§1.3 积分

一、线积分、面积分和体积分

§ 1.3 积分

一、线积分、面积分和体积分

线积分：

§1.3 积分

一、线积分、面积分和体积分

线积分：

$$\int_{a\mathcal{P}}^{b} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{a\mathcal{P}}^{b} \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{A}$$

§1.3 积分

一、线积分、面积分和体积分

线积分：

$$\int_{a\mathcal{P}}^{b} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{a\mathcal{P}}^{b} \mathrm{d}\vec{l}\cdot \vec{A}$$

闭合路径线积分：

§1.3 积分

一、线积分、面积分和体积分

线积分： $$\int_{a\mathcal{P}}^{b} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{a\mathcal{P}}^{b} \mathrm{d}\vec{l}\cdot \vec{A}$$

闭合路径线积分： $$\oint_{a\mathcal{P}}^{a} \mathrm{d}\vec{l}\cdot \vec{A}$$

§1.3 积分

一、线积分、面积分和体积分

线积分： $$\int_{a\mathcal{P}}^{b} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \int_{a\mathcal{P}}^{b} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}$$

闭合路径线积分： $$\oint_{a\mathcal{P}}^{a} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}$$

物理应用：力 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 所做的功 $W = \int_{a\mathcal{P}}^{b} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}$

§1.3 积分

一、线积分、面积分和体积分

线积分： $$\int_{a\mathcal{P}}^{b} \vec{\boldsymbol{A}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \int_{a\mathcal{P}}^{b} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\cdot \vec{\boldsymbol{A}}$$

闭合路径线积分： $$\oint_{a\mathcal{P}}^{a} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\cdot \vec{\boldsymbol{A}}$$

物理应用：力 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 所做的功 $W = \int_{a\mathcal{P}}^{b} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\cdot \vec{\boldsymbol{F}}$

推广：

§1.3 积分

一、线积分、面积分和体积分

线积分：
$$\int_{a\mathcal{P}}^{b}\vec{\boldsymbol{A}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}=\int_{a\mathcal{P}}^{b}\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\cdot\vec{\boldsymbol{A}}$$

闭合路径线积分：
$$\oint_{a\mathcal{P}}^{a}\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\cdot\vec{\boldsymbol{A}}$$

物理应用：力 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 所做的功 $W=\int_{a\mathcal{P}}^{b}\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}$

推广：

$$\int_{a\mathcal{P}}^{b} f\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}=\int_{a\mathcal{P}}^{b}\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\,f,$$

§1.3 积分

一、线积分、面积分和体积分

线积分：
$$\int_{a\mathcal{P}}^{b} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{a\mathcal{P}}^{b} \mathrm{d}\vec{l}\cdot \vec{A}$$

闭合路径线积分：
$$\oint_{a\mathcal{P}}^{a} \mathrm{d}\vec{l}\cdot \vec{A}$$

物理应用：力 $\vec{F}$ 所做的功 $W = \int_{a\mathcal{P}}^{b} \mathrm{d}\vec{l}\cdot \vec{F}$

推广：

$$\int_{a\mathcal{P}}^{b} f\,\mathrm{d}\vec{l} = \int_{a\mathcal{P}}^{b} \mathrm{d}\vec{l}\, f, \qquad \int_{a\mathcal{P}}^{b} \vec{A}\times \mathrm{d}\vec{l} = -\int_{a\mathcal{P}}^{b} \mathrm{d}\vec{l}\times \vec{A}$$

面积分:

面积分：$$\int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} \, \mathrm{d}\sigma$$

面积分：$$\int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{d}\sigma$$

闭合曲面面积分：

面积分：
$$\int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\, \mathrm{d}\sigma$$

闭合曲面面积分：
$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\, \mathrm{d}\sigma$$

面积分：
$$\int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{d}\sigma$$

闭合曲面面积分：
$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{d}\sigma$$

物理应用：通量 $Q = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\rho \vec{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{d}\sigma$

面积分： $$\int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\, \mathrm{d}\sigma$$

闭合曲面面积分： $$\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\, \mathrm{d}\sigma$$

物理应用：通量 $Q = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\rho \vec{\boldsymbol{v}})\, \mathrm{d}\sigma$

推广：

面积分： $$\int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\, \mathrm{d}\sigma$$

闭合曲面面积分： $$\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\, \mathrm{d}\sigma$$

物理应用：通量 $Q = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\rho \vec{\boldsymbol{v}})\, \mathrm{d}\sigma$

推广： $$\int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\, f\, \mathrm{d}\sigma,$$

面积分： $$\int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\, \mathrm{d}\sigma$$

闭合曲面面积分： $$\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\, \mathrm{d}\sigma$$

物理应用：通量 $Q = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\rho \vec{\boldsymbol{v}})\, \mathrm{d}\sigma$

推广： $$\int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\, f\, \mathrm{d}\sigma, \qquad \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{A}}\, \mathrm{d}\sigma$$

面积分：
$$\int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\, \mathrm{d}\sigma$$

闭合曲面面积分：
$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\, \mathrm{d}\sigma$$

物理应用：通量 $Q = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\rho \vec{\boldsymbol{v}})\, \mathrm{d}\sigma$

推广：
$$\int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\, f\, \mathrm{d}\sigma, \qquad \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{A}}\, \mathrm{d}\sigma$$

体积分：

面积分： $$\int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{A}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{d}\sigma$$

闭合曲面面积分： $$\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{d}\sigma$$

物理应用：通量 $Q = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\rho\vec{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{d}\sigma$

推广： $$\int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\, f\,\mathrm{d}\sigma, \qquad \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{d}\sigma$$

体积分： $$\int_{\mathcal{V}} f\,\mathrm{d}\tau = \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\tau\, f$$

面积分： $$\int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\, \mathrm{d}\sigma$$

闭合曲面面积分： $$\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\, \mathrm{d}\sigma$$

物理应用：通量 $Q = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\rho \vec{\boldsymbol{v}})\, \mathrm{d}\sigma$

推广： $$\int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\, f\, \mathrm{d}\sigma, \qquad \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{A}}\, \mathrm{d}\sigma$$

体积分： $$\int_{\mathcal{V}} f\, \mathrm{d}\tau = \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\tau\, f$$

物理应用：质量 $m = \int_{\mathcal{V}} \rho\, \mathrm{d}\tau$

面积分：
$$\int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\, \mathrm{d}\sigma$$

闭合曲面面积分：
$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\, \mathrm{d}\sigma$$

物理应用：通量 $Q = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\rho \vec{\boldsymbol{v}})\, \mathrm{d}\sigma$

推广：
$$\int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\, f\, \mathrm{d}\sigma, \qquad \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{A}}\, \mathrm{d}\sigma$$

体积分：
$$\int_{\mathcal{V}} f\, \mathrm{d}\tau = \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\tau\, f$$

