

## § 3.5 静电边值问题：分离变量法

## § 3.5 静电边值问题：分离变量法

### 一、分离变量法

## § 3.5 静电边值问题：分离变量法

### 一、分离变量法

分离变量法适用于

## § 3.5 静电边值问题：分离变量法

### 一、分离变量法

分离变量法适用于

(1) 分区均匀体系，界面规则且区内  $\rho_f = 0$ ，从而静电势满足： $\nabla^2\varphi = 0$

## § 3.5 静电边值问题：分离变量法

### 一、分离变量法

分离变量法适用于

- (1) 分区均匀体系，界面规则且区内  $\rho_f = 0$ ，从而静电势满足： $\nabla^2\varphi = 0$
- (2) 如果某区  $\rho_f \neq 0$ ，但  $\rho_f$  的分布具有某种对称性，则先求出泊松方程

$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$  的一个特解  $\varphi_0$ ，再令  $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$   
由拉氏方程  $\nabla^2\varphi' = 0$  求出  $\varphi'$ 。

## § 3.5 静电边值问题：分离变量法

### 一、分离变量法

分离变量法适用于

- (1) 分区均匀体系，界面规则且区内  $\rho_f = 0$ ，从而静电势满足： $\nabla^2\varphi = 0$
- (2) 如果某区  $\rho_f \neq 0$ ，但  $\rho_f$  的分布具有某种对称性，则先求出泊松方程

$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$  的一个特解  $\varphi_0$ ，再令  $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$   
由拉氏方程  $\nabla^2\varphi' = 0$  求出  $\varphi'$ 。

分离变量法步骤

## § 3.5 静电边值问题：分离变量法

### 一、分离变量法

分离变量法适用于

- (1) 分区均匀体系，界面规则且区内  $\rho_f = 0$ ，从而静电势满足： $\nabla^2\varphi = 0$
- (2) 如果某区  $\rho_f \neq 0$ ，但  $\rho_f$  的分布具有某种对称性，则先求出泊松方程

$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$  的一个特解  $\varphi_0$ ，再令  $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$   
由拉氏方程  $\nabla^2\varphi' = 0$  求出  $\varphi'$ 。

分离变量法步骤

- (1) 根据界面对称性选取适当坐标系

## § 3.5 静电边值问题：分离变量法

### 一、分离变量法

分离变量法适用于

- (1) 分区均匀体系，界面规则且区内  $\rho_f = 0$ ，从而静电势满足： $\nabla^2\varphi = 0$
- (2) 如果某区  $\rho_f \neq 0$ ，但  $\rho_f$  的分布具有某种对称性，则先求出泊松方程

$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$  的一个特解  $\varphi_0$ ，再令  $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$   
由拉氏方程  $\nabla^2\varphi' = 0$  求出  $\varphi'$ 。

分离变量法步骤

- (1) 根据界面对称性选取适当坐标系
- (2) 基于数理方程的**通解**，写出方程的级数解



## § 3.5 静电边值问题：分离变量法

### 一、分离变量法

#### 分离变量法适用于

- (1) 分区均匀体系，界面规则且区内  $\rho_f = 0$ ，从而静电势满足： $\nabla^2\varphi = 0$
- (2) 如果某区  $\rho_f \neq 0$ ，但  $\rho_f$  的分布具有某种对称性，则先求出泊松方程

$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$  的一个特解  $\varphi_0$ ，再令  $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$   
由拉氏方程  $\nabla^2\varphi' = 0$  求出  $\varphi'$ 。

#### 分离变量法步骤

- (1) 根据界面对称性选取适当坐标系
- (2) 基于数理方程的**通解**，写出方程的级数解
- (3) 去除不合物理意义的解

## § 3.5 静电边值问题：分离变量法

### 一、分离变量法

#### 分离变量法适用于

- (1) 分区均匀体系，界面规则且区内  $\rho_f = 0$ ，从而静电势满足： $\nabla^2\varphi = 0$
- (2) 如果某区  $\rho_f \neq 0$ ，但  $\rho_f$  的分布具有某种对称性，则先求出泊松方程

$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$  的一个特解  $\varphi_0$ ，再令  $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$   
由拉氏方程  $\nabla^2\varphi' = 0$  求出  $\varphi'$ 。

#### 分离变量法步骤

- (1) 根据界面对称性选取适当坐标系
- (2) 基于数理方程的**通解**，写出方程的级数解
- (3) 去除不合物理意义的解
- (4) 用**定解条件**确定级数解的系数

*Let there be light*

---

常用坐标系拉氏方程  $\nabla^2\varphi = 0$  的通解

# Let there be light

## 常用坐标系拉氏方程 $\nabla^2\varphi = 0$ 的通解

### 1. 球坐标 $(r, \theta, \phi)$ 下拉氏方程 $\nabla^2\varphi = 0$ 的通解:

一般旋转对称: 
$$\varphi_v = [a_v r^v + b_v r^{-(v+1)}] P_v(\cos \theta) \quad v \text{ 为 } 0 \text{ 或正实数}$$

# Let there be light

## 常用坐标系拉氏方程 $\nabla^2\varphi = 0$ 的通解

### 1. 球坐标 $(r, \theta, \phi)$ 下拉氏方程 $\nabla^2\varphi = 0$ 的通解:

一般旋转对称:  $\varphi_v = [a_v r^v + b_v r^{-(v+1)}] P_v(\cos \theta)$   $v$  为 0 或正实数

旋转对称且  $(0 \leq \theta \leq \pi)$ :  $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n r^n + b_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta)$   $n$  为 0 或正整数

Let there be light常用坐标系拉氏方程  $\nabla^2\varphi = 0$  的通解1. 球坐标  $(r, \theta, \phi)$  下拉氏方程  $\nabla^2\varphi = 0$  的通解:

一般旋转对称:  $\varphi_v = [a_v r^v + b_v r^{-(v+1)}] P_v(\cos \theta)$   $v$  为 0 或正实数

旋转对称且  $(0 \leq \theta \leq \pi)$ :  $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n r^n + b_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta)$   $n$  为 0 或正整数

$P_v(\cos \theta)$  为第一类勒让德函数:  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$ ,  $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

Let there be light常用坐标系拉氏方程  $\nabla^2\varphi = 0$  的通解1. 球坐标  $(r, \theta, \phi)$  下拉氏方程  $\nabla^2\varphi = 0$  的通解:

一般旋转对称:  $\varphi_v = [a_v r^v + b_v r^{-(v+1)}] P_v(\cos \theta)$   $v$  为 0 或正实数

旋转对称且  $(0 \leq \theta \leq \pi)$ :  $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n r^n + b_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta)$   $n$  为 0 或正整数

$P_v(\cos \theta)$  为第一类勒让德函数:  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$ ,  $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

2. 平面极坐标  $(\rho, \phi)$  下拉氏方程  $\nabla^2\varphi = 0$  的通解: (与  $z$  无关的场)

一般体系  
 $v$  为 0 或正实数

$$\varphi_v = \begin{cases} (a_0 + b_0 \ln \rho)(c_0 + d_0 \phi), & v = 0 \\ (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v})(c_v \cos v\phi + d_v \sin v\phi), & v \neq 0 \end{cases}$$

Let there be light常用坐标系拉氏方程  $\nabla^2\varphi = 0$  的通解1. 球坐标  $(r, \theta, \phi)$  下拉氏方程  $\nabla^2\varphi = 0$  的通解:

一般旋转对称:  $\varphi_v = [a_v r^v + b_v r^{-(v+1)}] P_v(\cos \theta)$   $v$  为 0 或正实数

旋转对称且  $(0 \leq \theta \leq \pi)$ :  $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n r^n + b_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta)$   $n$  为 0 或正整数

$P_v(\cos \theta)$  为第一类勒让德函数:  $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

2. 平面极坐标  $(\rho, \phi)$  下拉氏方程  $\nabla^2\varphi = 0$  的通解: (与  $z$  无关的场)

一般体系  
 $v$  为 0 或正实数

$$\varphi_v = \begin{cases} (a_0 + b_0 \ln \rho)(c_0 + d_0 \phi), & v = 0 \\ (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v})(c_v \cos v\phi + d_v \sin v\phi), & v \neq 0 \end{cases}$$

$(0 \leq \phi \leq \pi)$ :  
 $n$  为正整数

$$\varphi = (a_0 + b_0 \ln \rho)(c_0 + d_0 \phi) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \rho^n + b_n \rho^{-n})(c_n \cos n\phi + d_n \sin n\phi)$$



# Let there be light

## 常用坐标系拉氏方程 $\nabla^2\varphi = 0$ 的通解

### 1. 球坐标 $(r, \theta, \phi)$ 下拉氏方程 $\nabla^2\varphi = 0$ 的通解:

一般旋转对称:  $\varphi_v = [a_v r^v + b_v r^{-(v+1)}] P_v(\cos \theta)$   $v$  为 0 或正实数

