{\text{int}} = +\vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) \iff W_{\text{int}} = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}_e(0)$

相互作用能表达式不同，但力、力矩表达式相同，为什么？

磁偶极子与电偶极子之比较：

类比 $\vec{F} = \vec{m} \cdot \nabla \vec{B}_e(0) \iff \vec{F} = \vec{p} \cdot \nabla \vec{E}_e(0)$

$\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B}_e(0) \iff \vec{L} = \vec{p} \times \vec{E}_e(0)$

差异 $W_{\text{int}} = +\vec{m} \cdot \vec{B}_e(0) \iff W_{\text{int}} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_e(0)$

相互作用能表达式不同，但力、力矩表达式相同，为什么？

物理图象

磁偶极子与电偶极子之比较：

$$\text{类比}\quad \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{m}} \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{E}}_e(0)$$

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{m}} \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{p}} \times \vec{\boldsymbol{E}}_e(0)$$

$$\text{差异}\quad W_{\mathrm{int}} = +\vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) \quad \Longleftrightarrow \quad W_{\mathrm{int}} = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}_e(0)$$

相互作用能表达式不同，但力、力矩表达式相同，为什么？

物理图象

电偶极子由电荷构成，保持电偶极子在移动时其内部电荷分布不变不需外界做功：$\delta W_0 = 0$

磁偶极子与电偶极子之比较：

类比 $\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{m}} \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) \iff \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{E}}_e(0)$

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{m}} \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) \iff \vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{p}} \times \vec{\boldsymbol{E}}_e(0)$$

差异 $W_{\text{int}} = +\vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) \iff W_{\text{int}} = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}_e(0)$

相互作用能表达式不同，但力、力矩表达式相同，为什么？

物理图象

电偶极子由电荷构成，保持电偶极子在移动时其内部电荷分布不变不需外界做功：$\delta W_0 = 0$

又由于电偶极子很小，其移动不改变外场的电荷分布。既然电偶和外场的电荷分布都不变，

磁偶极子与电偶极子之比较：

类比 $\vec{F} = \vec{m} \cdot \nabla \vec{B}_e(0) \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{F} = \vec{p} \cdot \nabla \vec{E}_e(0)$

$\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B}_e(0) \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{L} = \vec{p} \times \vec{E}_e(0)$

差异 $W_{\text{int}} = +\vec{m} \cdot \vec{B}_e(0) \quad \Longleftrightarrow \quad W_{\text{int}} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_e(0)$

相互作用能表达式不同，但力、力矩表达式相同，为什么?

物理图象

电偶极子由电荷构成，保持电偶极子在移动时其内部电荷分布不变不需外界做功：$\delta W_0 = 0$
又由于电偶极子很小，其移动不改变外场的电荷分布。既然电偶和外场的电荷分布都不变，
移动电偶极子（改变其广义坐标 θ_k ）就不会改变电偶极子和外场的自能

磁偶极子与电偶极子之比较：

类比 $\vec{F} = \vec{m}\cdot\nabla\vec{B}_e(0) \iff \vec{F} = \vec{p}\cdot\nabla\vec{E}_e(0)$

$\vec{L} = \vec{m}\times\vec{B}_e(0) \iff \vec{L} = \vec{p}\times\vec{E}_e(0)$

差异 $W_{\text{int}} = +\vec{m}\cdot\vec{B}_e(0) \iff W_{\text{int}} = -\vec{p}\cdot\vec{E}_e(0)$

相互作用能表达式不同，但力、力矩表达式相同，为什么？

物理图象

电偶极子由电荷构成，保持电偶极子在移动时其内部电荷分布不变不需外界做功：$\delta W_0 = 0$

又由于电偶极子很小，其移动不改变外场的电荷分布。既然电偶和外场的电荷分布都不变，

移动电偶极子（改变其广义坐标 θ_k ）就不会改变电偶极子和外场的自能

从而，改变电偶极子广义坐标引起的体系静电能变化等于电偶极子与外场的相互作用能之改变

磁偶极子与电偶极子之比较：

$$\text{类比}\quad \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{m}} \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) \iff \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{E}}_e(0)$$

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{m}} \times \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) \iff \vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{p}} \times \vec{\boldsymbol{E}}_e(0)$$

$$\text{差异}\quad W_{\text{int}} = +\vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) \iff W_{\text{int}} = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}_e(0)$$

相互作用能表达式不同，但力、力矩表达式相同，为什么？

物理图象

电偶极子由电荷构成，保持电偶极子在移动时其内部电荷分布不变不需外界做功：$\delta W_0 = 0$

又由于电偶极子很小，其移动不改变外场的电荷分布。既然电偶和外场的电荷分布都不变，

移动电偶极子（改变其广义坐标 θ_k ）就不会改变电偶极子和外场的自能

从而，改变电偶极子广义坐标引起的体系静电能变化等于电偶极子与外场的相互作用能之改变

即：$\delta W_e = \delta W_{\text{int}}$ $\qquad (a)$ $\qquad$ 又由于外界不做功：$\delta A + \delta W_e = \delta W_0 = 0$ $\qquad (b)$

磁偶极子与电偶极子之比较：

$$\text{类比}\quad \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{m}}\cdot\nabla\vec{\boldsymbol{B}}_e(0) \quad\Longleftrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\vec{\boldsymbol{E}}_e(0)$$

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{m}}\times\vec{\boldsymbol{B}}_e(0) \quad\Longleftrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{p}}\times\vec{\boldsymbol{E}}_e(0)$$

$$\text{差异}\quad W_{\text{int}} = +\vec{\boldsymbol{m}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}}_e(0) \quad\Longleftrightarrow\quad W_{\text{int}} = -\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_e(0)$$

相互作用能表达式不同，但力、力矩表达式相同，为什么？

物理图象

电偶极子由电荷构成，保持电偶极子在移动时其内部电荷分布不变不需外界做功：$\delta W_0 = 0$

又由于电偶极子很小，其移动不改变外场的电荷分布。既然电偶和外场的电荷分布都不变，

移动电偶极子（改变其广义坐标 θ_k ）就不会改变电偶极子和外场的自能

从而，改变电偶极子广义坐标引起的体系静电能变化等于电偶极子与外场的相互作用能之改变

即：$\delta W_e = \delta W_{\text{int}} \qquad (a)$ 　　又由于外界不做功：$\delta A + \delta W_e = \delta W_0 = 0 \qquad (b)$

由 (a) 和 (b) 两式：$\delta A = -\delta W_e = -\delta W_{\text{int}}$

磁偶极子与电偶极子之比较：

类比 $\vec{F} = \vec{m}\cdot\nabla\vec{B}_e(0) \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{F} = \vec{p}\cdot\nabla\vec{E}_e(0)$

$$\vec{L} = \vec{m}\times\vec{B}_e(0) \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{L} = \vec{p}\times\vec{E}_e(0)$$

差异 $W_{\text{int}} = +\vec{m}\cdot\vec{B}_e(0) \quad \Longleftrightarrow \quad W_{\text{int}} = -\vec{p}\cdot\vec{E}_e(0)$

相互作用能表达式不同，但力、力矩表达式相同，为什么？

物理图象

电偶极子由电荷构成，保持电偶极子在移动时其内部电荷分布不变不需外界做功：$\delta W_0 = 0$

又由于电偶极子很小，其移动不改变外场的电荷分布。既然电偶和外场的电荷分布都不变，

移动电偶极子（改变其广义坐标 θ_k ）就不会改变电偶极子和外场的自能

从而，改变电偶极子广义坐标引起的体系静电能变化等于电偶极子与外场的相互作用能之改变

即：$\delta W_e = \delta W_{\text{int}} \qquad (a) \qquad$ 又由于外界不做功：$\delta A + \delta W_e = \delta W_0 = 0 \qquad (b)$

由 (a) 和 (b) 两式：$\delta A = -\delta W_e = -\delta W_{\text{int}} \quad \Longrightarrow \quad \delta A = \sum_k F_k\,\delta\,\theta_k = -\delta W_{\text{int}}$

磁偶极子与电偶极子之比较：

类比 $\vec{F} = \vec{m} \cdot \nabla \vec{B}_e(0) \iff \vec{F} = \vec{p} \cdot \nabla \vec{E}_e(0)$

$\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B}_e(0) \iff \vec{L} = \vec{p} \times \vec{E}_e(0)$

差异 $W_{\text{int}} = +\vec{m} \cdot \vec{B}_e(0) \iff W_{\text{int}} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_e(0)$

相互作用能表达式不同，但力、力矩表达式相同，为什么？

物理图象

电偶极子由电荷构成，保持电偶极子在移动时其内部电荷分布不变不需外界做功：$\delta W_0 = 0$

又由于电偶极子很小，其移动不改变外场的电荷分布。既然电偶和外场的电荷分布都不变，

移动电偶极子（改变其广义坐标 θ_k ）就不会改变电偶极子和外场的自能

从而，改变电偶极子广义坐标引起的体系静电能变化等于电偶极子与外场的相互作用能之改变

即：$\delta W_e = \delta W_{\text{int}}$ (a) 又由于外界不做功：$\delta A + \delta W_e = \delta W_0 = 0$ (b)

由 (a) 和 (b) 两式：$\delta A = -\delta W_e = -\delta W_{\text{int}} \implies \delta A = \sum_k F_k \,\delta\, \theta_k = -\delta W_{\text{int}}$

广义力 $F_k = -\dfrac{\delta W_{\text{int}}}{\delta\, \theta_k} \implies \vec{F} = -\nabla \underbrace{\left(-\vec{p} \cdot \vec{E}_e\right)}_{W_{\text{int}}} = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E}_e) = \vec{p} \cdot \nabla \vec{E}_e$

对磁偶极子 $W_{\text{int}} = +\vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)$

对磁偶极子 $$W_{\text{int}} = +\vec{m}\cdot\vec{B}_e(0)$$

由于没有磁荷，磁偶极子由小闭合电流回路构成，移动时，通过该闭合回路的磁通量一定改变

Let there be light

对磁偶极子 $$W_{\text{int}} = +\vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)$$

由于没有磁荷，磁偶极子由小闭合电流回路构成，移动时，通过该闭合回路的磁通量一定改变

回路有感生或动生电动势，为保持回路电流不变外界必须做功 δW_0：$\delta A + \delta W_m = \delta W_0 \neq 0$

Let there be light

对磁偶极子 $$W_{\text{int}} = +\vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)$$

由于没有磁荷，磁偶极子由小闭合电流回路构成，移动时，通过该闭合回路的磁通量一定改变

回路有感生或动生电动势，为保持回路电流不变外界必须做功 δW_0：$\delta A + \delta W_m = \delta W_0 \neq 0$

这点与静电问题中保持导体电势不变类似

对磁偶极子 $$W_{\rm int} = +\vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)$$

由于没有磁荷，磁偶极子由小闭合电流回路构成，移动时，通过该闭合回路的磁通量一定改变

回路有感生或动生电动势，为保持回路电流不变外界必须做功 δW_0：$\delta A + \delta W_m = \delta W_0 \neq 0$

这点与静电问题中保持导体电势不变类似

保持各回路电流不变，静磁能的改变：$\delta W_m = \delta[\frac{1}{2}\sum_i I_i \Phi_i] = \frac{1}{2}\sum_i I_i \delta\Phi_i \qquad (c)$

对磁偶极子 $$W_{\text{int}} = +\vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)$$

由于没有磁荷，磁偶极子由小闭合电流回路构成，移动时，通过该闭合回路的磁通量一定改变

回路有感生或动生电动势，为保持回路电流不变外界必须做功 δW_0：$\delta A + \delta W_m = \delta W_0 \neq 0$

这点与静电问题中保持导体电势不变类似

保持各回路电流不变，静磁能的改变：$$\delta W_m = \delta[\frac{1}{2}\sum_i I_i \Phi_i] = \frac{1}{2}\sum_i I_i \delta\Phi_i \qquad (c)$$

各回路均有电阻，因此：$$\delta W_0 = \sum_i \mathcal{E}_i I_i \delta t - \sum_i I_i^2 R_i \delta t \qquad (d)$$

对磁偶极子 $$W_{\text{int}} = +\vec{m} \cdot \vec{B}_e(0)$$

由于没有磁荷，磁偶极子由小闭合电流回路构成，移动时，通过该闭合回路的磁通量一定改变

回路有感生或动生电动势，为保持回路电流不变外界必须做功 δW_0：$\delta A + \delta W_m = \delta W_0 \neq 0$

这点与静电问题中保持导体电势不变类似

保持各回路电流不变，静磁能的改变：$$\delta W_m = \delta[\frac{1}{2}\sum_i I_i \Phi_i] = \frac{1}{2}\sum_i I_i \delta\Phi_i \qquad (c)$$