物理应用：质量 $m = \int_{\mathcal{V}} \rho\, \mathrm{d}\tau$

推广：

面积分： $$\int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\, \mathrm{d}\sigma$$

闭合曲面面积分： $$\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\, \mathrm{d}\sigma$$

物理应用：通量 $Q = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\rho \vec{\boldsymbol{v}})\, \mathrm{d}\sigma$

推广： $$\int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\, f\, \mathrm{d}\sigma, \qquad \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{A}}\, \mathrm{d}\sigma$$

体积分： $$\int_{\mathcal{V}} f\, \mathrm{d}\tau = \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\tau\, f$$

物理应用：质量 $m = \int_{\mathcal{V}} \rho\, \mathrm{d}\tau$

推广： $$\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\tau\, \vec{\boldsymbol{A}} = \hat{\boldsymbol{e}}_x \int_{\mathcal{V}} A_x\, \mathrm{d}\tau + \hat{\boldsymbol{e}}_y \int_{\mathcal{V}} A_y\, \mathrm{d}\tau + \hat{\boldsymbol{e}}_z \int_{\mathcal{V}} A_z\, \mathrm{d}\tau$$

二、若干基本积分定理

二、若干基本积分定理

梯度基本定理 (fundamental theorem for gradients)：

二、若干基本积分定理

梯度基本定理 (fundamental theorem for gradients):

$$\int_{\boldsymbol{a}\mathcal{P}}^{\boldsymbol{b}} (\nabla f) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \int_{\boldsymbol{a}\mathcal{P}}^{\boldsymbol{b}} \mathrm{d}\, f = f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})$$

二、若干基本积分定理

梯度基本定理 (fundamental theorem for gradients)：

$$\int_{\boldsymbol{a}\mathcal{P}}^{\boldsymbol{b}} (\nabla f) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \int_{\boldsymbol{a}\mathcal{P}}^{\boldsymbol{b}} \mathrm{d}\, f = f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) \qquad \text{与路径 } \mathcal{P} \text{ 无关}$$

二、若干基本积分定理

梯度基本定理 (fundamental theorem for gradients):

$$\int_{\boldsymbol{a}\mathcal{P}}^{\boldsymbol{b}} (\nabla f)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \int_{\boldsymbol{a}\mathcal{P}}^{\boldsymbol{b}} \mathrm{d}\, f = f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})$$

与路径 $\mathcal{P}$ 无关

利用了全微分：$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$

二、若干基本积分定理

梯度基本定理 (fundamental theorem for gradients)：

$$\int_{\boldsymbol{a}\mathcal{P}}^{\boldsymbol{b}} (\nabla f)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \int_{\boldsymbol{a}\mathcal{P}}^{\boldsymbol{b}} \mathrm{d}\, f = f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})$$

与路径 $\mathcal{P}$ 无关

利用了全微分：$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$

散度定理 (divergence theorem)，也称高斯定理 (Gauss's theorem)：

二、若干基本积分定理

梯度基本定理 (fundamental theorem for gradients)：

$$\int_{\boldsymbol{a}\mathcal{P}}^{\boldsymbol{b}} (\nabla f)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \int_{\boldsymbol{a}\mathcal{P}}^{\boldsymbol{b}} \mathrm{d}\, f = f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})$$

与路径 $\mathcal{P}$ 无关

利用了全微分：$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$

散度定理 (divergence theorem)，也称高斯定理 (Gauss's theorem)：

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{d}\sigma \quad = \quad \int_{\mathcal{V}} (\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}})\,\mathrm{d}\tau$$

二、若干基本积分定理

梯度基本定理 (fundamental theorem for gradients)：

$$\int_{\boldsymbol{a}\mathcal{P}}^{\boldsymbol{b}} (\nabla f)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \int_{\boldsymbol{a}\mathcal{P}}^{\boldsymbol{b}} \mathrm{d}\, f = f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})$$

与路径 $\mathcal{P}$ 无关

利用了全微分：$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$

散度定理 (divergence theorem)，也称高斯定理 (Gauss's theorem)：

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{V}} (\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}})\,\mathrm{d}\tau$$

散度定理

二、若干基本积分定理

梯度基本定理 (fundamental theorem for gradients)：

$$\int_{\boldsymbol{a}\mathcal{P}}^{\boldsymbol{b}} (\nabla f)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \int_{\boldsymbol{a}\mathcal{P}}^{\boldsymbol{b}} \mathrm{d}\, f = f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})$$

与路径 $\mathcal{P}$ 无关

利用了全微分：$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$

散度定理 (divergence theorem)，也称高斯定理 (Gauss's theorem)：

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\, \mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}})\, \mathrm{d}\tau$$

散度定理

推广：

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{A}}\, \mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{V}} (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}})\, \mathrm{d}\tau$$

二、若干基本积分定理

梯度基本定理 (fundamental theorem for gradients)：

$$\int_{\boldsymbol{a}\mathcal{P}}^{\boldsymbol{b}} (\nabla f)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \int_{\boldsymbol{a}\mathcal{P}}^{\boldsymbol{b}} \mathrm{d}\, f = f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})$$

与路径 $\mathcal{P}$ 无关

利用了全微分：$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$

散度定理 (divergence theorem)，也称高斯定理 (Gauss's theorem)：

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{V}} (\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}})\,\mathrm{d}\tau$$

散度定理

推广：

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{V}} (\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}})\,\mathrm{d}\tau$$

旋度定理

二、若干基本积分定理

梯度基本定理 (fundamental theorem for gradients)：

$$\int_{a\mathcal{P}}^{b} (\nabla f) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{a\mathcal{P}}^{b} \mathrm{d}\, f = f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})$$

与路径 $\mathcal{P}$ 无关

利用了全微分：$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

散度定理 (divergence theorem)，也称高斯定理 (Gauss's theorem)：

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{n} \cdot \vec{A}\, \mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \vec{A})\, \mathrm{d}\tau$$

散度定理

推广：

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{n} \times \vec{A}\, \mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{V}} (\nabla \times \vec{A})\, \mathrm{d}\tau$$

旋度定理

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{n} f\, \mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{V}} (\nabla f)\, \mathrm{d}\tau$$

二、若干基本积分定理

梯度基本定理 (fundamental theorem for gradients)：

$$\int_{a\mathcal{P}}^{b}(\nabla f)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \int_{a\mathcal{P}}^{b}\mathrm{d}\,f = f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})$$

与路径 $\mathcal{P}$ 无关

利用了全微分：$\mathrm{d}f = \nabla f\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$

散度定理 (divergence theorem)，也称高斯定理 (Gauss's theorem)：

$$\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{V}}(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}})\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{散度定理}$$

推广：

$$\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{V}}(\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}})\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{旋度定理}$$

$$\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}f\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{V}}(\nabla f)\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{梯度定理}$$

Stokes' 定理 (Stokes' theorem):

Stokes' 定理 (Stokes' theorem):