旋转对称且  $(0 \leq \theta \leq \pi)$ :  $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n r^n + b_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta)$   $n$  为 0 或正整数

$P_v(\cos \theta)$  为第一类勒让德函数:  $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

### 2. 平面极坐标 $(\rho, \phi)$ 下拉氏方程 $\nabla^2\varphi = 0$ 的通解: (与 $z$ 无关的场)

一般体系  
 $v$  为 0 或正实数

$$\varphi_v = \begin{cases} (a_0 + b_0 \ln \rho)(c_0 + d_0 \phi), & v = 0 \\ (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v})(c_v \cos v\phi + d_v \sin v\phi), & v \neq 0 \end{cases}$$

$(0 \leq \phi \leq \pi)$ :  
 $n$  为正整数

$$\varphi = (a_0 + b_0 \ln \rho)(c_0 + d_0 \phi) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \rho^n + b_n \rho^{-n})(c_n \cos n\phi + d_n \sin n\phi)$$

级数的系数以及  $v$  由边界条件和边值关系确定

# *Let there be light*

## 二、例题

# Let there be light

---

## 二、例题

例 1: 半径为  $a$  介电常数为  $\epsilon_1$  的介质球, 放置于均匀外场  $\vec{E}_0$  中, 球外介质的介电常数为  $\epsilon_2$ 。

# Let there be light

## 二、例题

例 1: 半径为  $a$  介电常数为  $\epsilon_1$  的介质球, 放置于均匀外场  $\vec{E}_0$  中, 球外介质的介电常数为  $\epsilon_2$ 。

界面为球, 取球坐标, 原点于介质球球心,  $z$  轴沿  $\vec{E}_0$  方向

设球内外电势分别为  $\varphi_1, \varphi_2$ ,

# Let there be light

## 二、例题

例 1: 半径为  $a$  介电常数为  $\epsilon_1$  的介质球, 放置于均匀外场  $\vec{E}_0$  中, 球外介质的介电常数为  $\epsilon_2$ 。

界面为球, 取球坐标, 原点于介质球球心,  $z$  轴沿  $\vec{E}_0$  方向

设球内外电势分别为  $\varphi_1, \varphi_2$ ,

定解条件: (1) 拉氏方程:  $\nabla^2 \varphi = 0$

# Let there be light

## 二、例题

例 1: 半径为  $a$  介电常数为  $\epsilon_1$  的介质球, 放置于均匀外场  $\vec{E}_0$  中, 球外介质的介电常数为  $\epsilon_2$ 。

界面为球, 取球坐标, 原点于介质球球心,  $z$  轴沿  $\vec{E}_0$  方向

设球内外电势分别为  $\varphi_1, \varphi_2$ ,

定解条件: (1) 拉氏方程:  $\nabla^2\varphi = 0$

$$(2) \text{边值关系 } \varphi_1 \Big|_{r=a} = \varphi_2 \Big|_{r=a}, \quad \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_{r=a} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_{r=a},$$

# Let there be light

## 二、例题

例 1: 半径为  $a$  介电常数为  $\epsilon_1$  的介质球, 放置于均匀外场  $\vec{E}_0$  中, 球外介质的介电常数为  $\epsilon_2$ 。

界面为球, 取球坐标, 原点于介质球球心,  $z$  轴沿  $\vec{E}_0$  方向

设球内外电势分别为  $\varphi_1, \varphi_2$ ,

定解条件: (1) 拉氏方程:  $\nabla^2\varphi = 0$

$$(2) \text{边值关系 } \varphi_1 \Big|_{r=a} = \varphi_2 \Big|_{r=a}, \quad \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_{r=a} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_{r=a}, \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$$

# Let there be light

## 二、例题

例 1: 半径为  $a$  介电常数为  $\epsilon_1$  的介质球, 放置于均匀外场  $\vec{E}_0$  中, 球外介质的介电常数为  $\epsilon_2$ 。

界面为球, 取球坐标, 原点于介质球球心,  $z$  轴沿  $\vec{E}_0$  方向

设球内外电势分别为  $\varphi_1, \varphi_2$ ,

定解条件: (1) 拉氏方程:  $\nabla^2\varphi = 0$

$$(2) \text{ 边值关系 } \varphi_1 \Big|_{r=a} = \varphi_2 \Big|_{r=a}, \quad \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_{r=a} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_{r=a}, \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$$

$$(3) \text{ 边界条件 } \varphi_2 \Big|_{r \rightarrow \infty} = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta$$



# Let there be light

## 二、例题

例 1: 半径为  $a$  介电常数为  $\epsilon_1$  的介质球, 放置于均匀外场  $\vec{E}_0$  中, 球外介质的介电常数为  $\epsilon_2$ 。

界面为球, 取球坐标, 原点于介质球球心,  $z$  轴沿  $\vec{E}_0$  方向

设球内外电势分别为  $\varphi_1, \varphi_2$ ,

定解条件: (1) 拉氏方程:  $\nabla^2 \varphi = 0$

$$(2) \text{ 边值关系 } \varphi_1 \Big|_{r=a} = \varphi_2 \Big|_{r=a}, \quad \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_{r=a} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_{r=a}, \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$$

$$(3) \text{ 边界条件 } \varphi_2 \Big|_{r \rightarrow \infty} = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta$$

通解: 
$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n r^n + b_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta), \quad \varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} [c_n r^n + d_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta)$$

# Let there be light

## 二、例题

例 1: 半径为  $a$  介电常数为  $\epsilon_1$  的介质球, 放置于均匀外场  $\vec{E}_0$  中, 球外介质的介电常数为  $\epsilon_2$ 。

界面为球, 取球坐标, 原点于介质球球心,  $z$  轴沿  $\vec{E}_0$  方向

设球内外电势分别为  $\varphi_1, \varphi_2$ ,

定解条件: (1) 拉氏方程:  $\nabla^2 \varphi = 0$

$$(2) \text{ 边值关系 } \varphi_1 \Big|_{r=a} = \varphi_2 \Big|_{r=a}, \quad \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_{r=a} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_{r=a}, \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$$

$$(3) \text{ 边界条件 } \varphi_2 \Big|_{r \rightarrow \infty} = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta$$

通解: 
$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n r^n + b_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta), \quad \varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} [c_n r^n + d_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta)$$

去除不合物理意义的解

# Let there be light

## 二、例题

例 1: 半径为  $a$  介电常数为  $\epsilon_1$  的介质球, 放置于均匀外场  $\vec{E}_0$  中, 球外介质的介电常数为  $\epsilon_2$ 。

界面为球, 取球坐标, 原点于介质球球心,  $z$  轴沿  $\vec{E}_0$  方向

设球内外电势分别为  $\varphi_1, \varphi_2$ ,

定解条件: (1) 拉氏方程:  $\nabla^2 \varphi = 0$

$$(2) \text{ 边值关系 } \varphi_1 \Big|_{r=a} = \varphi_2 \Big|_{r=a}, \quad \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_{r=a} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_{r=a}, \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$$

$$(3) \text{ 边界条件 } \varphi_2 \Big|_{r \rightarrow \infty} = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta$$

通解: 
$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n r^n + b_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta), \quad \varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} [c_n r^n + d_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta)$$

去除不合物理意义的解

$$r \rightarrow 0, \varphi \text{ 不会无穷大, 故 } b_n = 0, \quad \text{从而 } \varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta)$$

利用定解条件确定系数

# Let there be light

## 二、例题

例 1: 半径为  $a$  介电常数为  $\epsilon_1$  的介质球, 放置于均匀外场  $\vec{E}_0$  中, 球外介质的介电常数为  $\epsilon_2$ 。

界面为球, 取球坐标, 原点于介质球球心,  $z$  轴沿  $\vec{E}_0$  方向

设球内外电势分别为  $\varphi_1, \varphi_2$ ,

定解条件: (1) 拉氏方程:  $\nabla^2 \varphi = 0$

$$(2) \text{ 边值关系 } \varphi_1 \Big|_{r=a} = \varphi_2 \Big|_{r=a}, \quad \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_{r=a} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_{r=a}, \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$$

$$(3) \text{ 边界条件 } \varphi_2 \Big|_{r \rightarrow \infty} = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta$$

通解: 
$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n r^n + b_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta), \quad \varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} [c_n r^n + d_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta)$$

去除不合物理意义的解

$$r \rightarrow 0, \varphi \text{ 不会无穷大, 故 } b_n = 0, \quad \text{从而 } \varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta)$$

利用定解条件确定系数

$$r \rightarrow \infty \text{ 时, } \varphi_2 = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta, \quad \text{从而 } \begin{array}{l} c_0 = \varphi_0, \quad c_1 = -E_0 r \quad \text{得} \\ \varphi_2 = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) \end{array}$$