各回路均有电阻，因此：$$\delta W_0 = \sum_i \mathcal{E}_i I_i \delta t - \sum_i I_i^2 R_i \delta t \qquad (d)$$

右边第一项为外电动势 $\mathcal{E}_i$ 提供的能量，第二项为回路电阻的焦耳热损耗

对磁偶极子 $W_{\text{int}} = +\vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)$

由于没有磁荷，磁偶极子由小闭合电流回路构成，移动时，通过该闭合回路的磁通量一定改变

回路有感生或动生电动势，为保持回路电流不变外界必须做功 δW_0：$\delta A + \delta W_m = \delta W_0 \neq 0$

这点与静电问题中保持导体电势不变类似

保持各回路电流不变，静磁能的改变：$\delta W_m = \delta[\frac{1}{2}\sum_i I_i\Phi_i] = \frac{1}{2}\sum_i I_i\delta\Phi_i$ $\quad (c)$

各回路均有电阻，因此：$\delta W_0 = \sum_i \mathcal{E}_i I_i \delta t - \sum_i I_i^2 R_i \delta t$ $\quad (d)$

右边第一项为外电动势 $\mathcal{E}_i$ 提供的能量，第二项为回路电阻的焦耳热损耗

但对回路 i，有：$\mathcal{E}_i = \dfrac{\delta\Phi_i}{\delta t} + I_i R_i$

对磁偶极子 $W_{\text{int}} = +\vec{m} \cdot \vec{B}_e(0)$

由于没有磁荷，磁偶极子由小闭合电流回路构成，移动时，通过该闭合回路的磁通量一定改变

回路有感生或动生电动势，为保持回路电流不变外界必须做功 δW_0：$\delta A + \delta W_m = \delta W_0 \neq 0$

这点与静电问题中保持导体电势不变类似

保持各回路电流不变，静磁能的改变：$\delta W_m = \delta[\frac{1}{2}\sum_i I_i\Phi_i] = \frac{1}{2}\sum_i I_i\delta\Phi_i$ (c)

各回路均有电阻，因此：$\delta W_0 = \sum_i \mathcal{E}_i I_i\delta t - \sum_i I_i^2 R_i\delta t$ (d)

右边第一项为外电动势 $\mathcal{E}_i$ 提供的能量，第二项为回路电阻的焦耳热损耗

但对回路 i，有：$\mathcal{E}_i = \dfrac{\delta\Phi_i}{\delta t} + I_iR_i$ (思考：右边第一项为何取正号)

对磁偶极子 $W_{\text{int}} = +\vec{m}\cdot\vec{B}_e(0)$

由于没有磁荷，磁偶极子由小闭合电流回路构成，移动时，通过该闭合回路的磁通量一定改变

回路有感生或动生电动势，为保持回路电流不变外界必须做功 δW_0：$\delta A + \delta W_m = \delta W_0 \neq 0$

这点与静电问题中保持导体电势不变类似

保持各回路电流不变，静磁能的改变：$\delta W_m = \delta[\frac{1}{2}\sum_i I_i\Phi_i] = \frac{1}{2}\sum_i I_i\delta\Phi_i$ $\quad (c)$

各回路均有电阻，因此：$\delta W_0 = \sum_i \mathcal{E}_i I_i\delta t - \sum_i I_i^2 R_i\delta t$ $\quad (d)$

右边第一项为外电动势 $\mathcal{E}_i$ 提供的能量，第二项为回路电阻的焦耳热损耗

但对回路 i，有：$\mathcal{E}_i = \dfrac{\delta\Phi_i}{\delta t} + I_iR_i$ (思考：右边第一项为何取正号)

故由 (c) 和 (d) 两式：$\delta W_0 = \sum_i \underbrace{\left[\dfrac{\delta\Phi_i}{\delta t} + I_iR_i\right]}_{\mathcal{E}_i} I_i\delta t - \sum_i I_i^2R_i\delta t = \sum_i I_i\,\delta\Phi_i = 2\,\delta W_m$

对磁偶极子 $W_{\text{int}} = +\vec{m}\cdot\vec{B}_e(0)$

由于没有磁荷，磁偶极子由小闭合电流回路构成，移动时，通过该闭合回路的磁通量一定改变

回路有感生或动生电动势，为保持回路电流不变外界必须做功 δW_0：$\delta A + \delta W_m = \delta W_0 \neq 0$

这点与静电问题中保持导体电势不变类似

保持各回路电流不变，静磁能的改变：$\delta W_m = \delta[\frac{1}{2}\sum_i I_i\Phi_i] = \frac{1}{2}\sum_i I_i\delta\Phi_i$ $\qquad(c)$

各回路均有电阻，因此：$\delta W_0 = \sum_i \mathcal{E}_i I_i\delta t - \sum_i I_i^2 R_i\delta t$ $\qquad(d)$

右边第一项为外电动势 $\mathcal{E}_i$ 提供的能量，第二项为回路电阻的焦耳热损耗

但对回路 i，有：$\mathcal{E}_i = \dfrac{\delta\Phi_i}{\delta t} + I_iR_i$ (思考：右边第一项为何取正号)

故由 (c) 和 (d) 两式：$\delta W_0 = \sum_i \underbrace{\left[\dfrac{\delta\Phi_i}{\delta t} + I_iR_i\right]}_{\mathcal{E}_i} I_i\delta t - \sum_i I_i^2R_i\delta t = \sum_i I_i\,\delta\Phi_i = 2\,\delta W_m$

$\delta A = \delta W_0 - \delta W_m = +\,\delta W_m$

对磁偶极子 $W_{\text{int}} = +\vec{m} \cdot \vec{B}_e(0)$

由于没有磁荷，磁偶极子由小闭合电流回路构成，移动时，通过该闭合回路的磁通量一定改变

回路有感生或动生电动势，为保持回路电流不变外界必须做功 δW_0：$\delta A + \delta W_m = \delta W_0 \neq 0$

这点与静电问题中保持导体电势不变类似

保持各回路电流不变，静磁能的改变：$\delta W_m = \delta[\frac{1}{2}\sum_i I_i \Phi_i] = \frac{1}{2}\sum_i I_i \delta\Phi_i$ $\quad(c)$

各回路均有电阻，因此：$\delta W_0 = \sum_i \mathcal{E}_i I_i \delta t - \sum_i I_i^2 R_i \delta t$ $\quad(d)$

右边第一项为外电动势 $\mathcal{E}_i$ 提供的能量，第二项为回路电阻的焦耳热损耗

但对回路 i，有：$\mathcal{E}_i = \dfrac{\delta\Phi_i}{\delta t} + I_i R_i$ (思考：右边第一项为何取正号)

故由 (c) 和 (d) 两式：$\delta W_0 = \sum_i \underbrace{\left[\dfrac{\delta\Phi_i}{\delta t} + I_i R_i\right]}_{\mathcal{E}_i} I_i \delta t - \sum_i I_i^2 R_i \delta t = \sum_i I_i\, \delta\Phi_i = 2\,\delta W_m$

$$\delta A = \delta W_0 - \delta W_m = +\,\delta W_m \quad \Longrightarrow \quad \sum_k F_k\, \delta\,\theta_k = \delta A = +\,\delta W_m \quad \Longrightarrow \quad \vec{F} = \nabla W_m$$

对磁偶极子 $W_{\text{int}} = +\vec{m}\cdot\vec{B}_e(0)$

由于没有磁荷，磁偶极子由小闭合电流回路构成，移动时，通过该闭合回路的磁通量一定改变

回路有感生或动生电动势，为保持回路电流不变外界必须做功 δW_0：$\delta A + \delta W_m = \delta W_0 \neq 0$

这点与静电问题中保持导体电势不变类似

保持各回路电流不变，静磁能的改变：$\delta W_m = \delta[\frac{1}{2}\sum_i I_i\Phi_i] = \frac{1}{2}\sum_i I_i\delta\Phi_i \qquad (c)$

各回路均有电阻，因此：$\delta W_0 = \sum_i \mathcal{E}_i I_i\delta t - \sum_i I_i^2 R_i\delta t \qquad (d)$

右边第一项为外电动势 $\mathcal{E}_i$ 提供的能量，第二项为回路电阻的焦耳热损耗

但对回路 i，有：$\mathcal{E}_i = \dfrac{\delta\Phi_i}{\delta t} + I_iR_i$ (思考：右边第一项为何取正号)

故由 (c) 和 (d) 两式：$\delta W_0 = \sum_i \underbrace{\left[\dfrac{\delta\Phi_i}{\delta t} + I_iR_i\right]}_{\mathcal{E}_i} I_i\delta t - \sum_i I_i^2 R_i\delta t = \sum_i I_i\,\delta\Phi_i = 2\,\delta W_m$

$$\delta A = \delta W_0 - \delta W_m = +\,\delta W_m \quad\Longrightarrow\quad \sum_k F_k\,\delta\,\theta_k = \delta A = +\,\delta W_m \quad\Longrightarrow\quad \vec{F} = \nabla W_m$$

因为各回路电流分布不变，从而各回路的自能不变

对磁偶极子 $W_{\text{int}} = +\vec{m} \cdot \vec{B}_e(0)$

由于没有磁荷，磁偶极子由小闭合电流回路构成，移动时，通过该闭合回路的磁通量一定改变

回路有感生或动生电动势，为保持回路电流不变外界必须做功 δW_0：$\delta A + \delta W_m = \delta W_0 \neq 0$

这点与静电问题中保持导体电势不变类似

保持各回路电流不变，静磁能的改变：$\delta W_m = \delta[\frac{1}{2}\sum_i I_i\Phi_i] = \frac{1}{2}\sum_i I_i\delta\Phi_i$ $\quad (c)$

各回路均有电阻，因此：$\delta W_0 = \sum_i \mathcal{E}_i I_i \delta t - \sum_i I_i^2 R_i \delta t$ $\quad (d)$

右边第一项为外电动势 $\mathcal{E}_i$ 提供的能量，第二项为回路电阻的焦耳热损耗

但对回路 i，有：$\mathcal{E}_i = \dfrac{\delta\Phi_i}{\delta t} + I_i R_i$ (思考：右边第一项为何取正号)

故由 (c) 和 (d) 两式：$\delta W_0 = \sum_i \underbrace{\left[\dfrac{\delta\Phi_i}{\delta t} + I_i R_i\right]}_{\mathcal{E}_i} I_i\delta t - \sum_i I_i^2 R_i \delta t = \sum_i I_i\,\delta\Phi_i = 2\,\delta W_m$

$$\delta A = \delta W_0 - \delta W_m = +\,\delta W_m \quad \Longrightarrow \quad \sum_k F_k\,\delta\,\theta_k = \delta A = +\,\delta W_m \quad \Longrightarrow \quad \vec{F} = \nabla W_m$$

因为各回路电流分布不变，从而各回路的自能不变 $\Longrightarrow$ $\delta W_m = \delta W_{\text{int}}$ $\quad (\nabla W_m = \nabla W_{\text{int}})$

对磁偶极子 $W_{\text{int}} = +\vec{m}\cdot\vec{B}_e(0)$

由于没有磁荷，磁偶极子由小闭合电流回路构成，移动时，通过该闭合回路的磁通量一定改变

回路有感生或动生电动势，为保持回路电流不变外界必须做功 δW_0：$\delta A + \delta W_m = \delta W_0 \neq 0$

这点与静电问题中保持导体电势不变类似

保持各回路电流不变，静磁能的改变：$\delta W_m = \delta[\frac{1}{2}\sum_i I_i\Phi_i] = \frac{1}{2}\sum_i I_i\delta\Phi_i$ $\quad (c)$

各回路均有电阻，因此：$\delta W_0 = \sum_i \mathcal{E}_i I_i \delta t - \sum_i I_i^2 R_i \delta t$ $\quad (d)$

右边第一项为外电动势 $\mathcal{E}_i$ 提供的能量，第二项为回路电阻的焦耳热损耗

但对回路 i，有：$\mathcal{E}_i = \dfrac{\delta\Phi_i}{\delta t} + I_i R_i$ (思考：右边第一项为何取正号)