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \int_S \left[\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}})\right] \mathrm{d}\sigma$$

Stokes' 定理 (Stokes' theorem):

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \int_S \left[\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}})\right] \mathrm{d}\sigma$$

利用 $\vec{\boldsymbol{a}} \cdot (\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{c}}) = (\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}) \cdot \vec{\boldsymbol{c}}$

Stokes' 定理 (Stokes' theorem):

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \int_S \left[\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}})\right] \mathrm{d}\sigma$$

利用 $\vec{\boldsymbol{a}} \cdot (\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{c}}) = (\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}) \cdot \vec{\boldsymbol{c}}$

改写:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \int_S \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\right] \mathrm{d}\sigma$$

Stokes' 定理 (Stokes' theorem):

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \int_S \left[\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}})\right] \mathrm{d}\sigma$$

利用 $\vec{\boldsymbol{a}} \cdot (\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{c}}) = (\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}) \cdot \vec{\boldsymbol{c}}$

改写:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \int_S \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\right] \mathrm{d}\sigma$$

推广:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \int_S \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{A}}\right] \mathrm{d}\sigma$$

Stokes' 定理 (Stokes' theorem):

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \int_S \left[\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}})\right] \mathrm{d}\sigma$$

利用 $\vec{\boldsymbol{a}} \cdot (\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{c}}) = (\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}) \cdot \vec{\boldsymbol{c}}$

改写:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \int_S \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\right] \mathrm{d}\sigma$$

推广:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \int_S \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{A}}\right] \mathrm{d}\sigma$$

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\, f = \int_S \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) f\right] \mathrm{d}\sigma$$

Stokes' 定理 (Stokes' theorem):

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \int_S \left[\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}})\right] \mathrm{d}\sigma$$

利用 $\vec{\boldsymbol{a}} \cdot (\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{c}}) = (\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}) \cdot \vec{\boldsymbol{c}}$

改写:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \int_S \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\right] \mathrm{d}\sigma$$

推广:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \int_S \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{A}}\right] \mathrm{d}\sigma$$

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\, f = \int_S \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) f\right] \mathrm{d}\sigma$$

Green 定理:

Stokes' 定理 (Stokes' theorem):

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \int_S \left[\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}})\right] \mathrm{d}\sigma$$

利用 $\vec{\boldsymbol{a}} \cdot (\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{c}}) = (\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}) \cdot \vec{\boldsymbol{c}}$

改写:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \int_S \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\right] \mathrm{d}\sigma$$

推广:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \int_S \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{A}}\right] \mathrm{d}\sigma$$

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\, f = \int_S \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) f\right] \mathrm{d}\sigma$$

Green 定理:

$$\int_{\mathcal{V}} (U\nabla^2 V + \nabla V \cdot \nabla U)\, \mathrm{d}\tau = \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (U\nabla V)\, \mathrm{d}\sigma$$

Stokes' 定理 (Stokes' theorem):

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \int_S \left[\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}})\right] \mathrm{d}\sigma$$

利用 $\vec{\boldsymbol{a}} \cdot (\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{c}}) = (\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}) \cdot \vec{\boldsymbol{c}}$

改写:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \int_S \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\right] \mathrm{d}\sigma$$

推广:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \int_S \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{A}}\right] \mathrm{d}\sigma$$

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\, f = \int_S \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) f\right] \mathrm{d}\sigma$$

Green 定理:

$$\int_{\mathcal{V}} (U\nabla^2 V + \nabla V \cdot \nabla U)\, \mathrm{d}\tau = \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (U \nabla V)\, \mathrm{d}\sigma$$

$$\int_{\mathcal{V}} (U\nabla^2 V - V\nabla^2 U)\, \mathrm{d}\tau = \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (U \nabla V - V \nabla U)\, \mathrm{d}\sigma$$

三、例题

三、例题

试利用 $\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \int_{\mathcal{S}} \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \cdot \vec{\boldsymbol{A}} \right] \mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) \, \mathrm{d}\sigma$ 证明

三、例题

试利用 $\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \int_{\mathcal{S}} \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \cdot \vec{\boldsymbol{A}} \right] \mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}})\, \mathrm{d}\sigma$ 证明

$$\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \int_{\mathcal{S}} \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{A}} \right] \mathrm{d}\sigma$$

三、例题

试利用 $\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \int_{\mathcal{S}} [(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \cdot \vec{\boldsymbol{A}}]\, \mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}})\, \mathrm{d}\sigma$ 证明

$$\vec{\boldsymbol{I}}_1 = \oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \int_{\mathcal{S}} [(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{A}}]\, \mathrm{d}\sigma$$

三、例题

试利用 $\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \int_{\mathcal{S}} [(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \cdot \vec{\boldsymbol{A}}] \, \mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) \, \mathrm{d}\sigma$ 证明

$$\vec{\boldsymbol{I}}_1 = \oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \int_{\mathcal{S}} [(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{A}}] \, \mathrm{d}\sigma = \vec{\boldsymbol{I}}_2$$

三、例题

试利用 $\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \int_{\mathcal{S}} [(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \cdot \vec{\boldsymbol{A}}] \, \mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) \, \mathrm{d}\sigma$ 证明

$$\vec{\boldsymbol{I}}_1 = \oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \int_{\mathcal{S}} [(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{A}}] \, \mathrm{d}\sigma = \vec{\boldsymbol{I}}_2$$

$\vec{\boldsymbol{a}}$ 为任意常矢量。

三、例题

试利用 $\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{A} = \int_{\mathcal{S}} [(\vec{n} \times \nabla) \cdot \vec{A}]\, \mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{S}} \vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{A})\, \mathrm{d}\sigma$ 证明

$$\vec{I}_1 = \oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{A} = \int_{\mathcal{S}} [(\vec{n} \times \nabla) \times \vec{A}]\, \mathrm{d}\sigma = \vec{I}_2$$

$\vec{a}$ 为任意常矢量。

$$\vec{a} \cdot \vec{I}_1 = \vec{a} \cdot \oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{A}$$

$\vec{a}$ 为任意常矢量

三、例题

试利用 $\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \int_{\mathcal{S}} [(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \cdot \vec{\boldsymbol{A}}] \,\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) \,\mathrm{d}\sigma$ 证明

$$\vec{\boldsymbol{I}}_1 = \oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \int_{\mathcal{S}} [(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{A}}] \,\mathrm{d}\sigma = \vec{\boldsymbol{I}}_2$$

$\vec{\boldsymbol{a}}$ 为任意常矢量。

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{I}}_1 = \vec{\boldsymbol{a}} \cdot \oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \oint_{\mathcal{P}} \vec{\boldsymbol{a}} \cdot (\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{A}})$$