## Let there be light

---

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta) \quad \varphi_2 = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

## Let there be light

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta) \quad \varphi_2 = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

利用定解条件 (2) 确定  $a_n, d_n$

## Let there be light

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta) \quad \varphi_2 = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

利用定解条件 (2) 确定  $a_n$ ,  $d_n$

由  $\varphi_1|_{r=a} = \varphi_2|_{r=a}$  得: 
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n P_n(\cos \theta) = \varphi_0 - E_0 a \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{a^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

Let there be light

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta) \quad \varphi_2 = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

利用定解条件 (2) 确定  $a_n, d_n$

由  $\varphi_1|_{r=a} = \varphi_2|_{r=a}$  得: 
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n P_n(\cos \theta) = \varphi_0 - E_0 a \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{a^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

比较  $P_n(\cos \theta)$  的系数得: 
$$\begin{cases} a_0 = \varphi_0 + \frac{d_0}{a} & n = 0 & (1) \\ a_1 a = -E_0 a + \frac{d_1}{a^2} & n = 1 & (2) \\ a_n a^n = \frac{d_n}{a^{n+1}} & n > 1 & (3) \end{cases}$$



## Let there be light

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta) \quad \varphi_2 = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

利用定解条件 (2) 确定  $a_n, d_n$

由  $\varphi_1|_{r=a} = \varphi_2|_{r=a}$  得: 
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n P_n(\cos \theta) = \varphi_0 - E_0 a \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{a^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

比较  $P_n(\cos \theta)$  的系数得: 
$$\begin{cases} a_0 = \varphi_0 + \frac{d_0}{a} & n = 0 & (1) \\ a_1 a = -E_0 a + \frac{d_1}{a^2} & n = 1 & (2) \\ a_n a^n = \frac{d_n}{a^{n+1}} & n > 1 & (3) \end{cases}$$

$$\epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=a} : \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n a^{n-1} P_n(\cos \theta) = -E_0 \cos \theta - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)d_n}{a^{n+2}} P_n(\cos \theta)$$

## Let there be light

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta) \quad \varphi_2 = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

利用定解条件 (2) 确定  $a_n, d_n$

由  $\varphi_1|_{r=a} = \varphi_2|_{r=a}$  得: 
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n P_n(\cos \theta) = \varphi_0 - E_0 a \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{a^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

比较  $P_n(\cos \theta)$  的系数得: 
$$\begin{cases} a_0 = \varphi_0 + \frac{d_0}{a} & n = 0 & (1) \\ a_1 a = -E_0 a + \frac{d_1}{a^2} & n = 1 & (2) \\ a_n a^n = \frac{d_n}{a^{n+1}} & n > 1 & (3) \end{cases}$$

$\epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=a}$ : 
$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n a^{n-1} P_n(\cos \theta) = -E_0 \cos \theta - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)d_n}{a^{n+2}} P_n(\cos \theta)$$

比较  $P_n(\cos \theta)$  的系数得: 
$$\begin{cases} d_0 = 0 & n = 0 & (4) \\ \epsilon_1 a_1 = -\epsilon_2 \left( E_0 + \frac{2d_1}{a^3} \right) & n = 1 & (5) \\ \epsilon_1 n a_n a^{n-1} = -\epsilon_2 \frac{(n+1)d_n}{a^{n+2}} & n > 1 & (6) \end{cases}$$

## Let there be light

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta) \quad \varphi_2 = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

利用定解条件 (2) 确定  $a_n, d_n$

由  $\varphi_1|_{r=a} = \varphi_2|_{r=a}$  得: 
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n P_n(\cos \theta) = \varphi_0 - E_0 a \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{a^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

比较  $P_n(\cos \theta)$  的系数得: 
$$\begin{cases} a_0 = \varphi_0 + \frac{d_0}{a} & n = 0 & (1) \\ a_1 a = -E_0 a + \frac{d_1}{a^2} & n = 1 & (2) \\ a_n a^n = \frac{d_n}{a^{n+1}} & n > 1 & (3) \end{cases}$$

$\epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=a}$ : 
$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n a^{n-1} P_n(\cos \theta) = -E_0 \cos \theta - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)d_n}{a^{n+2}} P_n(\cos \theta)$$

比较  $P_n(\cos \theta)$  的系数得: 
$$\begin{cases} d_0 = 0 & n = 0 & (4) \\ \epsilon_1 a_1 = -\epsilon_2 \left( E_0 + \frac{2d_1}{a^3} \right) & n = 1 & (5) \\ \epsilon_1 n a_n a^{n-1} = -\epsilon_2 \frac{(n+1)d_n}{a^{n+2}} & n > 1 & (6) \end{cases}$$

由方程 (1-6) 解得:  $a_0 = \varphi_0, d_0 = 0, a_1 = -\frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0, d_1 = -\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 a^3$

$$a_n = b_n = 0 \quad (n > 1)$$

*Let there be light*

中性介质球在均匀外场中的电势：

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 - \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 r \cos \theta & r \leq a \\ \varphi_2 &= \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \underbrace{\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 a^3 \frac{r \cos \theta}{r^3}}_{\sim \vec{p} \cdot \vec{r}} & r \geq a \end{aligned}$$

# Let there be light

中性介质球在均匀外场中的电势：

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 - \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 r \cos \theta & r \leq a \\ \varphi_2 &= \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \underbrace{\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 a^3 \frac{r \cos \theta}{r^3}}_{\sim \vec{p} \cdot \vec{r}} & r \geq a \end{aligned}$$

讨论：

# Let there be light

中性介质球在均匀外场中的电势：

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 r \cos \theta \quad r \leq a$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \underbrace{\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 a^3 \frac{r \cos \theta}{r^3}}_{\sim \vec{p} \cdot \vec{r}} \quad r \geq a$$

## 讨论：

1. 当 $\epsilon_1 > \epsilon_2$ 时，球内场总小于球外场，这是因为极化电荷的场与外场反向。反之，当 $\epsilon_2 > \epsilon_1$ 时，球内场大于球外场，因为极化电荷的场与外场同向。不管哪种情况，球内仍然是均匀场。

Let there be light

中性介质球在均匀外场中的电势:

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 r \cos \theta \quad r \leq a$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \underbrace{\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 a^3 \frac{r \cos \theta}{r^3}}_{\sim \vec{p} \cdot \vec{r}} \quad r \geq a$$

## 讨论:

1. 当 $\epsilon_1 > \epsilon_2$ 时, 球内场总小于球外场, 这是因为极化电荷的场与外场反向。反之, 当 $\epsilon_2 > \epsilon_1$ 时, 球内场大于球外场, 因为极化电荷的场与外场同向。不管哪种情况, 球内仍然是均匀场。

2. 球内电场:  $\vec{E}_1 = -\nabla\varphi_1 = \frac{3\epsilon_2}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} \vec{E}_0$ , 极化强度:  $\vec{P} = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \vec{E}_1 = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} 3\epsilon_2 \vec{E}_0$   
 介质球总电偶极矩:  $\vec{p} = \frac{4\pi}{3} a^3 \vec{P} = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} 4\pi\epsilon_2 a^3 \vec{E}_0$

Let there be light

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 - \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 r \cos \theta & r \leq a \\ \text{中性介质球在均匀外场中的电势: } \varphi_2 &= \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \underbrace{\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 a^3 \frac{r \cos \theta}{r^3}}_{\sim \vec{p} \cdot \vec{r}} & r \geq a \end{aligned}$$

## 讨论：

1. 当  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  时，球内场总小于球外场，这是因为极化电荷的场与外场反向。反之，当  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  时，球内场大于球外场，因为极化电荷的场与外场同向。不管哪种情况，球内仍然是均匀场。

$$2. \text{ 球内电场: } \vec{E}_1 = -\nabla \varphi_1 = \frac{3\epsilon_2}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} \vec{E}_0, \quad \text{极化强度: } \vec{P} = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \vec{E}_1 = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} 3\epsilon_2 \vec{E}_0$$

$$\text{介质球总电偶极矩: } \vec{p} = \frac{4\pi}{3} a^3 \vec{P} = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} 4\pi \epsilon_2 a^3 \vec{E}_0$$

3. 球外场为原均匀电场和球面极化电荷的场，而后者又等于一个放在球心，电偶极矩为  $\vec{p}$  的电偶极子的静电场。因此只有在球附近，电场变化比较大，离介质球稍微远一点，基本上就是均匀场。参见教材 p97 电力线图



Let there be light

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 r \cos \theta \quad r \leq a$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \underbrace{\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 a^3 \frac{r \cos \theta}{r^3}}_{\sim \vec{p} \cdot \vec{r}} \quad r \geq a$$

中性介质球在均匀外场中的电势:

## 讨论:

1. 当  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  时, 球内场总小于球外场, 这是因为极化电荷的场与外场反向。反之, 当  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  时, 球内场大于球外场, 因为极化电荷的场与外场同向。不管哪种情况, 球内仍然是均匀场。

$$2. \text{ 球内电场: } \vec{E}_1 = -\nabla \varphi_1 = \frac{3\epsilon_2}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} \vec{E}_0, \quad \text{极化强度: } \vec{P} = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \vec{E}_1 = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} 3\epsilon_2 \vec{E}_0$$

$$\text{介质球总电偶极矩: } \vec{p} = \frac{4\pi}{3} a^3 \vec{P} = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} 4\pi \epsilon_2 a^3 \vec{E}_0$$

3. 球外场为原均匀电场和球面极化电荷的场, 而后者又等于一个放在球心, 电偶极矩为  $\vec{p}$  的电偶极子的静电场。因此只有在球附近, 电场变化比较大, 离介质球稍微远一点, 基本上就是均匀场。参见教材 p97 电力线图

4. 如果把介质球换成接地导体球, 定解条件 (2) 变为  $\varphi_1 = \varphi_2 \Big|_{r=a} = 0$ , 联立  $\varphi_2$  的表式

$$\varphi_2 = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

Let there be light

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 - \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 r \cos \theta & r \leq a \\ \text{中性介质球在均匀外场中的电势: } \varphi_2 &= \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \underbrace{\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 a^3 \frac{r \cos \theta}{r^3}}_{\sim \vec{p} \cdot \vec{r}} & r \geq a \end{aligned}$$

## 讨论：

1. 当  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  时，球内场总小于球外场，这是因为极化电荷的场与外场反向。反之，当  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  时，球内场大于球外场，因为极化电荷的场与外场同向。不管哪种情况，球内仍然是均匀场。

2. 球内电场： $\vec{E}_1 = -\nabla\varphi_1 = \frac{3\epsilon_2}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} \vec{E}_0$ ，极化强度： $\vec{P} = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \vec{E}_1 = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} 3\epsilon_2 \vec{E}_0$

介质球总电偶极矩： $\vec{p} = \frac{4\pi}{3} a^3 \vec{P} = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} 4\pi\epsilon_2 a^3 \vec{E}_0$

3. 球外场为原均匀电场和球面极化电荷的场，而后者又等于一个放在球心，电偶极矩为  $\vec{p}$  的电偶极子的静电场。因此只有在球附近，电场变化比较大，离介质球稍微远一点，基本上就是均匀场。参见教材 p97 电力线图

4. 如果把介质球换成接地导体球，定解条件 (2) 变为  $\varphi_1 = \varphi_2 \Big|_{r=a} = 0$ ，联立  $\varphi_2$  的表式

$$\varphi_2 = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

$$\text{解得: } \varphi_2 = \varphi_0 - \frac{a}{r} \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2}$$

Let there be light

中性介质球在均匀外场中的电势:

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 r \cos \theta \quad r \leq a$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \underbrace{\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 a^3 \frac{r \cos \theta}{r^3}}_{\sim \vec{p} \cdot \vec{r}} \quad r \geq a$$

## 讨论:

1. 当  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  时, 球内场总小于球外场, 这是因为极化电荷的场与外场反向。反之, 当  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  时, 球内场大于球外场, 因为极化电荷的场与外场同向。不管哪种情况, 球内仍然是均匀场。

2. 球内电场:  $\vec{E}_1 = -\nabla\varphi_1 = \frac{3\epsilon_2}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} \vec{E}_0$ , 极化强度:  $\vec{P} = (\epsilon_1 - \epsilon_0)\vec{E}_1 = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} 3\epsilon_2 \vec{E}_0$

介质球总电偶极矩:  $\vec{p} = \frac{4\pi}{3} a^3 \vec{P} = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} 4\pi\epsilon_2 a^3 \vec{E}_0$

3. 球外场为原均匀电场和球面极化电荷的场, 而后者又等于一个放在球心, 电偶极矩为  $\vec{p}$  的电偶极子的静电场。因此只有在球附近, 电场变化比较大, 离介质球稍微远一点, 基本上就是均匀场。参见教材 p97 电力线图

4. 如果把介质球换成接地导体球, 定解条件 (2) 变为  $\varphi_1 = \varphi_2 \Big|_{r=a} = 0$ , 联立  $\varphi_2$  的表式

$$\varphi_2 = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

解得:  $\varphi_2 = \varphi_0 - \frac{a}{r} \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2}$

导体带电量: (也可从  $\varphi_2$  式直接看出)

$$Q_c = -\epsilon_2 \int \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=a} d\sigma = -4\pi\epsilon_2 a \varphi_0$$

## *Let there be light*

---

5. 如果把介质球换成带电为  $Q$  的导体球，则可以把比接地导体球时多带的电量  $Q - Q_c$  均匀分布在导体表面。这样做既保持了导体球表面为等势体，又保证导体球的总带电量为  $Q$ ，满足定解条件，因此这时球外的电势为

# Let there be light

5. 如果把介质球换成带电为  $Q$  的导体球，则可以把比接地导体球时多带的电量  $Q - Q_c$  均匀分布在导体表面。这样做既保持了导体球表面为等势体，又保证导体球的总带电量为  $Q$ ，满足定解条件，因此这时球外的电势为

$$\varphi_2 = \underbrace{\varphi_0 + \frac{Q_c}{4\pi\epsilon_2 r} - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2}}_{\text{接地导体球的解}} + \underbrace{\frac{(Q - Q_c)}{4\pi\epsilon_2 r}}_{\text{均匀分布 } Q - Q_c \text{ 的解}}$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r} - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2} \quad \text{带电 } Q \text{ 的导体球在均匀外场中}$$

# Let there be light

5. 如果把介质球换成带电为  $Q$  的导体球，则可以把比接地导体球时多带的电量  $Q - Q_c$  均匀分布在导体表面。这样做既保持了导体球表面为等势体，又保证导体球的总带电量为  $Q$ ，满足定解条件，因此这时球外的电势为

$$\varphi_2 = \underbrace{\varphi_0 + \frac{Q_c}{4\pi\epsilon_2 r} - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2}}_{\text{接地导体球的解}} + \underbrace{\frac{(Q - Q_c)}{4\pi\epsilon_2 r}}_{\text{均匀分布 } Q - Q_c \text{ 的解}}$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r} - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2} \quad \text{带电 } Q \text{ 的导体球在均匀外场中}$$

与不带电介质球比较 (p5 第一行):

## Let there be light

5. 如果把介质球换成带电为  $Q$  的导体球，则可以把比接地导体球时多带的电量  $Q - Q_c$  均匀分布在导体表面。这样做既保持了导体球表面为等势体，又保证导体球的总带电量为  $Q$ ，满足定解条件，因此这时球外的电势为

$$\varphi_2 = \underbrace{\varphi_0 + \frac{Q_c}{4\pi\epsilon_2 r} - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2}}_{\text{接地导体球的解}} + \underbrace{\frac{(Q - Q_c)}{4\pi\epsilon_2 r}}_{\text{均匀分布 } Q - Q_c \text{ 的解}}$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r} - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2} \quad \text{带电 } Q \text{ 的导体球在均匀外场中}$$

与不带电介质球比较 (p5 第一行): 静电问题中, 导体相当于介电常数  $\epsilon_1 \rightarrow \infty$  的介质

# Let there be light

5. 如果把介质球换成带电为  $Q$  的导体球，则可以把比接地导体球时多带的电量  $Q - Q_c$  均匀分布在导体表面。这样做既保持了导体球表面为等势体，又保证导体球的总带电量为  $Q$ ，满足定解条件，因此这时球外的电势为

$$\varphi_2 = \underbrace{\varphi_0 + \frac{Q_c}{4\pi\epsilon_2 r} - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2}}_{\text{接地导体球的解}} + \underbrace{\frac{(Q - Q_c)}{4\pi\epsilon_2 r}}_{\text{均匀分布 } Q - Q_c \text{ 的解}}$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r} - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2} \quad \text{带电 } Q \text{ 的导体球在均匀外场中}$$

与不带电介质球比较 (p5 第一行)：静电问题中，导体相当于介电常数  $\epsilon_1 \rightarrow \infty$  的介质

$\varphi_0$  的意义：放置一中性导体球于坐标原点，导体球上的电势。



# Let there be light

5. 如果把介质球换成带电为  $Q$  的导体球，则可以把比接地导体球时多带的电量  $Q - Q_c$  均匀分布在导体表面。这样做既保持了导体球表面为等势体，又保证导体球的总带电量为  $Q$ ，满足定解条件，因此这时球外的电势为

$$\varphi_2 = \underbrace{\varphi_0 + \frac{Q_c}{4\pi\epsilon_2 r} - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2}}_{\text{接地导体球的解}} + \underbrace{\frac{(Q - Q_c)}{4\pi\epsilon_2 r}}_{\text{均匀分布 } Q - Q_c \text{ 的解}}$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r} - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2} \quad \text{带电 } Q \text{ 的导体球在均匀外场中}$$