故由 (c) 和 (d) 两式：

$$\delta W_0 = \sum_i \underbrace{\left[\frac{\delta\Phi_i}{\delta t} + I_i R_i\right]}_{\mathcal{E}_i} I_i\delta t - \sum_i I_i^2 R_i \delta t = \sum_i I_i\,\delta\Phi_i = 2\,\delta W_m$$

$$\delta A = \delta W_0 - \delta W_m = +\,\delta W_m \quad\Longrightarrow\quad \sum_k F_k\,\delta\,\theta_k = \delta A = +\,\delta W_m \quad\Longrightarrow\quad \vec{F} = \nabla W_m$$

因为各回路电流分布不变，从而各回路的自能不变 $\Longrightarrow \quad \delta W_m = \delta W_{\text{int}} \quad (\nabla W_m = \nabla W_{\text{int}})$

$$\Longrightarrow \quad \vec{F} = \nabla W_m = \nabla W_{\text{int}} = +\nabla(\vec{m}\cdot\vec{B}_e) = \vec{m}\cdot\nabla\vec{B}_e$$

由上分析可见，保持体系各电流分布不变时，小回路的受力由 $\vec{F} = +\nabla W_{\text{int}}$ 给出。

由上分析可见，保持体系各电流分布不变时，小回路的受力由 $\vec{F} = +\nabla W_{\text{int}}$ 给出。

也即，如果认为偶极子是刚性的，外场也是刚性的，那么磁偶极子的受力 $\vec{F} = +\nabla W_{\text{int}}$

由上分析可见，保持体系各电流分布不变时，小回路的受力由 $\vec{\boldsymbol{F}} = +\nabla W_{\text{int}}$ 给出。

也即，如果认为偶极子是刚性的，外场也是刚性的，那么磁偶极子的受力 $\vec{\boldsymbol{F}} = +\nabla W_{\text{int}}$

这意味着对磁力体系在相互作用能达到**极大**时达到力的稳定平衡。

由上分析可见，保持体系各电流分布不变时，小回路的受力由 $\vec{\boldsymbol{F}} = +\nabla W_{\rm int}$ 给出。

也即，如果认为偶极子是刚性的，外场也是刚性的，那么磁偶极子的受力 $\vec{\boldsymbol{F}} = +\nabla W_{\rm int}$

这意味着对磁力体系在相互作用能达到**极大**时达到力的稳定平衡。 (why?)

由上分析可见，保持体系各电流分布不变时，小回路的受力由 $\vec{F} = +\nabla W_{\text{int}}$ 给出。

也即，如果认为偶极子是刚性的，外场也是刚性的，那么磁偶极子的受力 $\vec{F} = +\nabla W_{\text{int}}$

这意味着对磁力体系在相互作用能达到**极大**时达到力的稳定平衡。 (why?)

稳定平衡：$\vec{F} = 0,\ \nabla\cdot\vec{F} < 0$

由上分析可见，保持体系各电流分布不变时，小回路的受力由 $\vec{\boldsymbol{F}} = +\nabla W_{\text{int}}$ 给出。

也即，如果认为偶极子是刚性的，外场也是刚性的，那么磁偶极子的受力 $\vec{\boldsymbol{F}} = +\nabla W_{\text{int}}$

这意味着对磁力体系在相互作用能达到**极大**时达到力的稳定平衡。 (why?)

$$\text{稳定平衡：}\vec{\boldsymbol{F}} = 0,\ \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}} < 0 \quad\Longrightarrow\quad \nabla W = 0,\ \nabla^2 W < 0$$

由上分析可见，保持体系各电流分布不变时，小回路的受力由 $\vec{\boldsymbol{F}} = +\nabla W_{\text{int}}$ 给出。

也即，如果认为偶极子是刚性的，外场也是刚性的，那么磁偶极子的受力 $\vec{\boldsymbol{F}} = +\nabla W_{\text{int}}$

这意味着对磁力体系在相互作用能达到**极大**时达到力的稳定平衡。 (why?)

$$\text{稳定平衡：} \vec{\boldsymbol{F}} = 0,\ \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla W = 0,\ \nabla^2 W < 0 \quad \Longrightarrow \quad W \text{ 极大}$$

Let there be light

由上分析可见，保持体系各电流分布不变时，小回路的受力由 $\vec{F}=+\nabla W_{\text{int}}$ 给出。

也即，如果认为偶极子是刚性的，外场也是刚性的，那么磁偶极子的受力 $\vec{F}=+\nabla W_{\text{int}}$

这意味着对磁力体系在相互作用能达到**极大**时达到力的稳定平衡。 (why?)

$$\text{稳定平衡：}\vec{F}=0,\ \nabla\cdot\vec{F}<0 \quad\Longrightarrow\quad \nabla W=0,\ \nabla^2 W<0 \quad\Longrightarrow\quad W\ \text{极大}$$

而对于如静电力，重力体系，总是相互作用能达到**极小**时体系达到力稳定平衡。

由上分析可见，保持体系各电流分布不变时，小回路的受力由 $\vec{F} = +\nabla W_{\text{int}}$ 给出。

也即，如果认为偶极子是刚性的，外场也是刚性的，那么磁偶极子的受力 $\vec{F} = +\nabla W_{\text{int}}$

这意味着对磁力体系在相互作用能达到**极大**时达到力的稳定平衡。 (why?)

$$\text{稳定平衡：}\vec{F} = 0,\ \nabla\cdot\vec{F} < 0 \quad\Longrightarrow\quad \nabla W = 0,\ \nabla^2 W < 0 \quad\Longrightarrow\quad W\ \text{极大}$$

而对于如静电力，重力体系，总是相互作用能达到**极小**时体系达到力稳定平衡。

如果某物理体系既包含磁力也包含如静电力，达到力平衡时，相互作用能应是极大还是极小呢？

由上分析可见，保持体系各电流分布不变时，小回路的受力由 $\vec{F} = +\nabla W_{\text{int}}$ 给出。

也即，如果认为偶极子是刚性的，外场也是刚性的，那么磁偶极子的受力 $\vec{F} = +\nabla W_{\text{int}}$

这意味着对磁力体系在相互作用能达到**极大**时达到力的稳定平衡。　　(why?)

$$\text{稳定平衡：} \vec{F} = 0,\ \nabla \cdot \vec{F} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla W = 0,\ \nabla^2 W < 0 \quad \Longrightarrow \quad W \text{ 极大}$$

而对于如静电力，重力体系，总是相互作用能达到**极小**时体系达到力稳定平衡。

如果某物理体系既包含磁力也包含如静电力，达到力平衡时，相互作用能应是极大还是极小呢？

如果磁力体系应用相互作用能，就给分析带来一定的困难，因此人们引进所谓有效势能。

由上分析可见，保持体系各电流分布不变时，小回路的受力由 $\vec{\boldsymbol{F}} = +\nabla W_{\text{int}}$ 给出。

也即，如果认为偶极子是刚性的，外场也是刚性的，那么磁偶极子的受力 $\vec{\boldsymbol{F}} = +\nabla W_{\text{int}}$

这意味着对磁力体系在相互作用能达到**极大**时达到力的稳定平衡。　(why?)

$$\text{稳定平衡：}\vec{\boldsymbol{F}} = 0,\ \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}} < 0 \quad\Longrightarrow\quad \nabla W = 0,\ \nabla^2 W < 0 \quad\Longrightarrow\quad W\ \text{极大}$$

而对于如静电力，重力体系，总是相互作用能达到**极小**时体系达到力稳定平衡。

如果某物理体系既包含磁力也包含如静电力，达到力平衡时，相互作用能应是极大还是极小呢？

如果磁力体系应用相互作用能，就给分析带来一定的困难，因此人们引进所谓有效势能。

有效势能 U： 通常把作用于磁偶极子的广义力 F_k 做的功写成如下形式：

由上分析可见，保持体系各电流分布不变时，小回路的受力由 $\vec{\boldsymbol{F}} = +\nabla W_{\text{int}}$ 给出。

也即，如果认为偶极子是刚性的，外场也是刚性的，那么磁偶极子的受力 $\vec{\boldsymbol{F}} = +\nabla W_{\text{int}}$

这意味着对磁力体系在相互作用能达到**极大**时达到力的稳定平衡。　　(why?)

$$\text{稳定平衡：}\vec{\boldsymbol{F}} = 0,\ \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla W = 0,\ \nabla^2 W < 0 \quad \Longrightarrow \quad W \text{ 极大}$$

而对于如静电力，重力体系，总是相互作用能达到**极小**时体系达到力稳定平衡。

如果某物理体系既包含磁力也包含如静电力，达到力平衡时，相互作用能应是极大还是极小呢？

如果磁力体系应用相互作用能，就给分析带来一定的困难，因此人们引进所谓有效势能。

有效势能 U： 通常把作用于磁偶极子的广义力 F_k 做的功写成如下形式：

$$\sum_k F_k \delta\,\theta_k = -\delta U$$

其中 U 为 有效势能，θ_k 为广义坐标，F_k 为广义力

由上分析可见，保持体系各电流分布不变时，小回路的受力由 $\vec{\boldsymbol{F}} = +\nabla W_{\text{int}}$ 给出。

也即，如果认为偶极子是刚性的，外场也是刚性的，那么磁偶极子的受力 $\vec{\boldsymbol{F}} = +\nabla W_{\text{int}}$

这意味着对磁力体系在相互作用能达到**极大**时达到力的稳定平衡。 (why?)

$$\text{稳定平衡：}\vec{\boldsymbol{F}} = 0,\ \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}} < 0 \quad\Longrightarrow\quad \nabla W = 0,\ \nabla^2 W < 0 \quad\Longrightarrow\quad W\ \text{极大}$$

而对于如静电力，重力体系，总是相互作用能达到**极小**时体系达到力稳定平衡。

如果某物理体系既包含磁力也包含如静电力，达到力平衡时，相互作用能应是极大还是极小呢？

如果磁力体系应用相互作用能，就给分析带来一定的困难，因此人们引进所谓有效势能。

有效势能 U： 通常把作用于磁偶极子的广义力 F_k 做的功写成如下形式：

$$\sum_k F_k \delta\,\theta_k = -\delta U \quad \text{其中 } U \text{ 为 有效势能，} \theta_k \text{ 为广义坐标，} F_k \text{ 为广义力}$$

由于基于洛伦兹力，力和力矩由右式给出：$\vec{\boldsymbol{F}} = \nabla(\vec{\boldsymbol{m}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}}_e)$, $\quad \vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{m}}\times\vec{\boldsymbol{B}}_e$

由上分析可见，保持体系各电流分布不变时，小回路的受力由 $\vec{\boldsymbol{F}} = +\nabla W_{\text{int}}$ 给出。

也即，如果认为偶极子是刚性的，外场也是刚性的，那么磁偶极子的受力 $\vec{\boldsymbol{F}} = +\nabla W_{\text{int}}$

这意味着对磁力体系在相互作用能达到**极大**时达到力的稳定平衡。 (why?)

$$\text{稳定平衡：} \vec{\boldsymbol{F}} = 0,\ \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}} < 0 \quad\Longrightarrow\quad \nabla W = 0,\ \nabla^2 W < 0 \quad\Longrightarrow\quad W\ \text{极大}$$

而对于如静电力，重力体系，总是相互作用能达到**极小**时体系达到力稳定平衡。

如果某物理体系既包含磁力也包含如静电力，达到力平衡时，相互作用能应是极大还是极小呢？

如果磁力体系应用相互作用能，就给分析带来一定的困难，因此人们引进所谓有效势能。

有效势能 U： 通常把作用于磁偶极子的广义力 F_k 做的功写成如下形式：

$$\sum_k F_k \delta\,\theta_k = -\delta U \qquad \text{其中 } U \text{ 为 有效势能，} \theta_k \text{ 为广义坐标，} F_k \text{ 为广义力}$$

由于基于洛伦兹力，力和力矩由右式给出：$\vec{\boldsymbol{F}} = \nabla(\vec{\boldsymbol{m}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}}_e)$, $\quad \vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{m}}\times\vec{\boldsymbol{B}}_e$

因此磁偶极子在外场中的有效势能可写成：$U = -\vec{\boldsymbol{m}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}}_e + \text{const.}$

讨论：

讨论：

1. 在实际问题中，有效势能往往比相互作用能更常用。因为，$\vec{B}_e$ 是非保守场，电流体系之间存在感应，要克服 $\vec{B}_e$ 和 $\vec{m}$ 之间的相互感应，保持 $\vec{B}_e$ 和 $\vec{m}$ 不变，体系必然要与外界交换能量。利用基于洛伦兹力定义的有效势能，人们即可以实现静磁与静电问题的完全类比。