$\vec{\boldsymbol{a}}$ 为任意常矢量

三、例题

试利用 $\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{l}\cdot\vec{A} = \int_{\mathcal{S}} [(\vec{n}\times\nabla)\cdot\vec{A}]\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{S}} \vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{A})\,\mathrm{d}\sigma$ 证明

$$\vec{I}_1 = \oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{l}\times\vec{A} = \int_{\mathcal{S}} [(\vec{n}\times\nabla)\times\vec{A}]\,\mathrm{d}\sigma = \vec{I}_2$$

$\vec{a}$ 为任意常矢量。

$$\vec{a}\cdot\vec{I}_1 = \vec{a}\cdot\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{l}\times\vec{A} = \oint_{\mathcal{P}} \vec{a}\cdot(\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{A})$$

$\vec{a}$ 为任意常矢量

利用：$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$

三、例题

试利用 $\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{A} = \int_{\mathcal{S}} [(\vec{n} \times \nabla) \cdot \vec{A}] \, \mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{S}} \vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{A}) \, \mathrm{d}\sigma$ 证明

$$\vec{I}_1 = \oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{A} = \int_{\mathcal{S}} [(\vec{n} \times \nabla) \times \vec{A}] \, \mathrm{d}\sigma = \vec{I}_2$$

$\vec{a}$ 为任意常矢量。

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{I}_1 &= \vec{a} \cdot \oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{A} = \oint_{\mathcal{P}} \vec{a} \cdot (\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{A}) \\ &= \oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{l} \cdot (\vec{A} \times \vec{a}) \end{aligned}$$

$\vec{a}$ 为任意常矢量

利用：$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$

三、例题

试利用 $\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{l}\cdot\vec{A} = \int_{\mathcal{S}} \left[(\vec{n}\times\nabla)\cdot\vec{A}\right]\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{S}} \vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{A})\,\mathrm{d}\sigma$ 证明

$$\vec{I}_1 = \oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{l}\times\vec{A} = \int_{\mathcal{S}} \left[(\vec{n}\times\nabla)\times\vec{A}\right]\mathrm{d}\sigma = \vec{I}_2$$

$\vec{a}$ 为任意常矢量。

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{I}_1 &= \vec{a}\cdot\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{l}\times\vec{A} = \oint_{\mathcal{P}} \vec{a}\cdot(\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{A}) \\ &= \oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{l}\cdot(\vec{A}\times\vec{a})\end{aligned}$$

$\vec{a}$ 为任意常矢量

利用：$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$

利用 $\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{l}\cdot\vec{A} = \int_{\mathcal{S}} \vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{A})\,\mathrm{d}\sigma$

三、例题

试利用 $\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{l}\cdot\vec{A} = \int_{\mathcal{S}} [(\vec{n}\times\nabla)\cdot\vec{A}]\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{S}} \vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{A})\,\mathrm{d}\sigma$ 证明

$$\vec{I}_1 = \oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{l}\times\vec{A} = \int_{\mathcal{S}} [(\vec{n}\times\nabla)\times\vec{A}]\,\mathrm{d}\sigma = \vec{I}_2$$

$\vec{a}$ 为任意常矢量。

$$\vec{a}\cdot\vec{I}_1 = \vec{a}\cdot\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{l}\times\vec{A} = \oint_{\mathcal{P}} \vec{a}\cdot(\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{A})$$

$\vec{a}$ 为任意常矢量

$$= \oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{l}\cdot(\vec{A}\times\vec{a})$$

利用：$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$

$$= \int_{\mathcal{S}} \vec{n}\cdot[\nabla\times(\vec{A}\times\vec{a})]\,\mathrm{d}\sigma$$

利用 $\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{l}\cdot\vec{A} = \int_{\mathcal{S}} \vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{A})\,\mathrm{d}\sigma$

三、例题

试利用 $\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{A} = \int_{\mathcal{S}} [(\vec{n} \times \nabla) \cdot \vec{A}] \, \mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{S}} \vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{A}) \, \mathrm{d}\sigma$ 证明

$$\vec{I}_1 = \oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{A} = \int_{\mathcal{S}} [(\vec{n} \times \nabla) \times \vec{A}] \, \mathrm{d}\sigma = \vec{I}_2$$

$\vec{a}$ 为任意常矢量。

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{I}_1 &= \vec{a} \cdot \oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{A} = \oint_{\mathcal{P}} \vec{a} \cdot (\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{A}) \\ &= \oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{l} \cdot (\vec{A} \times \vec{a}) \quad = \int_{\mathcal{S}} \vec{n} \cdot [\nabla \times (\vec{A} \times \vec{a})] \, \mathrm{d}\sigma \\ &= \int_{\mathcal{S}} \vec{n} \cdot [\nabla \times (\vec{A} \times \vec{a})] \, \mathrm{d}\sigma \end{aligned}$$

$\vec{a}$ 为任意常矢量

三、例题

试利用 $\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\cdot\vec{\boldsymbol{A}} = \int_{\mathcal{S}} \left[(\vec{\boldsymbol{n}}\times\nabla)\cdot\vec{\boldsymbol{A}}\right]\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}})\,\mathrm{d}\sigma$ 证明

$$\vec{\boldsymbol{I}}_1 = \oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\times\vec{\boldsymbol{A}} = \int_{\mathcal{S}} \left[(\vec{\boldsymbol{n}}\times\nabla)\times\vec{\boldsymbol{A}}\right]\mathrm{d}\sigma = \vec{\boldsymbol{I}}_2$$

$\vec{\boldsymbol{a}}$ 为任意常矢量。

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{I}}_1 &= \vec{\boldsymbol{a}}\cdot\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\times\vec{\boldsymbol{A}} = \oint_{\mathcal{P}} \vec{\boldsymbol{a}}\cdot(\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\times\vec{\boldsymbol{A}}) \\ &= \oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\cdot(\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{a}}) \quad = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\nabla\times(\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{a}})\right]\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

$\vec{\boldsymbol{a}}$ 为任意常矢量

利用 $\nabla\times(\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{a}}) = (\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\nabla)\vec{\boldsymbol{A}} - \vec{\boldsymbol{a}}(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}) + \vec{\boldsymbol{A}}(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{a}}) - (\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\nabla)\vec{\boldsymbol{a}}$

三、例题

试利用 $\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\cdot\vec{\boldsymbol{A}} = \int_{\mathcal{S}}[(\vec{\boldsymbol{n}}\times\nabla)\cdot\vec{\boldsymbol{A}}]\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}})\,\mathrm{d}\sigma$ 证明

$$\vec{\boldsymbol{I}}_1 = \oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\times\vec{\boldsymbol{A}} = \int_{\mathcal{S}}[(\vec{\boldsymbol{n}}\times\nabla)\times\vec{\boldsymbol{A}}]\,\mathrm{d}\sigma = \vec{\boldsymbol{I}}_2$$