与不带电介质球比较 (p5 第一行)：静电问题中，导体相当于介电常数  $\epsilon_1 \rightarrow \infty$  的介质

$\varphi_0$  的意义：放置一中性导体球于坐标原点，导体球上的电势。

6. 均匀带电  $Q_d$  介质球置于均匀外场

# Let there be light

5. 如果把介质球换成带电为  $Q$  的导体球，则可以把比接地导体球时多带的电量  $Q - Q_c$  均匀分布在导体表面。这样做既保持了导体球表面为等势体，又保证导体球的总带电量为  $Q$ ，满足定解条件，因此这时球外的电势为

$$\varphi_2 = \underbrace{\varphi_0 + \frac{Q_c}{4\pi\epsilon_2 r} - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2}}_{\text{接地导体球的解}} + \underbrace{\frac{(Q - Q_c)}{4\pi\epsilon_2 r}}_{\text{均匀分布 } Q - Q_c \text{ 的解}}$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r} - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2} \quad \text{带电 } Q \text{ 的导体球在均匀外场中}$$

与不带电介质球比较 (p5 第一行)：静电问题中，导体相当于介电常数  $\epsilon_1 \rightarrow \infty$  的介质

$\varphi_0$  的意义：放置一中性导体球于坐标原点，导体球上的电势。

6. 均匀带电  $Q_d$  介质球置于均匀外场

可先求均匀带电  $Q_d$  介质球的电势，易得：球内外电势  $\varphi'_1$  和  $\varphi'_2$  分别为

# Let there be light

5. 如果把介质球换成带电为  $Q$  的导体球，则可以把比接地导体球时多带的电量  $Q - Q_c$  均匀分布在导体表面。这样做既保持了导体球表面为等势体，又保证导体球的总带电量为  $Q$ ，满足定解条件，因此这时球外的电势为

$$\varphi_2 = \underbrace{\varphi_0 + \frac{Q_c}{4\pi\epsilon_2 r} - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2}}_{\text{接地导体球的解}} + \underbrace{\frac{(Q - Q_c)}{4\pi\epsilon_2 r}}_{\text{均匀分布 } Q - Q_c \text{ 的解}}$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r} - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2} \quad \text{带电 } Q \text{ 的导体球在均匀外场中}$$

与不带电介质球比较 (p5 第一行)：静电问题中，导体相当于介电常数  $\epsilon_1 \rightarrow \infty$  的介质

$\varphi_0$  的意义：放置一中性导体球于坐标原点，导体球上的电势。

6. 均匀带电  $Q_d$  介质球置于均匀外场

可先求均匀带电  $Q_d$  介质球的电势，易得：球内外电势  $\varphi'_1$  和  $\varphi'_2$  分别为

$$\varphi'_1 = \frac{(\epsilon_2 + 2\epsilon_1)Q_d}{8\pi\epsilon_1\epsilon_2 a} - \frac{Q_d r^2}{8\pi\epsilon_1 a^3} \quad \varphi'_2 = \frac{Q_d}{4\pi\epsilon_2 r}$$

# Let there be light

5. 如果把介质球换成带电为  $Q$  的导体球，则可以把比接地导体球时多带的电量  $Q - Q_c$  均匀分布在导体表面。这样做既保持了导体球表面为等势体，又保证导体球的总带电量为  $Q$ ，满足定解条件，因此这时球外的电势为

$$\varphi_2 = \underbrace{\varphi_0 + \frac{Q_c}{4\pi\epsilon_2 r} - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2}}_{\text{接地导体球的解}} + \underbrace{\frac{(Q - Q_c)}{4\pi\epsilon_2 r}}_{\text{均匀分布 } Q - Q_c \text{ 的解}}$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r} - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2} \quad \text{带电 } Q \text{ 的导体球在均匀外场中}$$

与不带电介质球比较 (p5 第一行)：静电问题中，导体相当于介电常数  $\epsilon_1 \rightarrow \infty$  的介质

$\varphi_0$  的意义：放置一中性导体球于坐标原点，导体球上的电势。

6. 均匀带电  $Q_d$  介质球置于均匀外场

可先求均匀带电  $Q_d$  介质球的电势，易得：球内外电势  $\varphi'_1$  和  $\varphi'_2$  分别为

$$\varphi'_1 = \frac{(\epsilon_2 + 2\epsilon_1)Q_d}{8\pi\epsilon_1\epsilon_2 a} - \frac{Q_d r^2}{8\pi\epsilon_1 a^3} \quad \varphi'_2 = \frac{Q_d}{4\pi\epsilon_2 r}$$

把该介质球置于均匀外场中，球内外电势  $\varphi_i$  和  $\varphi_e$  分别为

# Let there be light

5. 如果把介质球换成带电为  $Q$  的导体球，则可以把比接地导体球时多带的电量  $Q - Q_c$  均匀分布在导体表面。这样做既保持了导体球表面为等势体，又保证导体球的总带电量为  $Q$ ，满足定解条件，因此这时球外的电势为

$$\varphi_2 = \underbrace{\varphi_0 + \frac{Q_c}{4\pi\epsilon_2 r} - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2}}_{\text{接地导体球的解}} + \underbrace{\frac{(Q - Q_c)}{4\pi\epsilon_2 r}}_{\text{均匀分布 } Q - Q_c \text{ 的解}}$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r} - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2} \quad \text{带电 } Q \text{ 的导体球在均匀外场中}$$

与不带电介质球比较 (p5 第一行)：静电问题中，导体相当于介电常数  $\epsilon_1 \rightarrow \infty$  的介质

$\varphi_0$  的意义：放置一中性导体球于坐标原点，导体球上的电势。

6. 均匀带电  $Q_d$  介质球置于均匀外场

可先求均匀带电  $Q_d$  介质球的电势，易得：球内外电势  $\varphi'_1$  和  $\varphi'_2$  分别为

$$\varphi'_1 = \frac{(\epsilon_2 + 2\epsilon_1)Q_d}{8\pi\epsilon_1\epsilon_2 a} - \frac{Q_d r^2}{8\pi\epsilon_1 a^3} \quad \varphi'_2 = \frac{Q_d}{4\pi\epsilon_2 r}$$

把该介质球置于均匀外场中，球内外电势  $\varphi_i$  和  $\varphi_e$  分别为  $\varphi_i = \varphi'_1 + \varphi_1$   $\varphi_e = \varphi'_2 + \varphi_2$

# Let there be light

5. 如果把介质球换成带电为  $Q$  的导体球，则可以把比接地导体球时多带的电量  $Q - Q_c$  均匀分布在导体表面。这样做既保持了导体球表面为等势体，又保证导体球的总带电量为  $Q$ ，满足定解条件，因此这时球外的电势为

$$\varphi_2 = \underbrace{\varphi_0 + \frac{Q_c}{4\pi\epsilon_2 r} - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2}}_{\text{接地导体球的解}} + \underbrace{\frac{(Q - Q_c)}{4\pi\epsilon_2 r}}_{\text{均匀分布 } Q - Q_c \text{ 的解}}$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r} - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2} \quad \text{带电 } Q \text{ 的导体球在均匀外场中}$$

与不带电介质球比较 (p5 第一行): 静电问题中，导体相当于介电常数  $\epsilon_1 \rightarrow \infty$  的介质

$\varphi_0$  的意义: 放置一中性导体球于坐标原点，导体球上的电势。

6. 均匀带电  $Q_d$  介质球置于均匀外场

可先求均匀带电  $Q_d$  介质球的电势，易得：球内外电势  $\varphi'_1$  和  $\varphi'_2$  分别为

$$\varphi'_1 = \frac{(\epsilon_2 + 2\epsilon_1)Q_d}{8\pi\epsilon_1\epsilon_2 a} - \frac{Q_d r^2}{8\pi\epsilon_1 a^3} \quad \varphi'_2 = \frac{Q_d}{4\pi\epsilon_2 r}$$

把该介质球置于均匀外场中，球内外电势  $\varphi_i$  和  $\varphi_e$  分别为  $\varphi_i = \varphi'_1 + \varphi_1$   $\varphi_e = \varphi'_2 + \varphi_2$

其中  $\varphi_1, \varphi_2$  分别为中性介质球在均匀外场中的球内外电势 (p5 第一行公式)