讨论：

1. 在实际问题中，有效势能往往比相互作用能更常用。因为，$\vec{B}_e$ 是非保守场，电流体系之间存在感应，要克服 $\vec{B}_e$ 和 $\vec{m}$ 之间的相互感应，保持 $\vec{B}_e$ 和 $\vec{m}$ 不变，体系必然要与外界交换能量。利用基于洛伦兹力定义的有效势能，人们即可以实现静磁与静电问题的完全类比。
2. 对微观粒子，通常其磁矩值受外场影响很小，反过来，它们对外场的影响也很小。因此可以基于洛伦兹力引入有效势能的概念来取代相互作用能，采取与静电问题中完全相似的公式。这时，体系达到力平衡时，有效势能还是 **极小**。正因为如此，有的书、文献干脆就把有效势能称为相互作用能。

讨论：

1. 在实际问题中，有效势能往往比相互作用能更常用。因为，$\vec{B}_e$ 是非保守场，电流体系之间存在感应，要克服 $\vec{B}_e$ 和 $\vec{m}$ 之间的相互感应，保持 $\vec{B}_e$ 和 $\vec{m}$ 不变，体系必然要与外界交换能量。利用基于洛伦兹力定义的有效势能，人们即可以实现静磁与静电问题的完全类比。
2. 对微观粒子，通常其磁矩值受外场影响很小，反过来，它们对外场的影响也很小。因此可以基于洛伦兹力引入有效势能的概念来取代相互作用能，采取与静电问题中完全相似的公式。这时，体系达到力平衡时，有效势能还是 **极小**。正因为如此，有的书、文献干脆就把有效势能称为相互作用能。

四、例题

讨论：

1. 在实际问题中，有效势能往往比相互作用能更常用。因为，$\vec{B}_e$ 是非保守场，电流体系之间存在感应，要克服 $\vec{B}_e$ 和 $\vec{m}$ 之间的相互感应，保持 $\vec{B}_e$ 和 $\vec{m}$ 不变，体系必然要与外界交换能量。利用基于洛伦兹力定义的有效势能，人们即可以实现静磁与静电问题的完全类比。
2. 对微观粒子，通常其磁矩值受外场影响很小，反过来，它们对外场的影响也很小。因此可以基于洛伦兹力引入有效势能的概念来取代相互作用能，采取与静电问题中完全相似的公式。这时，体系达到力平衡时，有效势能还是 **极小**。正因为如此，有的书、文献干脆就把有效势能称为相互作用能。

四、例题

例 1：带电粒子的磁矩，“磁镜”

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau$$

讨论：

1. 在实际问题中，有效势能往往比相互作用能更常用。因为，$\vec{\boldsymbol{B}}_e$ 是非保守场，电流体系之间存在感应，要克服 $\vec{\boldsymbol{B}}_e$ 和 $\vec{\boldsymbol{m}}$ 之间的相互感应，保持 $\vec{\boldsymbol{B}}_e$ 和 $\vec{\boldsymbol{m}}$ 不变，体系必然要与外界交换能量。利用基于洛伦兹力定义的有效势能，人们即可以实现静磁与静电问题的完全类比。
2. 对微观粒子，通常其磁矩值受外场影响很小，反过来，它们对外场的影响也很小。因此可以基于洛伦兹力引入有效势能的概念来取代相互作用能，采取与静电问题中完全相似的公式。这时，体系达到力平衡时，有效势能还是 **极小**。正因为如此，有的书、文献干脆就把有效势能称为相互作用能。

四、例题

例 1：带电粒子的磁矩，“磁镜”

$$\vec{\boldsymbol{m}} = \frac{1}{2}\int \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau \quad \text{对带电粒子} \quad \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \sum_i \rho_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = \sum_i q_i \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_i)\vec{\boldsymbol{v}}_i$$

讨论：

1. 在实际问题中，有效势能往往比相互作用能更常用。因为，$\vec{\boldsymbol{B}}_e$ 是非保守场，电流体系之间存在感应，要克服 $\vec{\boldsymbol{B}}_e$ 和 $\vec{\boldsymbol{m}}$ 之间的相互感应，保持 $\vec{\boldsymbol{B}}_e$ 和 $\vec{\boldsymbol{m}}$ 不变，体系必然要与外界交换能量。利用基于洛伦兹力定义的有效势能，人们即可以实现静磁与静电问题的完全类比。

2. 对微观粒子，通常其磁矩值受外场影响很小，反过来，它们对外场的影响也很小。因此可以基于洛伦兹力引入有效势能的概念来取代相互作用能，采取与静电问题中完全相似的公式。这时，体系达到力平衡时，有效势能还是 **极小**。正因为如此，有的书、文献干脆就把有效势能称为相互作用能。

四、例题

例 1：带电粒子的磁矩，“磁镜”

$$\vec{\boldsymbol{m}} = \frac{1}{2}\int \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau \quad \text{对带电粒子} \quad \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \sum_i \rho_i \vec{\boldsymbol{v}}_i = \sum_i q_i \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_i)\vec{\boldsymbol{v}}_i$$

$$\vec{\boldsymbol{m}} = \frac{1}{2}\int \vec{\boldsymbol{r}} \times \sum_i q_i \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_i)\vec{\boldsymbol{v}}_i \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\sum_i q_i \vec{\boldsymbol{r}}_i \times \vec{\boldsymbol{v}}_i = \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i}{m_i}\vec{\boldsymbol{r}}_i \times m_i \vec{\boldsymbol{v}}_i$$

讨论：

1. 在实际问题中，有效势能往往比相互作用能更常用。因为，$\vec{B}_e$ 是非保守场，电流体系之间存在感应，要克服 $\vec{B}_e$ 和 $\vec{m}$ 之间的相互感应，保持 $\vec{B}_e$ 和 $\vec{m}$ 不变，体系必然要与外界交换能量。利用基于洛伦兹力定义的有效势能，人们即可以实现静磁与静电问题的完全类比。
2. 对微观粒子，通常其磁矩值受外场影响很小，反过来，它们对外场的影响也很小。因此可以基于洛伦兹力引入有效势能的概念来取代相互作用能，采取与静电问题中完全相似的公式。这时，体系达到力平衡时，有效势能还是 **极小**。正因为如此，有的书、文献干脆就把有效势能称为相互作用能。

四、例题

例 1：带电粒子的磁矩，“磁镜”

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{r}\times\vec{j}(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau \quad \text{对带电粒子} \quad \vec{j}(\vec{r}) = \sum_i \rho_i\vec{v}_i = \sum_i q_i\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\vec{v}_i$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{r}\times\sum_i q_i\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\vec{v}_i\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\sum_i q_i\vec{r}_i\times\vec{v}_i = \frac{1}{2}\sum_i\frac{q_i}{m_i}\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i\frac{q_i}{m_i}\vec{L}_i, \qquad \vec{L}_i = \vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i \text{ 为粒子 } i \text{ 的角动量}$$

Let there be light

$$\vec{\boldsymbol{m}} = \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i}{m_i}\vec{\boldsymbol{r}}_i \times m_i\vec{\boldsymbol{v}}_i = \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i}{m_i}\vec{\boldsymbol{L}}_i$$

$$\vec{\boldsymbol{m}} = \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i}{m_i}\vec{\boldsymbol{r}}_i \times m_i\vec{\boldsymbol{v}}_i = \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i}{m_i}\vec{\boldsymbol{L}}_i$$

若所有粒子的荷质比相同：$\dfrac{q_i}{m_i} = \dfrac{q}{m}$，则：$\vec{\boldsymbol{m}} = \dfrac{1}{2}\sum_i \dfrac{q_i}{m_i}\vec{\boldsymbol{L}}_i = \dfrac{q}{2m}\sum_i \vec{\boldsymbol{L}}_i = \dfrac{q}{2m}\vec{\boldsymbol{L}}$

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i}{m_i}\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i = \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i}{m_i}\vec{L}_i$$

若所有粒子的荷质比相同：$\dfrac{q_i}{m_i} = \dfrac{q}{m}$，则：$\vec{m} = \dfrac{1}{2}\sum_i \dfrac{q_i}{m_i}\vec{L}_i = \dfrac{q}{2m}\sum_i \vec{L}_i = \dfrac{q}{2m}\vec{L}$

$\vec{m} = \dfrac{q}{2m}\vec{L}$ $\quad\vec{L}$ 为体系总角动量，$\vec{m}$ 为体系总磁偶极矩

$\dfrac{q}{2m}$ 为磁偶极矩与角动量之比，称为迴旋比 (gyromagnetic ratio)

$$\vec{\boldsymbol{m}} = \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i}{m_i}\vec{\boldsymbol{r}}_i \times m_i\vec{\boldsymbol{v}}_i = \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i}{m_i}\vec{\boldsymbol{L}}_i$$

若所有粒子的荷质比相同：$\dfrac{q_i}{m_i} = \dfrac{q}{m}$，则：$\vec{\boldsymbol{m}} = \dfrac{1}{2}\sum_i \dfrac{q_i}{m_i}\vec{\boldsymbol{L}}_i = \dfrac{q}{2m}\sum_i \vec{\boldsymbol{L}}_i = \dfrac{q}{2m}\vec{\boldsymbol{L}}$

$\vec{\boldsymbol{m}} = \dfrac{q}{2m}\vec{\boldsymbol{L}}$ $\quad$ $\vec{\boldsymbol{L}}$ 为体系总角动量，$\vec{\boldsymbol{m}}$ 为体系总磁偶极矩

$\dfrac{q}{2m}$ 为磁偶极矩与角动量之比，称为迴旋比 (gyromagnetic ratio)

由于 $\vec{\boldsymbol{L}} = \sum_i \vec{\boldsymbol{L}}_i = \sum_i \vec{\boldsymbol{r}}_i \times m_i\vec{\boldsymbol{v}}_i$，故 $\vec{\boldsymbol{L}}$ 相当于带电粒子绕某点旋转的角动量

对自旋，其自旋角动量 $\vec{\boldsymbol{s}}$ 与磁矩之关系为：$\vec{\boldsymbol{m}} = \dfrac{q}{2m}\,g\,\vec{\boldsymbol{s}}$ $\quad$ g 称为 Landé 因子。

$$\vec{\boldsymbol{m}} = \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i}{m_i}\vec{\boldsymbol{r}}_i \times m_i\vec{\boldsymbol{v}}_i = \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i}{m_i}\vec{\boldsymbol{L}}_i$$

若所有粒子的荷质比相同：$\dfrac{q_i}{m_i} = \dfrac{q}{m}$，则：$\vec{\boldsymbol{m}} = \dfrac{1}{2}\sum_i \dfrac{q_i}{m_i}\vec{\boldsymbol{L}}_i = \dfrac{q}{2m}\sum_i \vec{\boldsymbol{L}}_i = \dfrac{q}{2m}\vec{\boldsymbol{L}}$

$\vec{\boldsymbol{m}} = \dfrac{q}{2m}\vec{\boldsymbol{L}}$　　$\vec{\boldsymbol{L}}$ 为体系总角动量，$\vec{\boldsymbol{m}}$ 为体系总磁偶极矩

$\dfrac{q}{2m}$ 为磁偶极矩与角动量之比，称为迴旋比 (gyromagnetic ratio)

由于 $\vec{\boldsymbol{L}} = \sum_i \vec{\boldsymbol{L}}_i = \sum_i \vec{\boldsymbol{r}}_i \times m_i\vec{\boldsymbol{v}}_i$，故 $\vec{\boldsymbol{L}}$ 相当于带电粒子绕某点旋转的角动量

对自旋，其自旋角动量 $\vec{\boldsymbol{s}}$ 与磁矩之关系为：$\vec{\boldsymbol{m}} = \dfrac{q}{2m}\, g\, \vec{\boldsymbol{s}}$　　g 称为 Landé 因子。

Dirac 相对论电子理论：$g = 2$,　　Feynman, Schwinger 等：g 与 2 有微小偏差。

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i}{m_i}\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i = \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i}{m_i}\vec{L}_i$$

若所有粒子的荷质比相同：$\dfrac{q_i}{m_i} = \dfrac{q}{m}$，则：$\vec{m} = \dfrac{1}{2}\sum_i \dfrac{q_i}{m_i}\vec{L}_i = \dfrac{q}{2m}\sum_i \vec{L}_i = \dfrac{q}{2m}\vec{L}$