$\vec{\boldsymbol{a}}$ 为任意常矢量。

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{I}}_1 &= \vec{\boldsymbol{a}}\cdot\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\times\vec{\boldsymbol{A}} = \oint_{\mathcal{P}} \vec{\boldsymbol{a}}\cdot(\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\times\vec{\boldsymbol{A}}) \\
&= \oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\cdot(\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{a}}) \quad = \int_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot[\nabla\times(\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{a}})]\,\mathrm{d}\sigma \\
&= \int_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot[(\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\nabla)\vec{\boldsymbol{A}} - \vec{\boldsymbol{a}}(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}})]\,\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

$\vec{\boldsymbol{a}}$ 为任意常矢量

利用 $\nabla\times(\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{a}}) = (\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\nabla)\vec{\boldsymbol{A}} - \vec{\boldsymbol{a}}(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}) + \vec{\boldsymbol{A}}(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{a}}) - (\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\nabla)\vec{\boldsymbol{a}}$

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{I}}_1 = \boxed{\int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \left[(\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \nabla) \vec{\boldsymbol{A}} - \vec{\boldsymbol{a}} (\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}}) \right] \mathrm{d}\sigma}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{I}}_1 = \boxed{\int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \left[(\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \nabla) \vec{\boldsymbol{A}} - \vec{\boldsymbol{a}} (\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}}) \right] \mathrm{d}\sigma}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{I}}_2 \;\; = \vec{\boldsymbol{a}} \cdot \int_{\mathcal{S}} (\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{A}} \, \mathrm{d}\sigma$$

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{I}}_1 = \boxed{\int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot [(\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \nabla)\vec{\boldsymbol{A}} - \vec{\boldsymbol{a}}(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}})]\, \mathrm{d}\sigma}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{I}}_2 = \vec{\boldsymbol{a}} \cdot \int_{\mathcal{S}} (\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{A}}\, \mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{a}} \cdot [(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{A}}]\, \mathrm{d}\sigma$$

$$\vec{a}\cdot\vec{I}_1 = \boxed{\int_{\mathcal{S}} \vec{n}\cdot[(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{A} - \vec{a}(\nabla\cdot\vec{A})]\,\mathrm{d}\sigma}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{I}_2 \;= \vec{a}\cdot\int_{\mathcal{S}}(\vec{n}\times\nabla)\times\vec{A}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{S}}\vec{a}\cdot[(\vec{n}\times\nabla)\times\vec{A}]\,\mathrm{d}\sigma$$

利用 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{I}}_1 = \boxed{\int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot [(\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \nabla)\vec{\boldsymbol{A}} - \vec{\boldsymbol{a}}(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}})]\, \mathrm{d}\sigma}$$

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{I}}_2 &= \vec{\boldsymbol{a}} \cdot \int_{\mathcal{S}} (\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{A}}\, \mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{a}} \cdot [(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{A}}]\, \mathrm{d}\sigma \\ &= \int_{\mathcal{S}} [\vec{\boldsymbol{a}} \times (\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla)] \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\, \mathrm{d}\sigma \end{aligned}$$

利用 $\vec{\boldsymbol{a}} \cdot (\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{c}}) = (\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}) \cdot \vec{\boldsymbol{c}}$

$$\vec{a}\cdot\vec{I}_1 = \boxed{\int_{\mathcal{S}} \vec{n}\cdot\left[(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{A} - \vec{a}(\nabla\cdot\vec{A})\right] \mathrm{d}\sigma}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{I}_2 &= \vec{a}\cdot\int_{\mathcal{S}} (\vec{n}\times\nabla)\times\vec{A}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{S}} \vec{a}\cdot[(\vec{n}\times\nabla)\times\vec{A}]\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_{\mathcal{S}} [\vec{a}\times(\vec{n}\times\nabla)]\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

利用 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

利用 $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - (\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c}$

$$\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{I}}_1 = \boxed{\int_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[(\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\nabla)\vec{\boldsymbol{A}}-\vec{\boldsymbol{a}}(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}})\right]\mathrm{d}\sigma}$$

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{I}}_2 &= \vec{\boldsymbol{a}}\cdot\int_{\mathcal{S}}(\vec{\boldsymbol{n}}\times\nabla)\times\vec{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\left[(\vec{\boldsymbol{n}}\times\nabla)\times\vec{\boldsymbol{A}}\right]\mathrm{d}\sigma\\ &= \int_{\mathcal{S}}\left[\vec{\boldsymbol{a}}\times(\vec{\boldsymbol{n}}\times\nabla)\right]\cdot\vec{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{d}\sigma \qquad \text{利用 } \vec{\boldsymbol{a}}\cdot(\vec{\boldsymbol{b}}\times\vec{\boldsymbol{c}}) = (\vec{\boldsymbol{a}}\times\vec{\boldsymbol{b}})\cdot\vec{\boldsymbol{c}}\\ &= \int_{\mathcal{S}}\underbrace{\left[\vec{\boldsymbol{n}}\overbrace{(\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\nabla)}^{\text{标量算符}} - \overbrace{(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})}^{\text{标量}}\nabla\right]}_{\text{矢量算符}}\cdot\vec{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{d}\sigma \qquad \text{利用 } \vec{\boldsymbol{a}}\times(\vec{\boldsymbol{b}}\times\vec{\boldsymbol{c}}) = \vec{\boldsymbol{b}}(\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{c}}) - (\vec{\boldsymbol{b}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})\vec{\boldsymbol{c}}\end{aligned}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{I}_1 = \boxed{\int_{\mathcal{S}} \vec{n}\cdot\left[(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{A} - \vec{a}(\nabla\cdot\vec{A})\right]\mathrm{d}\sigma}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{I}_2 &= \vec{a}\cdot\int_{\mathcal{S}}(\vec{n}\times\nabla)\times\vec{A}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{S}}\vec{a}\cdot[(\vec{n}\times\nabla)\times\vec{A}]\,\mathrm{d}\sigma \\
&= \int_{\mathcal{S}}[\vec{a}\times(\vec{n}\times\nabla)]\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}\sigma \qquad \text{利用 } \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} \\
&= \int_{\mathcal{S}}\underbrace{[\vec{n}\,\overbrace{(\vec{a}\cdot\nabla)}^{\text{标量算符}} - \overbrace{(\vec{n}\cdot\vec{a})}^{\text{标量}}\nabla]}_{\text{矢量算符}}\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}\sigma \qquad \text{利用 } \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - (\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c} \\
&= \int_{\mathcal{S}}\left[\vec{n}\cdot(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{n}\cdot\vec{a})(\nabla\cdot\vec{A})\right]\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{I}_1 = \boxed{\int_{\mathcal{S}} \vec{n}\cdot\left[(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{A} - \vec{a}(\nabla\cdot\vec{A})\right]\mathrm{d}\sigma}$$