因为  $\varphi'_1, \varphi'_2$  满足泊松方程、边值关系和边界条件

而  $\varphi_1, \varphi_2$  满足拉氏方程、边值关系和边界条件，两者之和必满足定解条件

## *Let there be light*

### 例 2：带电导体表面电荷分布

## *Let there be light*

### 例 2：带电导体表面电荷分布

定性物理图象

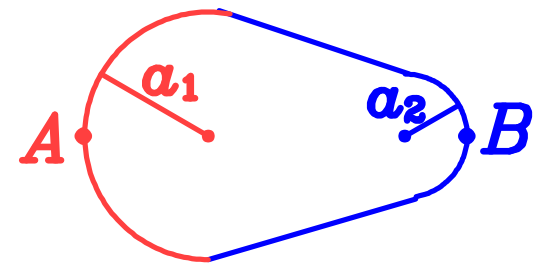


# Let there be light

## 例 2：带电导体表面电荷分布

### 定性物理图象

如图所示导体一端尖一端秃，设两端分别为半径  $a_1$  和  $a_2$  的球



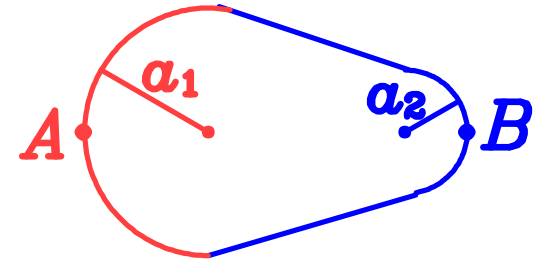
# Let there be light

## 例 2：带电导体表面电荷分布

### 定性物理图象

如图所示导体一端尖一端秃，设两端分别为半径  $a_1$  和  $a_2$  的球

在  $A$  端，电势可用导体球近似，因此  $\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_A}{a_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_{qA} 4\pi a_1^2}{a_1}$

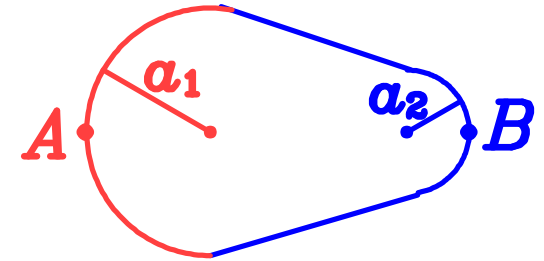


# Let there be light

## 例 2：带电导体表面电荷分布

### 定性物理图象

如图所示导体一端尖一端秃，设两端分别为半径  $a_1$  和  $a_2$  的球



在  $A$  端，电势可用导体球近似，因此  $\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_A}{a_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_{qA} 4\pi a_1^2}{a_1}$

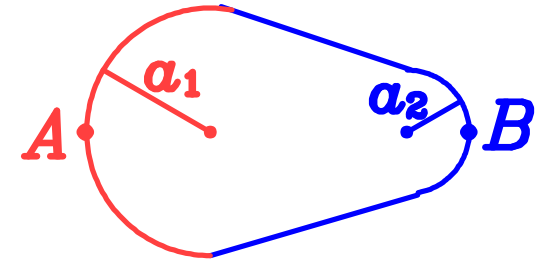
在  $B$  端，电势可用导体球近似，因此  $\varphi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_B}{a_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_{qB} 4\pi a_2^2}{a_2}$

# Let there be light

## 例 2：带电导体表面电荷分布

### 定性物理图象

如图所示导体一端尖一端秃，设两端分别为半径  $a_1$  和  $a_2$  的球



在  $A$  端，电势可用导体球近似，因此  $\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_A}{a_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_{qA} 4\pi a_1^2}{a_1}$

在  $B$  端，电势可用导体球近似，因此  $\varphi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_B}{a_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_{qB} 4\pi a_2^2}{a_2}$

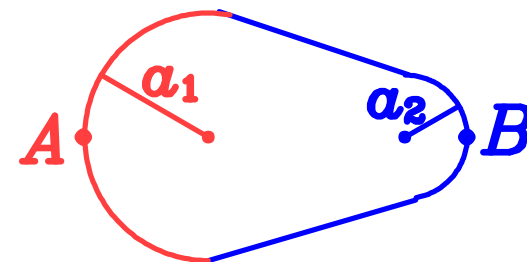
导体为等势体  $\varphi_A = \varphi_B$ ，故：  $\sigma_{qA} a_1 = \sigma_{qB} a_2$ ，

# Let there be light

## 例 2：带电导体表面电荷分布

### 定性物理图象

如图所示导体一端尖一端秃，设两端分别为半径  $a_1$  和  $a_2$  的球



在  $A$  端，电势可用导体球近似，因此  $\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_A}{a_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_{qA} 4\pi a_1^2}{a_1}$

在  $B$  端，电势可用导体球近似，因此  $\varphi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_B}{a_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_{qB} 4\pi a_2^2}{a_2}$

导体为等势体  $\varphi_A = \varphi_B$ ，故：  $\sigma_{qA} a_1 = \sigma_{qB} a_2$ ，

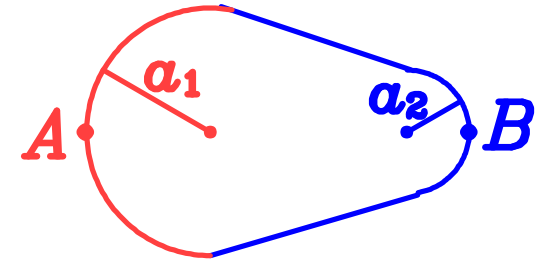
又  $E \sim \sigma_q$ ，故：  $E_A a_1 = E_B a_2$ ，导体尖端处：电荷密度大，电场大

# Let there be light

## 例 2：带电导体表面电荷分布

### 定性物理图象

如图所示导体一端尖一端秃，设两端分别为半径  $a_1$  和  $a_2$  的球



在  $A$  端，电势可用导体球近似，因此  $\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_A}{a_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_{qA} 4\pi a_1^2}{a_1}$

在  $B$  端，电势可用导体球近似，因此  $\varphi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_B}{a_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_{qB} 4\pi a_2^2}{a_2}$

导体为等势体  $\varphi_A = \varphi_B$ ，故：  $\sigma_{qA} a_1 = \sigma_{qB} a_2$ ，

又  $E \sim \sigma_q$ ，故：  $E_A a_1 = E_B a_2$ ，导体尖端处：电荷密度大，电场大

### 定量模型计算

# Let there be light

## 例 2：带电导体表面电荷分布

### 定性物理图象

如图所示导体一端尖一端秃，设两端分别为半径  $a_1$  和  $a_2$  的球

在  $A$  端，电势可用导体球近似，因此  $\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_A}{a_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_{qA} 4\pi a_1^2}{a_1}$

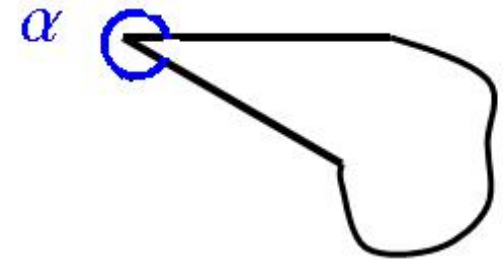
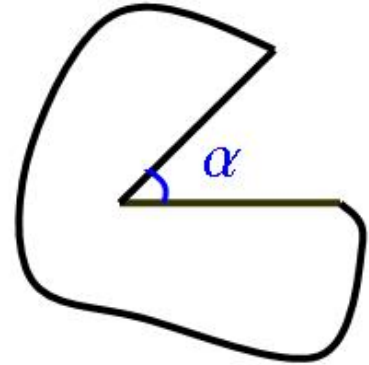
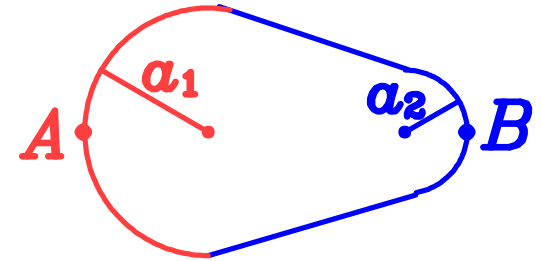
在  $B$  端，电势可用导体球近似，因此  $\varphi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_B}{a_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_{qB} 4\pi a_2^2}{a_2}$

导体为等势体  $\varphi_A = \varphi_B$ ，故： $\sigma_{qA} a_1 = \sigma_{qB} a_2$ ，

又  $E \sim \sigma_q$ ，故： $E_A a_1 = E_B a_2$ ，导体尖端处：电荷密度大，电场大

### 定量模型计算

二维导体尖劈附近的电场



# Let there be light

## 例 2：带电导体表面电荷分布

### 定性物理图象

如图所示导体一端尖一端秃，设两端分别为半径  $a_1$  和  $a_2$  的球

在  $A$  端，电势可用导体球近似，因此  $\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_A}{a_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_{qA} 4\pi a_1^2}{a_1}$

在  $B$  端，电势可用导体球近似，因此  $\varphi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_B}{a_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_{qB} 4\pi a_2^2}{a_2}$