$\vec{m} = \dfrac{q}{2m}\vec{L}$ $\quad$ $\vec{L}$ 为体系总角动量，$\vec{m}$ 为体系总磁偶极矩

$\dfrac{q}{2m}$ 为磁偶极矩与角动量之比，称为迴旋比 (gyromagnetic ratio)

由于 $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i$，故 $\vec{L}$ 相当于带电粒子绕某点旋转的角动量

对自旋，其自旋角动量 $\vec{s}$ 与磁矩之关系为：$\vec{m} = \dfrac{q}{2m}\, g\, \vec{s}$ $\quad$ g 称为 Landé 因子。

Dirac 相对论电子理论：$g = 2$, $\quad$ Feynman, Schwinger 等：g 与 2 有微小偏差。

电子磁矩的确定是量子电动力学中理论与实验符合的典范。

磁镜： 带电粒子在 $\vec{B} = B\,\hat{e}_z$ 的磁场中，由于磁力的作用，粒子的其运动轨迹是一螺旋线。

其圆周运动部分可视为电流环，其等效磁矩：$\vec{m} = \dfrac{1}{2}\vec{r} \times q\vec{v} = -m\,\hat{e}_z$，与 $\vec{B}$ 反向 $\quad$ (why?)

$$\vec{\boldsymbol{m}} = \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i}{m_i}\vec{\boldsymbol{r}}_i \times m_i\vec{\boldsymbol{v}}_i = \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i}{m_i}\vec{\boldsymbol{L}}_i$$

若所有粒子的荷质比相同：$\dfrac{q_i}{m_i} = \dfrac{q}{m}$，则：$\vec{\boldsymbol{m}} = \dfrac{1}{2}\sum_i \dfrac{q_i}{m_i}\vec{\boldsymbol{L}}_i = \dfrac{q}{2m}\sum_i \vec{\boldsymbol{L}}_i = \dfrac{q}{2m}\vec{\boldsymbol{L}}$

$\vec{\boldsymbol{m}} = \dfrac{q}{2m}\vec{\boldsymbol{L}}$ $\quad$ $\vec{\boldsymbol{L}}$ 为体系总角动量，$\vec{\boldsymbol{m}}$ 为体系总磁偶极矩

$\dfrac{q}{2m}$ 为磁偶极矩与角动量之比，称为迴旋比 (gyromagnetic ratio)

由于 $\vec{\boldsymbol{L}} = \sum_i \vec{\boldsymbol{L}}_i = \sum_i \vec{\boldsymbol{r}}_i \times m_i\vec{\boldsymbol{v}}_i$，故 $\vec{\boldsymbol{L}}$ 相当于带电粒子绕某点旋转的角动量

对自旋，其自旋角动量 $\vec{\boldsymbol{s}}$ 与磁矩之关系为：$\vec{\boldsymbol{m}} = \dfrac{q}{2m}\, g\, \vec{\boldsymbol{s}}$ $\quad$ g 称为 Landé 因子。

Dirac 相对论电子理论：$g = 2$, $\quad$ Feynman, Schwinger 等：g 与 2 有微小偏差。

电子磁矩的确定是量子电动力学中理论与实验符合的典范。

磁镜： 带电粒子在 $\vec{\boldsymbol{B}} = B\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$ 的磁场中，由于磁力的作用，粒子的其运动轨迹是一螺旋线。

其圆周运动部分可视为电流环，其等效磁矩：$\vec{\boldsymbol{m}} = \dfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol{r}} \times q\vec{\boldsymbol{v}} = -m\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$，与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 反向 $\quad$ (why?)

由于磁矩受力 $\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{m}} \cdot \nabla\vec{\boldsymbol{B}} = -m\dfrac{\partial B}{\partial z}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$，若 B 沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_z$ 向增强，粒子受到沿 $-\hat{\boldsymbol{e}}_z$ 方向的力

$$\vec{\boldsymbol{m}} = \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i}{m_i}\vec{\boldsymbol{r}}_i \times m_i\vec{\boldsymbol{v}}_i = \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i}{m_i}\vec{\boldsymbol{L}}_i$$

若所有粒子的荷质比相同：$\dfrac{q_i}{m_i} = \dfrac{q}{m}$，则：$\vec{\boldsymbol{m}} = \dfrac{1}{2}\sum_i \dfrac{q_i}{m_i}\vec{\boldsymbol{L}}_i = \dfrac{q}{2m}\sum_i \vec{\boldsymbol{L}}_i = \dfrac{q}{2m}\vec{\boldsymbol{L}}$

$\vec{\boldsymbol{m}} = \dfrac{q}{2m}\vec{\boldsymbol{L}}$　　$\vec{\boldsymbol{L}}$ 为体系总角动量，$\vec{\boldsymbol{m}}$ 为体系总磁偶极矩

$\dfrac{q}{2m}$ 为磁偶极矩与角动量之比，称为迴旋比 (gyromagnetic ratio)

由于 $\vec{\boldsymbol{L}} = \sum_i \vec{\boldsymbol{L}}_i = \sum_i \vec{\boldsymbol{r}}_i \times m_i\vec{\boldsymbol{v}}_i$，故 $\vec{\boldsymbol{L}}$ 相当于带电粒子绕某点旋转的角动量

对自旋，其自旋角动量 $\vec{\boldsymbol{s}}$ 与磁矩之关系为：$\vec{\boldsymbol{m}} = \dfrac{q}{2m}\,g\,\vec{\boldsymbol{s}}$　　g 称为 Landé 因子。

Dirac 相对论电子理论：$g = 2$,　　Feynman, Schwinger 等：g 与 2 有微小偏差。

电子磁矩的确定是量子电动力学中理论与实验符合的典范。

磁镜： 带电粒子在 $\vec{\boldsymbol{B}} = B\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$ 的磁场中，由于磁力的作用，粒子的其运动轨迹是一螺旋线。

其圆周运动部分可视为电流环，其等效磁矩：$\vec{\boldsymbol{m}} = \dfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol{r}} \times q\vec{\boldsymbol{v}} = -m\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$，与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 反向　(why?)

由于磁矩受力 $\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{m}} \cdot \nabla\vec{\boldsymbol{B}} = -m\dfrac{\partial B}{\partial z}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$，若 B 沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_z$ 向增强，粒子受到沿 $-\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$ 方向的力

换言之，带电粒子会被强磁场区排斥，

$$\vec{\boldsymbol{m}} = \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i}{m_i}\vec{\boldsymbol{r}}_i \times m_i\vec{\boldsymbol{v}}_i = \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i}{m_i}\vec{\boldsymbol{L}}_i$$

若所有粒子的荷质比相同：$\dfrac{q_i}{m_i} = \dfrac{q}{m}$，则：$\vec{\boldsymbol{m}} = \dfrac{1}{2}\sum_i \dfrac{q_i}{m_i}\vec{\boldsymbol{L}}_i = \dfrac{q}{2m}\sum_i \vec{\boldsymbol{L}}_i = \dfrac{q}{2m}\vec{\boldsymbol{L}}$

$\vec{\boldsymbol{m}} = \dfrac{q}{2m}\vec{\boldsymbol{L}}$ $\quad$ $\vec{\boldsymbol{L}}$ 为体系总角动量，$\vec{\boldsymbol{m}}$ 为体系总磁偶极矩

$\dfrac{q}{2m}$ 为磁偶极矩与角动量之比，称为迴旋比 (gyromagnetic ratio)

由于 $\vec{\boldsymbol{L}} = \sum_i \vec{\boldsymbol{L}}_i = \sum_i \vec{\boldsymbol{r}}_i \times m_i\vec{\boldsymbol{v}}_i$，故 $\vec{\boldsymbol{L}}$ 相当于带电粒子绕某点旋转的角动量

对自旋，其自旋角动量 $\vec{\boldsymbol{s}}$ 与磁矩之关系为：$\vec{\boldsymbol{m}} = \dfrac{q}{2m}\, g\, \vec{\boldsymbol{s}}$ $\qquad$ g 称为 Landé 因子。

Dirac 相对论电子理论：$g = 2$, $\qquad$ Feynman, Schwinger 等：g 与 2 有微小偏差。

电子磁矩的确定是量子电动力学中理论与实验符合的典范。

磁镜： 带电粒子在 $\vec{\boldsymbol{B}} = B\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$ 的磁场中，由于磁力的作用，粒子的其运动轨迹是一螺旋线。

其圆周运动部分可视为电流环，其等效磁矩：$\vec{\boldsymbol{m}} = \dfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol{r}} \times q\vec{\boldsymbol{v}} = -m\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$，与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 反向 $\quad$ (why?)

由于磁矩受力 $\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{m}} \cdot \nabla\vec{\boldsymbol{B}} = -m\dfrac{\partial B}{\partial z}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$，若 B 沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_z$ 向增强，粒子受到沿 $-\hat{\boldsymbol{e}}_z$ 方向的力

换言之，带电粒子会被强磁场区排斥，更形象地也称被强磁场区反射。此即所谓“磁镜”的原理

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i}{m_i}\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i = \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i}{m_i}\vec{L}_i$$

若所有粒子的荷质比相同：$\dfrac{q_i}{m_i} = \dfrac{q}{m}$，则：$\vec{m} = \dfrac{1}{2}\sum_i \dfrac{q_i}{m_i}\vec{L}_i = \dfrac{q}{2m}\sum_i \vec{L}_i = \dfrac{q}{2m}\vec{L}$

$\vec{m} = \dfrac{q}{2m}\vec{L}$ $\qquad$ $\vec{L}$ 为体系总角动量，$\vec{m}$ 为体系总磁偶极矩

$\dfrac{q}{2m}$ 为磁偶极矩与角动量之比，称为迴旋比 (gyromagnetic ratio)

由于 $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i$，故 $\vec{L}$ 相当于带电粒子绕某点旋转的角动量

对自旋，其自旋角动量 $\vec{s}$ 与磁矩之关系为：$\vec{m} = \dfrac{q}{2m}\,g\,\vec{s}$ $\qquad$ g 称为 Landé 因子。

Dirac 相对论电子理论：$g = 2$, $\qquad$ Feynman, Schwinger 等：g 与 2 有微小偏差。

电子磁矩的确定是量子电动力学中理论与实验符合的典范。

磁镜： 带电粒子在 $\vec{B} = B\,\hat{e}_z$ 的磁场中，由于磁力的作用，粒子的其运动轨迹是一螺旋线。

其圆周运动部分可视为电流环，其等效磁矩：$\vec{m} = \dfrac{1}{2}\vec{r} \times q\vec{v} = -m\,\hat{e}_z$，与 $\vec{B}$ 反向 $\quad$ (why?)

由于磁矩受力 $\vec{F} = \vec{m}\cdot\nabla\vec{B} = -m\dfrac{\partial B}{\partial z}\,\hat{e}_z$，若 B 沿 $\hat{e}_z$ 向增强，粒子受到沿 $-\hat{e}_z$ 方向的力

换言之，带电粒子会被强磁场区排斥，更形象地也称被强磁场区反射。此即所谓“磁镜”的原理

利用“磁镜”原理可以约束高温等离子体以产生受控热核反应。

例 2：在一磁化强度为 $\vec{M}_0$，磁感应强度 $\vec{B}_0$，磁场强度 $\vec{H}_0$ 的均匀磁化块材料中挖掉 (1) 一个小球，(2) 一个轴向平行于 $\vec{M}_0$ 长度 l 半径 a 的圆柱，$l \ll a$，(3) 同 (2) 但 $l \ll a$，求球（柱）内磁感应强度 $\vec{B}$ 和磁场强度 $\vec{H}$。

例 2：在一磁化强度为 $\vec{M}_0$，磁感应强度 $\vec{B}_0$，磁场强度 $\vec{H}_0$ 的均匀磁化块材料中挖掉 (1) 一个小球，(2) 一个轴向平行于 $\vec{M}_0$ 长度 l 半径 a 的圆柱，$l \ll a$，(3) 同 (2) 但 $l \ll a$ ，求球（柱）内磁感应强度 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 和磁场强度 $\vec{\boldsymbol{H}}$。

(1)　一个均匀磁化球球内的磁感应强度为：

$$\vec{\boldsymbol{B}}_s = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\vec{\boldsymbol{M}}_0 \mathrm{d}\tau \times (\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}$$