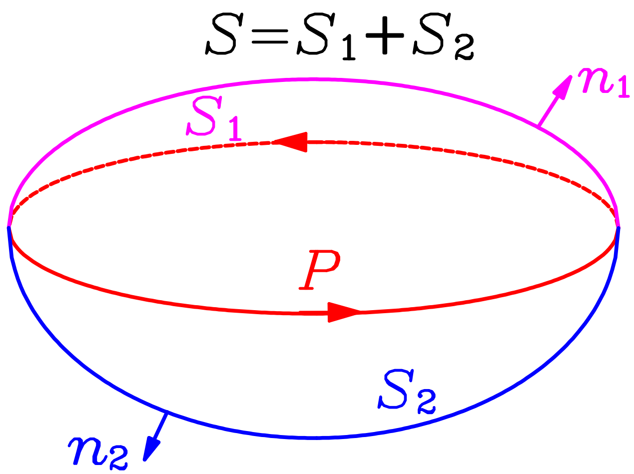
$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{I}_2 &= \vec{a}\cdot\int_{\mathcal{S}}(\vec{n}\times\nabla)\times\vec{A}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{S}}\vec{a}\cdot[(\vec{n}\times\nabla)\times\vec{A}]\,\mathrm{d}\sigma \\
&= \int_{\mathcal{S}}[\vec{a}\times(\vec{n}\times\nabla)]\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}\sigma \qquad \text{利用 } \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} \\
&= \int_{\mathcal{S}}\underbrace{\left[\vec{n}\overbrace{(\vec{a}\cdot\nabla)}^{\text{标量算符}} - \overbrace{(\vec{n}\cdot\vec{a})}^{\text{标量}}\nabla\right]}_{\text{矢量算符}}\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}\sigma \qquad \text{利用 } \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - (\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c} \\
&= \int_{\mathcal{S}}\left[\vec{n}\cdot(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{n}\cdot\vec{a})(\nabla\cdot\vec{A})\right]\mathrm{d}\sigma \\
&= \boxed{\int_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot\left[(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{A} - \vec{a}(\nabla\cdot\vec{A})\right]\mathrm{d}\sigma}
\end{aligned}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{I}_1 = \boxed{\int_{\mathcal{S}} \vec{n}\cdot\left[(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{A}-\vec{a}(\nabla\cdot\vec{A})\right]\mathrm{d}\sigma}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{I}_2 &= \vec{a}\cdot\int_{\mathcal{S}}(\vec{n}\times\nabla)\times\vec{A}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{S}}\vec{a}\cdot\left[(\vec{n}\times\nabla)\times\vec{A}\right]\mathrm{d}\sigma \\
&= \int_{\mathcal{S}}\left[\vec{a}\times(\vec{n}\times\nabla)\right]\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}\sigma \qquad \text{利用 } \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} \\
&= \int_{\mathcal{S}}\underbrace{\left[\vec{n}\overbrace{(\vec{a}\cdot\nabla)}^{\text{标量算符}} - \overbrace{(\vec{n}\cdot\vec{a})}^{\text{标量}}\nabla\right]}_{\text{矢量算符}}\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}\sigma \qquad \text{利用 } \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - (\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c} \\
&= \int_{\mathcal{S}}\left[\vec{n}\cdot(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{n}\cdot\vec{a})(\nabla\cdot\vec{A})\right]\mathrm{d}\sigma \\
&= \boxed{\int_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot\left[(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{A}-\vec{a}(\nabla\cdot\vec{A})\right]\mathrm{d}\sigma} = \vec{a}\cdot\vec{I}_1
\end{aligned}$$

试利用 $\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \int_{\mathcal{S}_1} \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{A}}\right] \mathrm{d}\sigma$ 证明

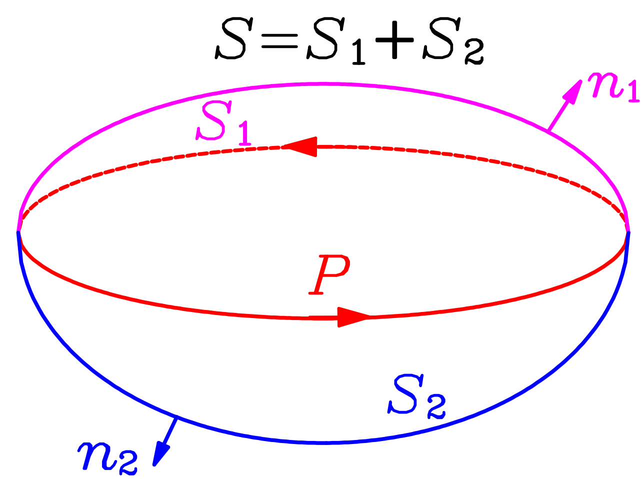
$\vec{\boldsymbol{S}}_1 = \frac{1}{2} \oint \vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$　　若闭合路径 $\mathcal{P}$ 在一平面内，则 $|\vec{\boldsymbol{S}}_1|$ 为 $\mathcal{P}$ 围成的面积



试利用 $\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{A} = \int_{\mathcal{S}_1} \left[(\vec{n} \times \nabla) \times \vec{A}\right] \mathrm{d}\sigma$ 证明

$\vec{S}_1 = \frac{1}{2}\oint \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{l}$　　若闭合路径 $\mathcal{P}$ 在一平面内，则 $|\vec{S}_1|$ 为 $\mathcal{P}$ 围成的面积

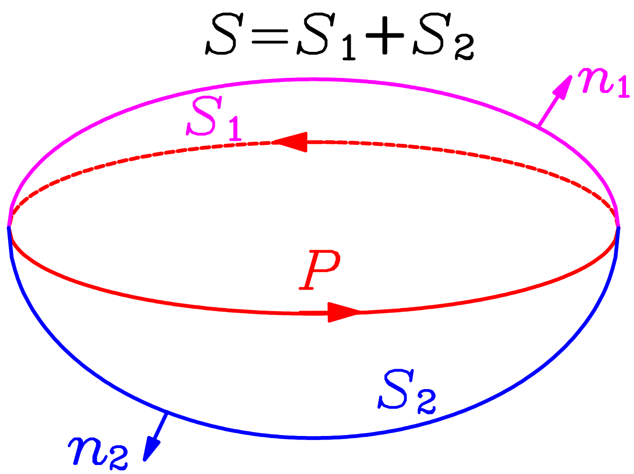
证：
$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{P}} \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{l} &= -\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r} \\ &= -\int_{\mathcal{S}_1} \left[(\vec{n} \times \nabla) \times \vec{r}\right] \mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$



试利用 $\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \int_{\mathcal{S}_1} \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{A}}\right] \mathrm{d}\sigma$ 证明

$\vec{\boldsymbol{S}}_1 = \frac{1}{2} \oint \vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$ 若闭合路径 $\mathcal{P}$ 在一平面内，则 $|\vec{\boldsymbol{S}}_1|$ 为 $\mathcal{P}$ 围成的面积

证：
$$
\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{P}} \vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} &= -\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{r}} \\
&= -\int_{\mathcal{S}_1} \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{r}}\right] \mathrm{d}\sigma \\
&\quad \text{利用 } (\vec{\boldsymbol{A}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{r}} = -2\vec{\boldsymbol{A}} \\
&= 2 \int_{\mathcal{S}_1} \vec{\boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}
$$