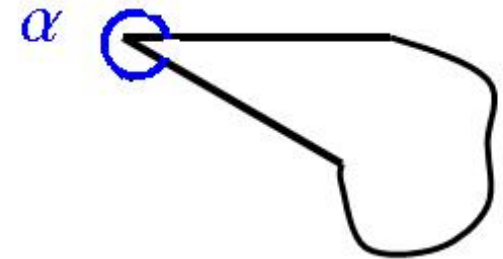
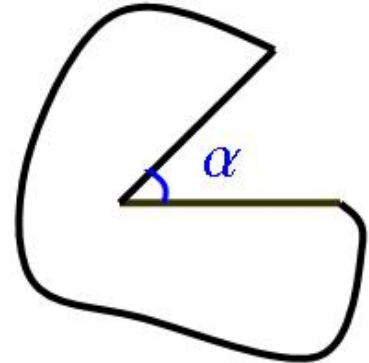
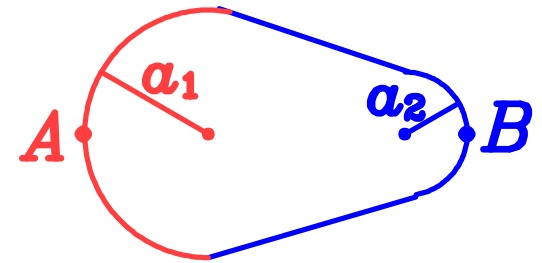
导体为等势体  $\varphi_A = \varphi_B$ ，故：  $\sigma_{qA} a_1 = \sigma_{qB} a_2$ ，

又  $E \sim \sigma_q$ ，故：  $E_A a_1 = E_B a_2$ ，导体尖端处：电荷密度大，电场大

### 定量模型计算

二维导体尖劈附近的电场

“定解条件：” 不能唯一确定解，因为导体之外的电荷分布未知





# Let there be light

## 例 2：带电导体表面电荷分布

### 定性物理图象

如图所示导体一端尖一端秃，设两端分别为半径  $a_1$  和  $a_2$  的球

在  $A$  端，电势可用导体球近似，因此  $\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_A}{a_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_{qA} 4\pi a_1^2}{a_1}$

在  $B$  端，电势可用导体球近似，因此  $\varphi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_B}{a_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_{qB} 4\pi a_2^2}{a_2}$

导体为等势体  $\varphi_A = \varphi_B$ ，故：  $\sigma_{qA} a_1 = \sigma_{qB} a_2$ ，

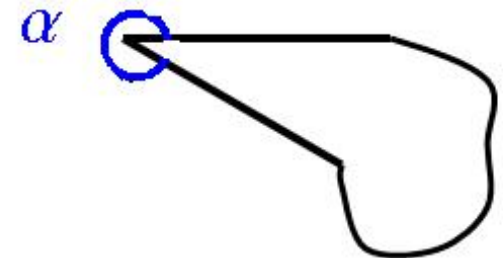
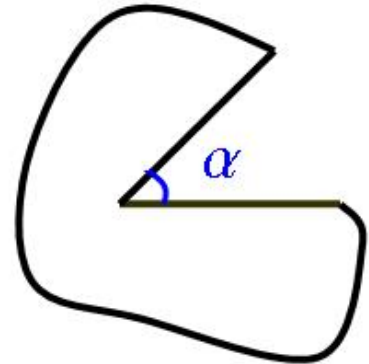
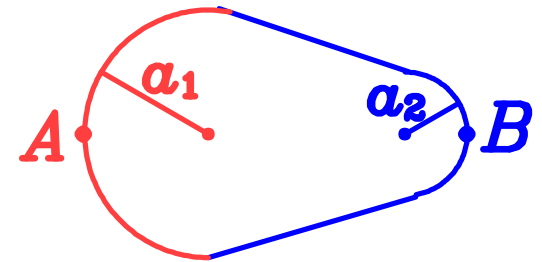
又  $E \sim \sigma_q$ ，故：  $E_A a_1 = E_B a_2$ ，导体尖端处：电荷密度大，电场大

### 定量模型计算

二维导体尖劈附近的电场

“定解条件：” 不能唯一确定解，因为导体之外的电荷分布未知

(1) 拉氏方程：在  $\rho \sim 0$  附近  $\nabla^2 \varphi = 0$



# Let there be light

## 例 2：带电导体表面电荷分布

### 定性物理图象

如图所示导体一端尖一端秃，设两端分别为半径  $a_1$  和  $a_2$  的球

在 A 端，电势可用导体球近似，因此  $\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_A}{a_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_{qA} 4\pi a_1^2}{a_1}$

在 B 端，电势可用导体球近似，因此  $\varphi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_B}{a_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_{qB} 4\pi a_2^2}{a_2}$

导体为等势体  $\varphi_A = \varphi_B$ ，故： $\sigma_{qA} a_1 = \sigma_{qB} a_2$ ，

又  $E \sim \sigma_q$ ，故： $E_A a_1 = E_B a_2$ ，导体尖端处：电荷密度大，电场大

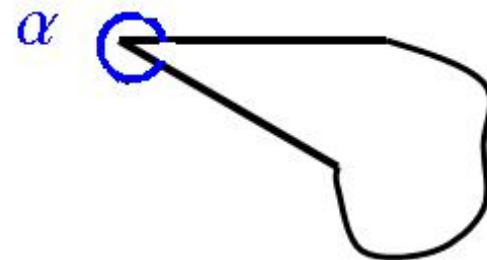
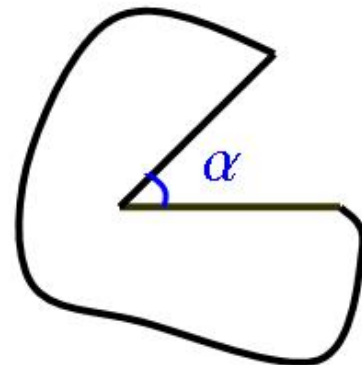
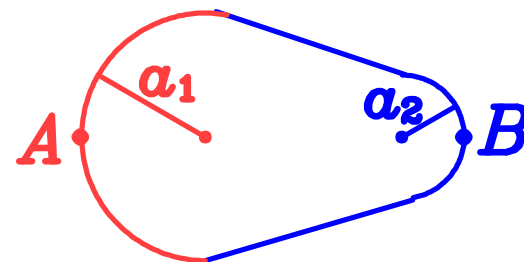
### 定量模型计算

#### 二维导体尖劈附近的电场

“定解条件：” 不能唯一确定解，因为导体之外的电荷分布未知

(1) 拉氏方程：在  $\rho \sim 0$  附近  $\nabla^2 \varphi = 0$

(2) 边值关系：在  $\rho \sim 0$  附近  $\varphi(0) = \varphi(\alpha) = V_0$



# Let there be light

## 例 2：带电导体表面电荷分布

### 定性物理图象

如图所示导体一端尖一端秃，设两端分别为半径  $a_1$  和  $a_2$  的球

在 A 端，电势可用导体球近似，因此  $\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_A}{a_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_{qA} 4\pi a_1^2}{a_1}$

在 B 端，电势可用导体球近似，因此  $\varphi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_B}{a_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_{qB} 4\pi a_2^2}{a_2}$

导体为等势体  $\varphi_A = \varphi_B$ ，故： $\sigma_{qA} a_1 = \sigma_{qB} a_2$ ，

又  $E \sim \sigma_q$ ，故： $E_A a_1 = E_B a_2$ ，导体尖端处：电荷密度大，电场大

### 定量模型计算

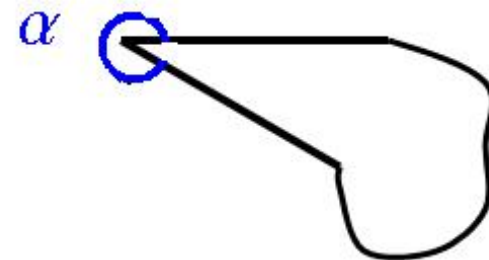
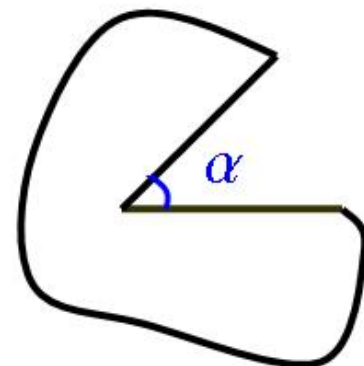
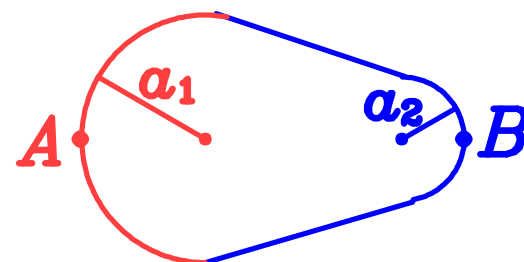
#### 二维导体尖劈附近的电场