例2：在一磁化强度为 $\vec{M}_0$，磁感应强度 $\vec{B}_0$，磁场强度 $\vec{H}_0$ 的均匀磁化块材料中挖掉 (1) 一个小球，(2) 一个轴向平行于 $\vec{M}_0$ 长度 l 半径 a 的圆柱，$l \ll a$，(3) 同 (2) 但 $l \ll a$，求球（柱）内磁感应强度 $\vec{B}$ 和磁场强度 $\vec{H}$。

(1) 一个均匀磁化球球内的磁感应强度为：

$$\vec{\boldsymbol{B}}_s = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \int \frac{\vec{\boldsymbol{M}}_0 \mathrm{d}\tau \times (\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \left[\vec{\boldsymbol{M}}_0 \times \overbrace{\int \frac{(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}')\mathrm{d}\tau}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|^3}}^{\text{均匀带电球的球内电场}}\right]$$

例 2：在一磁化强度为 $\vec{M}_0$，磁感应强度 $\vec{B}_0$，磁场强度 $\vec{H}_0$ 的均匀磁化块材料中挖掉 (1) 一个小球，(2) 一个轴向平行于 $\vec{M}_0$ 长度 l 半径 a 的圆柱，$l \ll a$，(3) 同 (2) 但 $l \ll a$，求球（柱）内磁感应强度 $\vec{B}$ 和磁场强度 $\vec{H}$。

(1) 一个均匀磁化球球内的磁感应强度为：

$$\vec{B}_s = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \int \frac{\vec{M}_0 \mathrm{d}\tau \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \left[\vec{M}_0 \times \overbrace{\int \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')\mathrm{d}\tau}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}}^{\text{均匀带电球的球内电场}}\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{3}\nabla \times (\vec{M}_0 \times \vec{r}) = \frac{2}{3}\mu_0 \vec{M}_0 \qquad (\text{利用了 } \nabla \times (\vec{M}_0 \times \vec{r}) = 2\vec{M}_0)$$

例 2：在一磁化强度为 $\vec{M}_0$，磁感应强度 $\vec{B}_0$，磁场强度 $\vec{H}_0$ 的均匀磁化块材料中挖掉 (1) 一个小球，(2) 一个轴向平行于 $\vec{M}_0$ 长度 l 半径 a 的圆柱，$l \ll a$，(3) 同 (2) 但 $l \ll a$ ，求球（柱）内磁感应强度 $\vec{B}$ 和磁场强度 $\vec{H}$。

(1) 一个均匀磁化球球内的磁感应强度为：

$$\vec{B}_s = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \int \frac{\vec{M}_0 \mathrm{d}\tau \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \left[\vec{M}_0 \times \overbrace{\int \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')\mathrm{d}\tau}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}}^{\text{均匀带电球的球内电场}}\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{3}\nabla \times (\vec{M}_0 \times \vec{r}) = \frac{2}{3}\mu_0 \vec{M}_0 \qquad (\text{利用了 } \nabla \times (\vec{M}_0 \times \vec{r}) = 2\vec{M}_0)$$

挖去小球之前，块材料中的 $\vec{B}_0$ 可看成被挖去的小球的贡献和其他处的磁化电流的贡献

例 2：在一磁化强度为 $\vec{M}_0$，磁感应强度 $\vec{B}_0$，磁场强度 $\vec{H}_0$ 的均匀磁化块材料中挖掉 (1) 一个小球，(2) 一个轴向平行于 $\vec{M}_0$ 长度 l 半径 a 的圆柱，$l \ll a$，(3) 同 (2) 但 $l \ll a$ ，求球（柱）内磁感应强度 $\vec{B}$ 和磁场强度 $\vec{H}$。

(1) 一个均匀磁化球球内的磁感应强度为：

$$\vec{B}_s = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \int \frac{\vec{M}_0 \mathrm{d}\tau \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \left[\vec{M}_0 \times \overbrace{\int \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')\mathrm{d}\tau}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}}^{\text{均匀带电球的球内电场}}\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{3}\nabla \times (\vec{M}_0 \times \vec{r}) = \frac{2}{3}\mu_0 \vec{M}_0 \qquad (\text{利用了 } \nabla \times (\vec{M}_0 \times \vec{r}) = 2\vec{M}_0)$$

挖去小球之前，块材料中的 $\vec{B}_0$ 可看成被挖去的小球的贡献和其他处的磁化电流的贡献

现挖去小球，应减去小球的贡献 $\vec{B}_s$，故小球腔内的 $\vec{B} = \vec{B}_0 - \vec{B}_s = \vec{B}_0 - \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}_0$

例 2：在一磁化强度为 $\vec{M}_0$，磁感应强度 $\vec{B}_0$，磁场强度 $\vec{H}_0$ 的均匀磁化块材料中挖掉 (1) 一个小球，(2) 一个轴向平行于 $\vec{M}_0$ 长度 l 半径 a 的圆柱，$l \gg a$，(3) 同 (2) 但 $l \ll a$，求球（柱）内磁感应强度 $\vec{B}$ 和磁场强度 $\vec{H}$。

(1) 一个均匀磁化球球内的磁感应强度为：

$$\vec{B}_s = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \int \frac{\vec{M}_0 \mathrm{d}\tau \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \left[\vec{M}_0 \times \overbrace{\int \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')\mathrm{d}\tau}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}}^{\text{均匀带电球的球内电场}}\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{3}\nabla \times (\vec{M}_0 \times \vec{r}) = \frac{2}{3}\mu_0 \vec{M}_0 \qquad \text{(利用了 } \nabla \times (\vec{M}_0 \times \vec{r}) = 2\vec{M}_0\text{)}$$

挖去小球之前，块材料中的 $\vec{B}_0$ 可看成被挖去的小球的贡献和其他处的磁化电流的贡献

现挖去小球，应减去小球的贡献 $\vec{B}_s$，故小球腔内的 $\vec{B} = \vec{B}_0 - \vec{B}_s = \vec{B}_0 - \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}_0$

磁场强度：$\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 = \vec{H}_0 + \frac{1}{3}\vec{M}_0$ (利用了 $\vec{B}_0 = \mu_0\vec{H}_0 + \mu_0\vec{M}_0$)

例 2：在一磁化强度为 $\vec{M}_0$，磁感应强度 $\vec{B}_0$，磁场强度 $\vec{H}_0$ 的均匀磁化块材料中挖掉 (1) 一个小球，(2) 一个轴向平行于 $\vec{M}_0$ 长度 l 半径 a 的圆柱，$l \gg a$，(3) 同 (2) 但 $l \ll a$，求球（柱）内磁感应强度 $\vec{B}$ 和磁场强度 $\vec{H}$。

(1) 一个均匀磁化球球内的磁感应强度为：

$$\vec{B}_s = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \int \frac{\vec{M}_0 \mathrm{d}\tau \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \left[\vec{M}_0 \times \overbrace{\int \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')\mathrm{d}\tau}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}}^{\text{均匀带电球的球内电场}}\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{3}\nabla \times (\vec{M}_0 \times \vec{r}) = \frac{2}{3}\mu_0 \vec{M}_0 \qquad (\text{利用了 } \nabla \times (\vec{M}_0 \times \vec{r}) = 2\vec{M}_0)$$

挖去小球之前，块材料中的 $\vec{B}_0$ 可看成被挖去的小球的贡献和其他处的磁化电流的贡献

现挖去小球，应减去小球的贡献 $\vec{B}_s$，故小球腔内的 $\vec{B} = \vec{B}_0 - \vec{B}_s = \vec{B}_0 - \frac{2}{3}\mu_0 \vec{M}_0$

磁场强度：$\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 = \vec{H}_0 + \frac{1}{3}\vec{M}_0$ $\qquad$ (利用了 $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0 + \mu_0 \vec{M}_0$)

(2) 挖去细长柱，据磁场强度的切向连续可得柱内：$\vec{H} = \vec{H}_0$，$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}_0 = \vec{B}_0 - \mu_0 \vec{M}_0$

例 2：在一磁化强度为 $\vec{M}_0$，磁感应强度 $\vec{B}_0$，磁场强度 $\vec{H}_0$ 的均匀磁化块材料中挖掉 (1) 一个小球，(2) 一个轴向平行于 $\vec{M}_0$ 长度 l 半径 a 的圆柱，$l \ll a$，(3) 同 (2) 但 $l \ll a$ ，求球（柱）内磁感应强度 $\vec{B}$ 和磁场强度 $\vec{H}$。

(1) 一个均匀磁化球球内的磁感应强度为：

$$\vec{B}_s = \nabla\times\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\int\frac{\vec{M}_0 \mathrm{d}\tau\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left[\vec{M}_0\times\overbrace{\int\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')\mathrm{d}\tau}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}}^{\text{均匀带电球的球内电场}}\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{3}\nabla\times(\vec{M}_0\times\vec{r}) = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}_0 \qquad \text{(利用了 } \nabla\times(\vec{M}_0\times\vec{r}) = 2\vec{M}_0\text{)}$$

挖去小球之前，块材料中的 $\vec{B}_0$ 可看成被挖去的小球的贡献和其他处的磁化电流的贡献

现挖去小球，应减去小球的贡献 $\vec{B}_s$，故小球腔内的 $\vec{B} = \vec{B}_0 - \vec{B}_s = \vec{B}_0 - \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}_0$

磁场强度：$\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 = \vec{H}_0 + \frac{1}{3}\vec{M}_0$ (利用了 $\vec{B}_0 = \mu_0\vec{H}_0 + \mu_0\vec{M}_0$)

(2) 挖去细长柱，据磁场强度的切向连续可得柱内：$\vec{H} = \vec{H}_0$, $\vec{B} = \mu_0\vec{H}_0 = \vec{B}_0 - \mu_0\vec{M}_0$

物理图象：柱内 $\vec{M} = 0$，柱外 $\vec{M}_0$，柱面有面磁化电流：$\vec{\alpha}_M = \vec{n}\times\vec{M}_0$

例 2：在一磁化强度为 $\vec{M}_0$，磁感应强度 $\vec{B}_0$，磁场强度 $\vec{H}_0$ 的均匀磁化块材料中挖掉 (1) 一个小球，(2) 一个轴向平行于 $\vec{M}_0$ 长度 l 半径 a 的圆柱，$l \gg a$，(3) 同 (2) 但 $l \ll a$，求球（柱）内磁感应强度 $\vec{B}$ 和磁场强度 $\vec{H}$。

(1) 一个均匀磁化球球内的磁感应强度为：

$$\vec{B}_s = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \int \frac{\vec{M}_0 \mathrm{d}\tau \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \left[\vec{M}_0 \times \overbrace{\int \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')\mathrm{d}\tau}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}}^{\text{均匀带电球的球内电场}}\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{3}\nabla \times (\vec{M}_0 \times \vec{r}) = \frac{2}{3}\mu_0 \vec{M}_0 \qquad (\text{利用了 } \nabla \times (\vec{M}_0 \times \vec{r}) = 2\vec{M}_0)$$

挖去小球之前，块材料中的 $\vec{B}_0$ 可看成被挖去的小球的贡献和其他处的磁化电流的贡献

现挖去小球，应减去小球的贡献 $\vec{B}_s$，故小球腔内的 $\vec{B} = \vec{B}_0 - \vec{B}_s = \vec{B}_0 - \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}_0$

磁场强度：$\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 = \vec{H}_0 + \frac{1}{3}\vec{M}_0$ $\qquad$ (利用了 $\vec{B}_0 = \mu_0\vec{H}_0 + \mu_0\vec{M}_0$)

(2) 挖去细长柱，据磁场强度的切向连续可得柱内：$\vec{H} = \vec{H}_0$，$\vec{B} = \mu_0\vec{H}_0 = \vec{B}_0 - \mu_0\vec{M}_0$

物理图象：柱内 $\vec{M} = 0$，柱外 $\vec{M}_0$，柱面有面磁化电流：$\vec{\alpha}_M = \vec{n} \times \vec{M}_0$

看成一长螺线管，管内磁感应强度：$\mu_0\vec{\alpha}_M$，故柱内：$\vec{B} = \vec{B}_0 - \mu_0\vec{\alpha}_M = \vec{B}_0 - \mu_0\vec{M}_0$

例 2：在一磁化强度为 $\vec{M}_0$，磁感应强度 $\vec{B}_0$，磁场强度 $\vec{H}_0$ 的均匀磁化块材料中挖掉 (1) 一个小球，(2) 一个轴向平行于 $\vec{M}_0$ 长度 l 半径 a 的圆柱，$l \gg a$，(3) 同 (2) 但 $l \ll a$ ，求球（柱）内磁感应强度 $\vec{B}$ 和磁场强度 $\vec{H}$。