试利用 $\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \int_{\mathcal{S}_1} \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{A}}\right] \mathrm{d}\sigma$ 证明

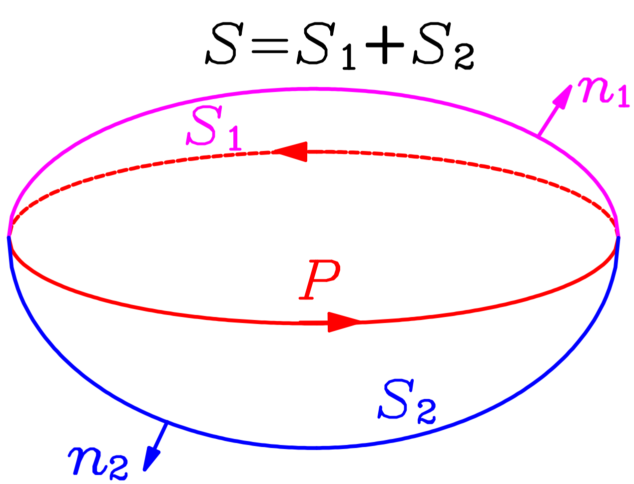
$\vec{\boldsymbol{S}}_1 = \frac{1}{2}\oint \vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$　　若闭合路径 $\mathcal{P}$ 在一平面内，则 $|\vec{\boldsymbol{S}}_1|$ 为 $\mathcal{P}$ 围成的面积

证：

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{P}} \vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} &= -\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{r}} \\
&= -\int_{\mathcal{S}_1} \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{r}}\right] \mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

利用 $(\vec{\boldsymbol{A}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{r}} = -2\vec{\boldsymbol{A}}$

$$= 2\int_{\mathcal{S}_1} \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma = 2\vec{\boldsymbol{S}}_1$$



试利用 $\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \int_{\mathcal{S}_1} \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{A}}\right] \mathrm{d}\sigma$ 证明

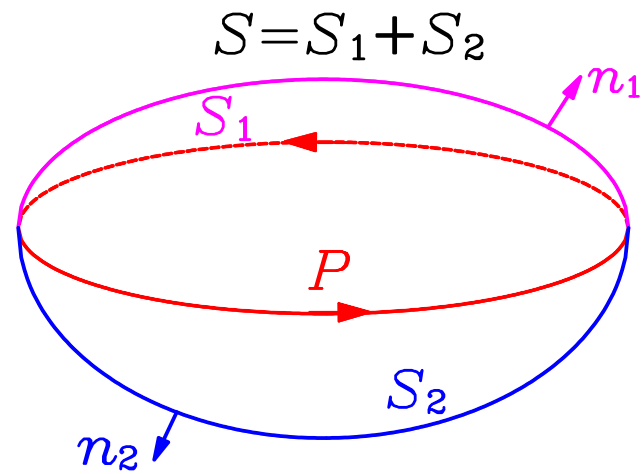
$\vec{\boldsymbol{S}}_1 = \dfrac{1}{2} \oint \vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$　　若闭合路径 $\mathcal{P}$ 在一平面内，则 $|\vec{\boldsymbol{S}}_1|$ 为 $\mathcal{P}$ 围成的面积

证：
$$\oint_{\mathcal{P}} \vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = -\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{r}}$$
$$= -\int_{\mathcal{S}_1} \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{r}}\right] \mathrm{d}\sigma$$

利用 $(\vec{\boldsymbol{A}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{r}} = -2\vec{\boldsymbol{A}}$

$$= 2\int_{\mathcal{S}_1} \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma = 2\vec{\boldsymbol{S}}_1$$

另：$\oint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}}$



试利用 $\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \int_{\mathcal{S}_1} \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{A}}\right] \mathrm{d}\sigma$ 证明

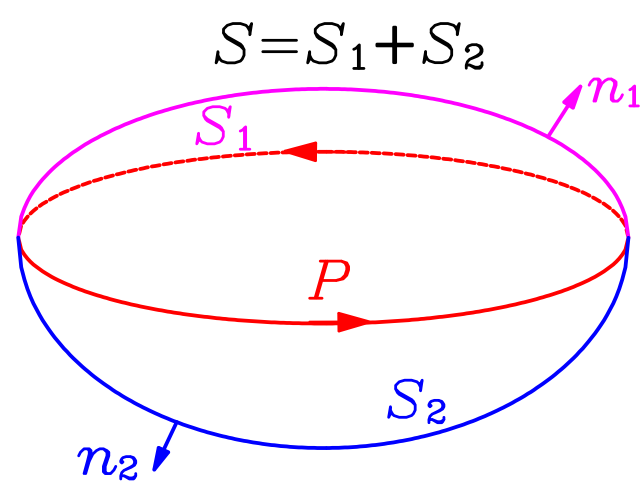
$\vec{\boldsymbol{S}}_1 = \frac{1}{2}\oint \vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$ 若闭合路径 $\mathcal{P}$ 在一平面内，则 $|\vec{\boldsymbol{S}}_1|$ 为 $\mathcal{P}$ 围成的面积

证：
$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{P}} \vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} &= -\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{r}} \\
&= -\int_{\mathcal{S}_1} \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{r}}\right] \mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

利用 $(\vec{\boldsymbol{A}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{r}} = -2\vec{\boldsymbol{A}}$

$$= 2\int_{\mathcal{S}_1} \vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma = 2\vec{\boldsymbol{S}}_1$$

另：$\oint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma$



试利用 $\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \int_{\mathcal{S}_1} \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{A}} \right] \mathrm{d}\sigma$ 证明

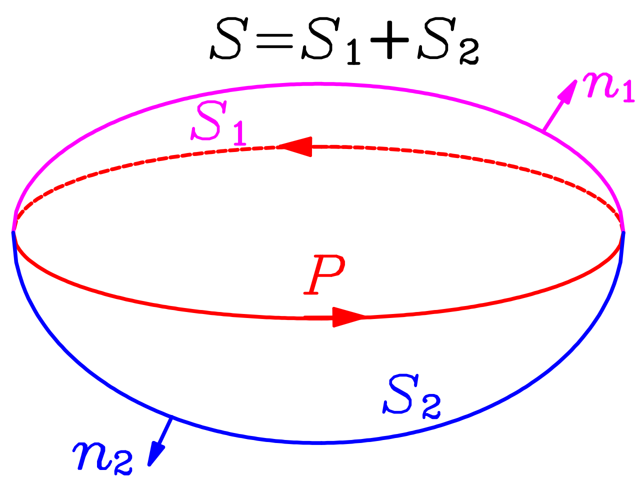
$\vec{\boldsymbol{S}}_1 = \frac{1}{2} \oint \vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$ 若闭合路径 $\mathcal{P}$ 在一平面内，则 $|\vec{\boldsymbol{S}}_1|$ 为 $\mathcal{P}$ 围成的面积