(1) 一个均匀磁化球球内的磁感应强度为：

$$\vec{B}_s = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \int \frac{\vec{M}_0 \mathrm{d}\tau \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \left[\vec{M}_0 \times \overbrace{\int \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')\mathrm{d}\tau}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}}^{\text{均匀带电球的球内电场}}\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{3}\nabla \times (\vec{M}_0 \times \vec{r}) = \frac{2}{3}\mu_0 \vec{M}_0 \qquad (\text{利用了 } \nabla \times (\vec{M}_0 \times \vec{r}) = 2\vec{M}_0)$$

挖去小球之前，块材料中的 $\vec{B}_0$ 可看成被挖去的小球的贡献和其他处的磁化电流的贡献

现挖去小球，应减去小球的贡献 $\vec{B}_s$，故小球腔内的 $\vec{B} = \vec{B}_0 - \vec{B}_s = \vec{B}_0 - \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}_0$

磁场强度：$\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 = \vec{H}_0 + \frac{1}{3}\vec{M}_0$ $\qquad$ (利用了 $\vec{B}_0 = \mu_0\vec{H}_0 + \mu_0\vec{M}_0$)

(2) 挖去细长柱，据磁场强度的切向连续可得柱内：$\vec{H} = \vec{H}_0$，$\vec{B} = \mu_0\vec{H}_0 = \vec{B}_0 - \mu_0\vec{M}_0$

物理图象：柱内 $\vec{M} = 0$，柱外 $\vec{M}_0$，柱面有面磁化电流：$\vec{\alpha}_M = \vec{n} \times \vec{M}_0$

看成一长螺线管，管内磁感应强度：$\mu_0\vec{\alpha}_M$，故柱内：$\vec{B} = \vec{B}_0 - \mu_0\vec{\alpha}_M = \vec{B}_0 - \mu_0\vec{M}_0$

(3) 挖去扁平柱，据磁感应强度的法向连续可得柱内：$\vec{B} = \vec{B}_0$，$\vec{H} = \vec{B}_0/\mu_0 = \vec{H}_0 + \vec{M}_0$

例 2：在一磁化强度为 $\vec{M}_0$，磁感应强度 $\vec{B}_0$，磁场强度 $\vec{H}_0$ 的均匀磁化块材料中挖掉 (1) 一个小球，(2) 一个轴向平行于 $\vec{M}_0$ 长度 l 半径 a 的圆柱，$l \gg a$，(3) 同 (2) 但 $l \ll a$，求球（柱）内磁感应强度 $\vec{B}$ 和磁场强度 $\vec{H}$。

(1) 一个均匀磁化球球内的磁感应强度为：

$$\vec{B}_s = \nabla\times\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\int\frac{\vec{M}_0 \mathrm{d}\tau\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left[\vec{M}_0\times\overbrace{\int\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')\mathrm{d}\tau}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}}^{\text{均匀带电球的球内电场}}\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{3}\nabla\times(\vec{M}_0\times\vec{r}) = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}_0 \qquad (\text{利用了 } \nabla\times(\vec{M}_0\times\vec{r}) = 2\vec{M}_0)$$

挖去小球之前，块材料中的 $\vec{B}_0$ 可看成被挖去的小球的贡献和其他处的磁化电流的贡献

现挖去小球，应减去小球的贡献 $\vec{B}_s$，故小球腔内的 $\vec{B} = \vec{B}_0 - \vec{B}_s = \vec{B}_0 - \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}_0$

磁场强度：$\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 = \vec{H}_0 + \frac{1}{3}\vec{M}_0$ (利用了 $\vec{B}_0 = \mu_0\vec{H}_0 + \mu_0\vec{M}_0$)

(2) 挖去细长柱，据磁场强度的切向连续可得柱内：$\vec{H} = \vec{H}_0$，$\vec{B} = \mu_0\vec{H}_0 = \vec{B}_0 - \mu_0\vec{M}_0$

物理图象：柱内 $\vec{M} = 0$，柱外 $\vec{M}_0$，柱面有面磁化电流：$\vec{\alpha}_M = \vec{n}\times\vec{M}_0$

看成一长螺线管，管内磁感应强度：$\mu_0\vec{\alpha}_M$，故柱内：$\vec{B} = \vec{B}_0 - \mu_0\vec{\alpha}_M = \vec{B}_0 - \mu_0\vec{M}_0$

(3) 挖去扁平柱，据磁感应强度的法向连续可得柱内：$\vec{B} = \vec{B}_0$，$\vec{H} = \vec{B}_0/\mu_0 = \vec{H}_0 + \vec{M}_0$

物理图象：磁化面电流相当于一大电流线圈，在中心的 $\vec{B}_c = \dfrac{\mu_0 I}{2a} \sim 0$，柱内：$\vec{B} = \vec{B}_0$

例 3：半径 a，长度 l 的圆柱形永久磁铁在磁导率为 μ 的线性磁介质中，磁介质中的磁场强度 $\vec{\boldsymbol{H}}$ 与磁感应强度 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 是否与 μ 有关？ 教材 p139 § 5.8

例 3：半径 a，长度 l 的圆柱形永久磁铁在磁导率为 μ 的线性磁介质中，磁介质中的磁场强度 $\vec{\boldsymbol{H}}$ 与磁感应强度 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 是否与 μ 有关？ 教材 p139 § 5.8

显然，若是稳恒电流 $\vec{\boldsymbol{j}}_f$ 放置于线性磁介质中，由 $\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}=\vec{\boldsymbol{j}}_f$ 知，介质中的 $\vec{\boldsymbol{H}}$ 与 μ 无关

例 3：半径 a，长度 l 的圆柱形永久磁铁在磁导率为 μ 的线性磁介质中，磁介质中的磁场强度 $\vec{\boldsymbol{H}}$ 与磁感应强度 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 是否与 μ 有关？ 教材 p139 § 5.8

显然，若是稳恒电流 $\vec{\boldsymbol{j}}_f$ 放置于线性磁介质中，由 $\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{j}}_f$ 知，介质中的 $\vec{\boldsymbol{H}}$ 与 μ 无关

故磁感应强度 $\vec{\boldsymbol{B}} = \mu \vec{\boldsymbol{H}}$ 与 μ 成正比。

例 3：半径 a，长度 l 的圆柱形永久磁铁在磁导率为 μ 的线性磁介质中，磁介质中的磁场强度 $\vec{\boldsymbol{H}}$ 与磁感应强度 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 是否与 μ 有关？ 教材 p139 § 5.8

显然，若是稳恒电流 $\vec{\boldsymbol{j}}_f$ 放置于线性磁介质中，由 $\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}=\vec{\boldsymbol{j}}_f$ 知，介质中的 $\vec{\boldsymbol{H}}$ 与 μ 无关故磁感应强度 $\vec{\boldsymbol{B}}=\mu\vec{\boldsymbol{H}}$ 与 μ 成正比。对永久磁铁，情况较为复杂。

例 3：半径 a，长度 l 的圆柱形永久磁铁在磁导率为 μ 的线性磁介质中，磁介质中的磁场强度 $\vec{H}$ 与磁感应强度 $\vec{B}$ 是否与 μ 有关？ 教材 p139 § 5.8

显然，若是稳恒电流 $\vec{j}_f$ 放置于线性磁介质中，由 $\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f$ 知，介质中的 $\vec{H}$ 与 μ 无关故磁感应强度 $\vec{B}=\mu\vec{H}$ 与 μ 成正比。对永久磁铁，情况较为复杂。

讨论两种极端情形：

(1) $l \gg a$

例 3：半径 a，长度 l 的圆柱形永久磁铁在磁导率为 μ 的线性磁介质中，磁介质中的磁场强度 $\vec{H}$ 与磁感应强度 $\vec{B}$ 是否与 μ 有关？　教材 p139 § 5.8

显然，若是稳恒电流 $\vec{j}_f$ 放置于线性磁介质中，由 $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f$ 知，介质中的 $\vec{H}$ 与 μ 无关故磁感应强度 $\vec{B} = \mu\vec{H}$ 与 μ 成正比。对永久磁铁，情况较为复杂。

讨论两种极端情形：

(1)　$l \gg a$　　细长型磁铁

例 3：半径 a，长度 l 的圆柱形永久磁铁在磁导率为 μ 的线性磁介质中，磁介质中的磁场强度 $\vec{H}$ 与磁感应强度 $\vec{B}$ 是否与 μ 有关？ 教材 p139 § 5.8

显然，若是稳恒电流 $\vec{j}_f$ 放置于线性磁介质中，由 $\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f$ 知，介质中的 $\vec{H}$ 与 μ 无关故磁感应强度 $\vec{B}=\mu\vec{H}$ 与 μ 成正比。对永久磁铁，情况较为复杂。

讨论两种极端情形：

(1) $l \gg a$ 细长型磁铁

类似于上页例题 2，细长圆柱形永久磁铁可看成长螺线管，柱面有磁化面电流，

例 3：半径 a，长度 l 的圆柱形永久磁铁在磁导率为 μ 的线性磁介质中，磁介质中的磁场强度 $\vec{H}$ 与磁感应强度 $\vec{B}$ 是否与 μ 有关？ 教材 p139 §5.8

显然，若是稳恒电流 $\vec{j}_f$ 放置于线性磁介质中，由 $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f$ 知，介质中的 $\vec{H}$ 与 μ 无关故磁感应强度 $\vec{B} = \mu\vec{H}$ 与 μ 成正比。对永久磁铁，情况较为复杂。

讨论两种极端情形：

(1) $l \gg a$ 细长型磁铁

类似于上页例题 2，细长圆柱形永久磁铁可看成长螺线管，柱面有磁化面电流，

而这些面电流在柱外的磁场为 0，

例 3：半径 a，长度 l 的圆柱形永久磁铁在磁导率为 μ 的线性磁介质中，磁介质中的磁场强度 $\vec{H}$ 与磁感应强度 $\vec{B}$ 是否与 μ 有关？ 教材 p139 § 5.8

显然，若是稳恒电流 $\vec{j}_f$ 放置于线性磁介质中，由 $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f$ 知，介质中的 $\vec{H}$ 与 μ 无关故磁感应强度 $\vec{B} = \mu\vec{H}$ 与 μ 成正比。对永久磁铁，情况较为复杂。

讨论两种极端情形：

(1) $l \gg a$ 细长型磁铁

类似于上页例题 2，细长圆柱形永久磁铁可看成长螺线管，柱面有磁化面电流，

而这些面电流在柱外的磁场为 0，柱外磁场是因为圆柱有限长，两端磁力线“漏出” 而导致的

例 3：半径 a，长度 l 的圆柱形永久磁铁在磁导率为 μ 的线性磁介质中，磁介质中的磁场强度 $\vec{H}$ 与磁感应强度 $\vec{B}$ 是否与 μ 有关？ 教材 p139 § 5.8

显然，若是稳恒电流 $\vec{j}_f$ 放置于线性磁介质中，由 $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f$ 知，介质中的 $\vec{H}$ 与 μ 无关故磁感应强度 $\vec{B} = \mu\vec{H}$ 与 μ 成正比。对永久磁铁，情况较为复杂。

讨论两种极端情形：

(1) $l \gg a$ 细长型磁铁

类似于上页例题 2，细长圆柱形永久磁铁可看成长螺线管，柱面有磁化面电流，

而这些面电流在柱外的磁场为 0，柱外磁场是因为圆柱有限长，两端磁力线“漏出” 而导致的

在圆柱外面，磁场在图像上与圆柱两端存在反号磁荷类似。

例 3：半径 a，长度 l 的圆柱形永久磁铁在磁导率为 μ 的线性磁介质中，磁介质中的磁场强度 $\vec{H}$ 与磁感应强度 $\vec{B}$ 是否与 μ 有关？ 教材 p139 § 5.8

显然，若是稳恒电流 $\vec{j}_f$ 放置于线性磁介质中，由 $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f$ 知，介质中的 $\vec{H}$ 与 μ 无关故磁感应强度 $\vec{B} = \mu\vec{H}$ 与 μ 成正比。对永久磁铁，情况较为复杂。

讨论两种极端情形：

(1) $l \gg a$ 细长型磁铁

类似于上页例题 2，细长圆柱形永久磁铁可看成长螺线管，柱面有磁化面电流，

而这些面电流在柱外的磁场为 0，柱外磁场是因为圆柱有限长，两端磁力线“漏出”而导致的，

在圆柱外面，磁场在图像上与圆柱两端存在反号磁荷类似。

也即，有限长螺线管外的磁场类似于螺线管两端存在反号面磁荷时的磁场。

例 3：半径 a，长度 l 的圆柱形永久磁铁在磁导率为 μ 的线性磁介质中，磁介质中的磁场强度 $\vec{H}$ 与磁感应强度 $\vec{B}$ 是否与 μ 有关？ 教材 p139 § 5.8

显然，若是稳恒电流 $\vec{j}_f$ 放置于线性磁介质中，由 $\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f$ 知，介质中的 $\vec{H}$ 与 μ 无关

故磁感应强度 $\vec{B}=\mu\vec{H}$ 与 μ 成正比。对永久磁铁，情况较为复杂。

讨论两种极端情形：

(1) $l \gg a$ 细长型磁铁

类似于上页例题 2，细长圆柱形永久磁铁可看成长螺线管，柱面有磁化面电流，

而这些面电流在柱外的磁场为 0，柱外磁场是因为圆柱有限长，两端磁力线“漏出” 而导致的，

在圆柱外面，磁场在图像上与圆柱两端存在反号磁荷类似。

也即，有限长螺线管外的磁场类似于螺线管两端存在反号面磁荷时的磁场。

类比于静电，磁荷在磁介质中激发感应磁荷，形成的磁场强度满足 $\nabla\cdot\vec{H}=\rho_m/\mu$。

例 3：半径 a，长度 l 的圆柱形永久磁铁在磁导率为 μ 的线性磁介质中，磁介质中的磁场强度 $\vec{H}$ 与磁感应强度 $\vec{B}$ 是否与 μ 有关？ 教材 p139 § 5.8

显然，若是稳恒电流 $\vec{j}_f$ 放置于线性磁介质中，由 $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f$ 知，介质中的 $\vec{H}$ 与 μ 无关

故磁感应强度 $\vec{B} = \mu\vec{H}$ 与 μ 成正比。对永久磁铁，情况较为复杂。

讨论两种极端情形：

(1) $l \gg a$ 细长型磁铁

类似于上页例题 2，细长圆柱形永久磁铁可看成长螺线管，柱面有磁化面电流，

而这些面电流在柱外的磁场为 0，柱外磁场是因为圆柱有限长，两端磁力线"漏出" 而导致的，

在圆柱外面，磁场在图像上与圆柱两端存在反号磁荷类似。

也即，有限长螺线管外的磁场类似于螺线管两端存在反号面磁荷时的磁场。

类比于静电，磁荷在磁介质中激发感应磁荷，形成的磁场强度满足 $\nabla \cdot \vec{H} = \rho_m/\mu$。

故在线性磁介质中，磁场强度 $\vec{H}$ 反比于 μ，磁感应强度 $\vec{B} = \mu\vec{H}$ 与 μ 无关。

例 3：半径 a，长度 l 的圆柱形永久磁铁在磁导率为 μ 的线性磁介质中，磁介质中的磁场强度 $\vec{H}$ 与磁感应强度 $\vec{B}$ 是否与 μ 有关？ 教材 p139 § 5.8

显然，若是稳恒电流 $\vec{j}_f$ 放置于线性磁介质中，由 $\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f$ 知，介质中的 $\vec{H}$ 与 μ 无关

故磁感应强度 $\vec{B}=\mu\vec{H}$ 与 μ 成正比。对永久磁铁，情况较为复杂。

讨论两种极端情形：

(1) $l\gg a$ 细长型磁铁

类似于上页例题 2，细长圆柱形永久磁铁可看成长螺线管，柱面有磁化面电流，

而这些面电流在柱外的磁场为 0，柱外磁场是因为圆柱有限长，两端磁力线“漏出” 而导致的，

在圆柱外面，磁场在图像上与圆柱两端存在反号磁荷类似。

也即，有限长螺线管外的磁场类似于螺线管两端存在反号面磁荷时的磁场。

类比于静电，磁荷在磁介质中激发感应磁荷，形成的磁场强度满足 $\nabla\cdot\vec{H}=\rho_m/\mu$。

故在线性磁介质中，磁场强度 $\vec{H}$ 反比于 μ，磁感应强度 $\vec{B}=\mu\vec{H}$ 与 μ 无关。

(2) $l\ll a$

例 3：半径 a，长度 l 的圆柱形永久磁铁在磁导率为 μ 的线性磁介质中，磁介质中的磁场强度 $\vec{H}$ 与磁感应强度 $\vec{B}$ 是否与 μ 有关？ 教材 p139 § 5.8

显然，若是稳恒电流 $\vec{j}_f$ 放置于线性磁介质中，由 $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f$ 知，介质中的 $\vec{H}$ 与 μ 无关

故磁感应强度 $\vec{B} = \mu\vec{H}$ 与 μ 成正比。对永久磁铁，情况较为复杂。

讨论两种极端情形：

(1) $l \gg a$ 细长型磁铁

类似于上页例题 2，细长圆柱形永久磁铁可看成长螺线管，柱面有磁化面电流，

而这些面电流在柱外的磁场为 0，柱外磁场是因为圆柱有限长，两端磁力线“漏出” 而导致的，

在圆柱外面，磁场在图像上与圆柱两端存在反号磁荷类似。

也即，有限长螺线管外的磁场类似于螺线管两端存在反号面磁荷时的磁场。

类比于静电，磁荷在磁介质中激发感应磁荷，形成的磁场强度满足 $\nabla \cdot \vec{H} = \rho_m/\mu$。

故在线性磁介质中，磁场强度 $\vec{H}$ 反比于 μ，磁感应强度 $\vec{B} = \mu\vec{H}$ 与 μ 无关。

(2) $l \ll a$ 扁平型磁铁

例 3：半径 a，长度 l 的圆柱形永久磁铁在磁导率为 μ 的线性磁介质中，磁介质中的磁场强度 $\vec{H}$ 与磁感应强度 $\vec{B}$ 是否与 μ 有关？ 教材 p139 § 5.8

显然，若是稳恒电流 $\vec{j}_f$ 放置于线性磁介质中，由 $\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f$ 知，介质中的 $\vec{H}$ 与 μ 无关
故磁感应强度 $\vec{B}=\mu\vec{H}$ 与 μ 成正比。对永久磁铁，情况较为复杂。

讨论两种极端情形：

(1) $l\gg a$ 细长型磁铁

类似于上页例题 2，细长圆柱形永久磁铁可看成长螺线管，柱面有磁化面电流，
而这些面电流在柱外的磁场为 0，柱外磁场是因为圆柱有限长，两端磁力线“漏出” 而导致的，
在圆柱外面，磁场在图像上与圆柱两端存在反号磁荷类似。
也即，有限长螺线管外的磁场类似于螺线管两端存在反号面磁荷时的磁场。
类比于静电，磁荷在磁介质中激发感应磁荷，形成的磁场强度满足 $\nabla\cdot\vec{H}=\rho_m/\mu$。
故在线性磁介质中，磁场强度 $\vec{H}$ 反比于 μ，磁感应强度 $\vec{B}=\mu\vec{H}$ 与 μ 无关。

(2) $l\ll a$ 扁平型磁铁

类似于上页例题 2，扁平型永久磁铁可看成一电流线圈，与稳恒自由电流 $\vec{j}_f$ 类似

例 3：半径 a，长度 l 的圆柱形永久磁铁在磁导率为 μ 的线性磁介质中，磁介质中的磁场强度 $\vec{H}$ 与磁感应强度 $\vec{B}$ 是否与 μ 有关？ 教材 p139 § 5.8

显然，若是稳恒电流 $\vec{j}_f$ 放置于线性磁介质中，由 $\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f$ 知，介质中的 $\vec{H}$ 与 μ 无关

故磁感应强度 $\vec{B}=\mu\vec{H}$ 与 μ 成正比。对永久磁铁，情况较为复杂。

讨论两种极端情形：

(1) $l \gg a$ 细长型磁铁

类似于上页例题 2，细长圆柱形永久磁铁可看成长螺线管，柱面有磁化面电流，

而这些面电流在柱外的磁场为 0，柱外磁场是因为圆柱有限长，两端磁力线“漏出” 而导致的，

在圆柱外面，磁场在图像上与圆柱两端存在反号磁荷类似。

也即，有限长螺线管外的磁场类似于螺线管两端存在反号面磁荷时的磁场。

类比于静电，磁荷在磁介质中激发感应磁荷，形成的磁场强度满足 $\nabla\cdot\vec{H}=\rho_m/\mu$。

故在线性磁介质中，磁场强度 $\vec{H}$ 反比于 μ，磁感应强度 $\vec{B}=\mu\vec{H}$ 与 μ 无关。

(2) $l \ll a$ 扁平型磁铁

类似于上页例题 2，扁平型永久磁铁可看成一电流线圈，与稳恒自由电流 $\vec{j}_f$ 类似

因此，柱外的磁场与 μ 无关，从而磁感应强度 $\vec{B}=\mu\vec{H}$ 正比于 μ。

例3：半径 a，长度 l 的圆柱形永久磁铁在磁导率为 μ 的线性磁介质中，磁介质中的磁场强度 $\vec{H}$ 与磁感应强度 $\vec{B}$ 是否与 μ 有关？ 教材 p139 § 5.8

显然，若是稳恒电流 $\vec{j}_f$ 放置于线性磁介质中，由 $\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f$ 知，介质中的 $\vec{H}$ 与 μ 无关

故磁感应强度 $\vec{B}=\mu\vec{H}$ 与 μ 成正比。对永久磁铁，情况较为复杂。

讨论两种极端情形：

(1) $l \gg a$ 细长型磁铁

类似于上页例题 2，细长圆柱形永久磁铁可看成长螺线管，柱面有磁化面电流，

而这些面电流在柱外的磁场为 0，柱外磁场是因为圆柱有限长，两端磁力线“漏出” 而导致的，

在圆柱外面，磁场在图像上与圆柱两端存在反号磁荷类似。

也即，有限长螺线管外的磁场类似于螺线管两端存在反号面磁荷时的磁场。

类比于静电，磁荷在磁介质中激发感应磁荷，形成的磁场强度满足 $\nabla\cdot\vec{H}=\rho_m/\mu$。

故在线性磁介质中，磁场强度 $\vec{H}$ 反比于 μ，磁感应强度 $\vec{B}=\mu\vec{H}$ 与 μ 无关。

(2) $l \ll a$ 扁平型磁铁

类似于上页例题 2，扁平型永久磁铁可看成一电流线圈，与稳恒自由电流 $\vec{j}_f$ 类似

因此，柱外的磁场与 μ 无关，从而磁感应强度 $\vec{B}=\mu\vec{H}$ 正比于 μ。

当然，也可从磁荷图像加以分析，参见教材 p140。

例 3：半径 a，长度 l 的圆柱形永久磁铁在磁导率为 μ 的线性磁介质中，磁介质中的磁场强度 $\vec{H}$ 与磁感应强度 $\vec{B}$ 是否与 μ 有关？ 教材 p139 § 5.8

显然，若是稳恒电流 $\vec{j}_f$ 放置于线性磁介质中，由 $\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f$ 知，介质中的 $\vec{H}$ 与 μ 无关

故磁感应强度 $\vec{B}=\mu\vec{H}$ 与 μ 成正比。对永久磁铁，情况较为复杂。

讨论两种极端情形：

(1) $l\gg a$ 细长型磁铁

类似于上页例题 2，细长圆柱形永久磁铁可看成长螺线管，柱面有磁化面电流，

而这些面电流在柱外的磁场为 0，柱外磁场是因为圆柱有限长，两端磁力线“漏出” 而导致的，

在圆柱外面，磁场在图像上与圆柱两端存在反号磁荷类似。

也即，有限长螺线管外的磁场类似于螺线管两端存在反号面磁荷时的磁场。

类比于静电，磁荷在磁介质中激发感应磁荷，形成的磁场强度满足 $\nabla\cdot\vec{H}=\rho_m/\mu$。

故在线性磁介质中，磁场强度 $\vec{H}$ 反比于 μ，磁感应强度 $\vec{B}=\mu\vec{H}$ 与 μ 无关。

(2) $l\ll a$ 扁平型磁铁

类似于上页例题 2，扁平型永久磁铁可看成一电流线圈，与稳恒自由电流 $\vec{j}_f$ 类似

因此，柱外的磁场与 μ 无关，从而磁感应强度 $\vec{B}=\mu\vec{H}$ 正比于 μ。

当然，也可从磁荷图像加以分析，参见教材 p140。