证：
$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{P}} \vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} &= -\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{r}} \\ &= -\int_{\mathcal{S}_1} \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{r}} \right] \mathrm{d}\sigma \end{aligned}$$

利用 $(\vec{\boldsymbol{A}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{r}} = -2\vec{\boldsymbol{A}}$

$$= 2 \int_{\mathcal{S}_1} \vec{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}\sigma = 2\vec{\boldsymbol{S}}_1$$

另：
$$\oint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}\sigma = \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \, 1 \, \mathrm{d}\sigma$$



试利用 $\displaystyle\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \int_{\mathcal{S}_1} \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{A}}\right] \mathrm{d}\sigma$ 证明

$\displaystyle\vec{\boldsymbol{S}}_1 = \frac{1}{2}\oint \vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$ 若闭合路径 $\mathcal{P}$ 在一平面内，则 $|\vec{\boldsymbol{S}}_1|$ 为 $\mathcal{P}$ 围成的面积

证：
$$\oint_{\mathcal{P}} \vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = -\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{r}}$$
$$= -\int_{\mathcal{S}_1} \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{r}}\right] \mathrm{d}\sigma$$

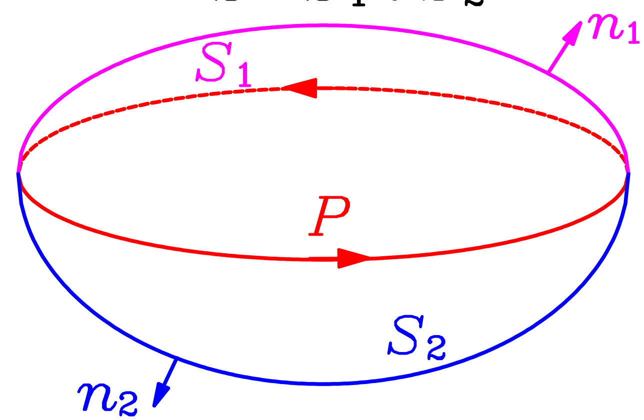
利用 $(\vec{\boldsymbol{A}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{r}} = -2\vec{\boldsymbol{A}}$

$$= 2\int_{\mathcal{S}_1} \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma = 2\vec{\boldsymbol{S}}_1$$

另：
$$\oint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma = \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\, 1\, \mathrm{d}\sigma$$

$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$

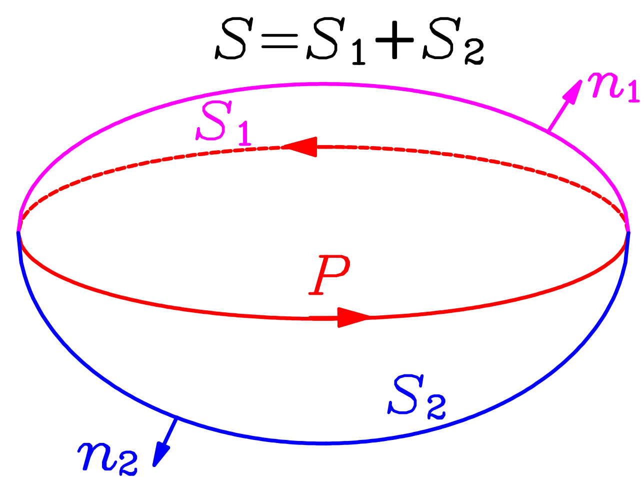
$S = S_1 + S_2$



试利用 $\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \int_{\mathcal{S}_1} \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{A}}\right] \mathrm{d}\sigma$ 证明

$\vec{\boldsymbol{S}}_1 = \dfrac{1}{2} \oint \vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$ 若闭合路径 $\mathcal{P}$ 在一平面内，则 $|\vec{\boldsymbol{S}}_1|$ 为 $\mathcal{P}$ 围成的面积

证：
$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{P}} \vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} &= -\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{r}} \\ &= -\int_{\mathcal{S}_1} \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{r}}\right] \mathrm{d}\sigma \\ &\quad \text{利用 } (\vec{\boldsymbol{A}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{r}} = -2\vec{\boldsymbol{A}} \\ &= 2\int_{\mathcal{S}_1} \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma = 2\vec{\boldsymbol{S}}_1\end{aligned}$$



另：
$$\oint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma = \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\, 1\, \mathrm{d}\sigma$$

$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$ 利用 $\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\, f\, \mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{V}} \nabla f\, \mathrm{d}\tau$

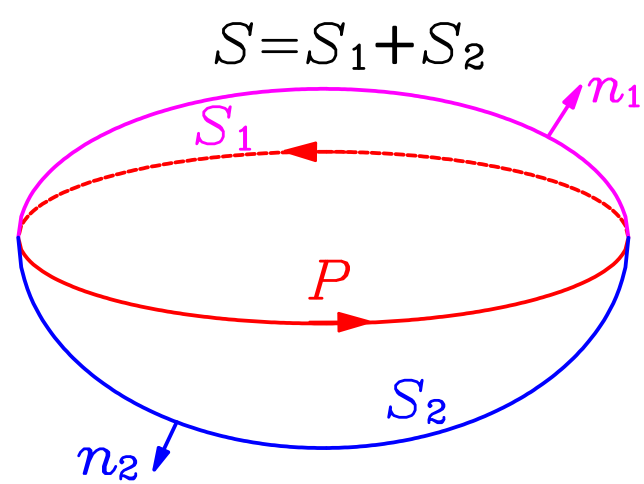
试利用 $\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \int_{\mathcal{S}_1} \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{A}}\right] \mathrm{d}\sigma$ 证明

$\vec{\boldsymbol{S}}_1 = \frac{1}{2}\oint \vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$ 若闭合路径 $\mathcal{P}$ 在一平面内，则 $|\vec{\boldsymbol{S}}_1|$ 为 $\mathcal{P}$ 围成的面积

证：
$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{P}} \vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} &= -\oint_{\mathcal{P}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{r}} \\
&= -\int_{\mathcal{S}_1} \left[(\vec{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{r}}\right] \mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

利用 $(\vec{\boldsymbol{A}} \times \nabla) \times \vec{\boldsymbol{r}} = -2\vec{\boldsymbol{A}}$

$$= 2\int_{\mathcal{S}_1} \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma = 2\vec{\boldsymbol{S}}_1$$



另：
$$\oint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma = \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\, 1\, \mathrm{d}\sigma$$

$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$ 利用 $\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\, f\, \mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{V}} \nabla f\, \mathrm{d}\tau$

$$\oint_{\mathcal{S}_1} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} + \oint_{\mathcal{S}_2} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \int_{\mathcal{V}} \nabla 1\, \mathrm{d}\tau = 0$$