“定解条件：” 不能唯一确定解，因为导体之外的电荷分布未知

(1) 拉氏方程：在  $\rho \sim 0$  附近  $\nabla^2 \varphi = 0$

(2) 边值关系：在  $\rho \sim 0$  附近  $\varphi(0) = \varphi(\alpha) = V_0$

(3) 边界条件  $\varphi \Big|_{\infty} = 0$ ，



# Let there be light

## 例 2：带电导体表面电荷分布

### 定性物理图象

如图所示导体一端尖一端秃，设两端分别为半径  $a_1$  和  $a_2$  的球

在 A 端，电势可用导体球近似，因此  $\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_A}{a_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_{qA} 4\pi a_1^2}{a_1}$

在 B 端，电势可用导体球近似，因此  $\varphi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_B}{a_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_{qB} 4\pi a_2^2}{a_2}$

导体为等势体  $\varphi_A = \varphi_B$ ，故： $\sigma_{qA} a_1 = \sigma_{qB} a_2$ ，

又  $E \sim \sigma_q$ ，故： $E_A a_1 = E_B a_2$ ，导体尖端处：电荷密度大，电场大

### 定量模型计算

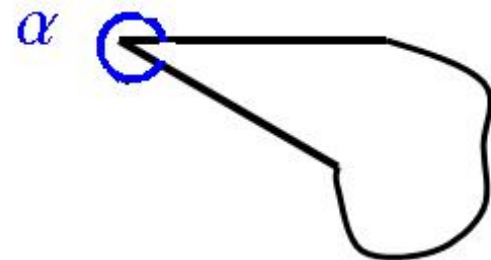
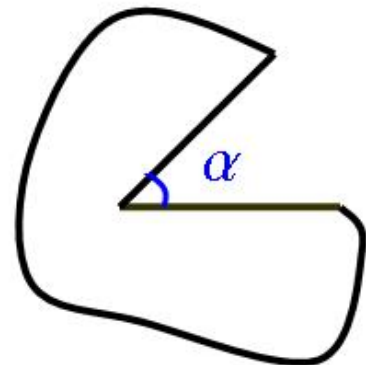
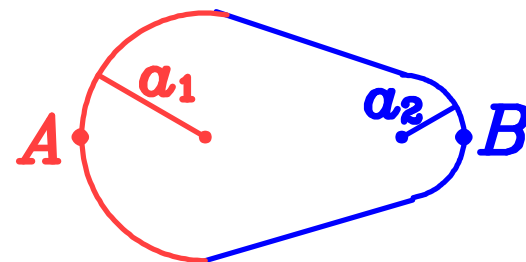
#### 二维导体尖劈附近的电场

“定解条件：” 不能唯一确定解，因为导体之外的电荷分布未知

(1) 拉氏方程：在  $\rho \sim 0$  附近  $\nabla^2 \varphi = 0$

(2) 边值关系：在  $\rho \sim 0$  附近  $\varphi(0) = \varphi(\alpha) = V_0$

(3) 边界条件  $\varphi \Big|_{\infty} = 0$ ，对于求  $\rho \sim 0$  附近的解，此条件不用



# Let there be light

## 例 2：带电导体表面电荷分布

### 定性物理图象

如图所示导体一端尖一端秃，设两端分别为半径  $a_1$  和  $a_2$  的球

在 A 端，电势可用导体球近似，因此  $\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_A}{a_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_{qA} 4\pi a_1^2}{a_1}$

在 B 端，电势可用导体球近似，因此  $\varphi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_B}{a_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_{qB} 4\pi a_2^2}{a_2}$

导体为等势体  $\varphi_A = \varphi_B$ ，故： $\sigma_{qA} a_1 = \sigma_{qB} a_2$ ，

又  $E \sim \sigma_q$ ，故： $E_A a_1 = E_B a_2$ ，导体尖端处：电荷密度大，电场大

### 定量模型计算

二维导体尖劈附近的电场

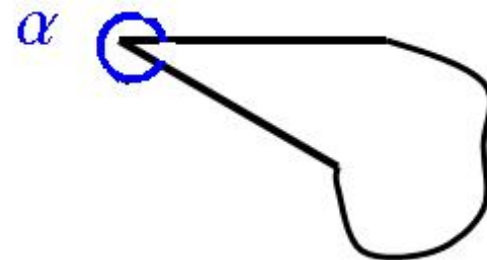
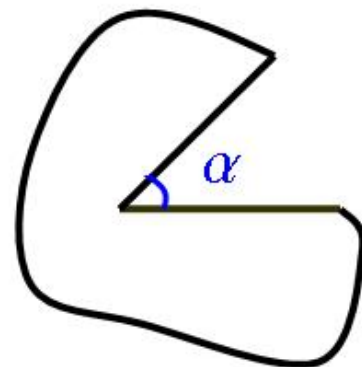
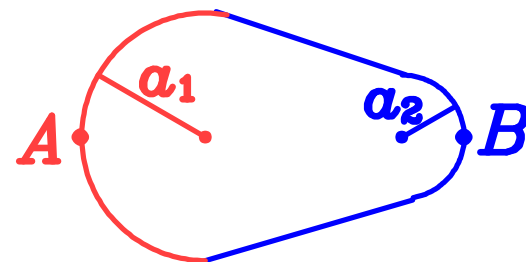
“定解条件：” 不能唯一确定解，因为导体之外的电荷分布未知

(1) 拉氏方程：在  $\rho \sim 0$  附近  $\nabla^2 \varphi = 0$

(2) 边值关系：在  $\rho \sim 0$  附近  $\varphi(0) = \varphi(\alpha) = V_0$

(3) 边界条件  $\varphi \Big|_{\infty} = 0$ ，对于求  $\rho \sim 0$  附近的解，此条件不用

通解：



# Let there be light

## 例 2：带电导体表面电荷分布

### 定性物理图象

如图所示导体一端尖一端秃，设两端分别为半径  $a_1$  和  $a_2$  的球

在 A 端，电势可用导体球近似，因此  $\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_A}{a_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_{qA} 4\pi a_1^2}{a_1}$

在 B 端，电势可用导体球近似，因此  $\varphi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_B}{a_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_{qB} 4\pi a_2^2}{a_2}$

导体为等势体  $\varphi_A = \varphi_B$ ，故： $\sigma_{qA} a_1 = \sigma_{qB} a_2$ ，

又  $E \sim \sigma_q$ ，故： $E_A a_1 = E_B a_2$ ，导体尖端处：电荷密度大，电场大

### 定量模型计算

#### 二维导体尖劈附近的电场

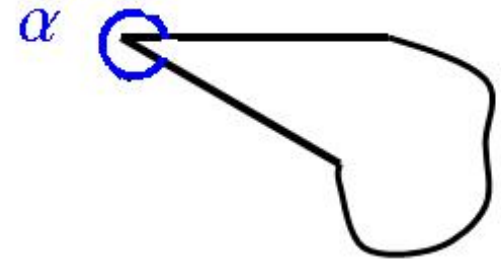
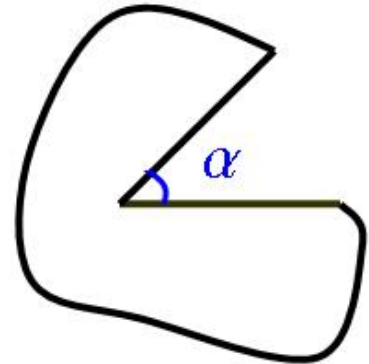
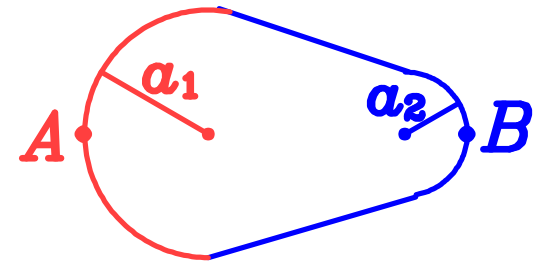
“定解条件：” 不能唯一确定解，因为导体之外的电荷分布未知

(1) 拉氏方程：在  $\rho \sim 0$  附近  $\nabla^2 \varphi = 0$

(2) 边值关系：在  $\rho \sim 0$  附近  $\varphi(0) = \varphi(\alpha) = V_0$

(3) 边界条件  $\varphi \Big|_{\infty} = 0$ ，对于求  $\rho \sim 0$  附近的解，此条件不用

通解： $\varphi = (a_0 + b_0 \ln \rho)(c_0 + d_0 \phi) + \sum_v (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v})(c_v \cos v\phi + d_v \sin v\phi)$



# *Let there be light*

通解:

## *Let there be light*

---

通解: 
$$\varphi = (a_0 + b_0 \ln \rho)(c_0 + d_0 \phi) + \sum_v (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v})(c_v \cos v\phi + d_v \sin v\phi)$$



## Let there be light

通解:  $\varphi = (a_0 + b_0 \ln \rho)(c_0 + d_0 \phi) + \sum_v (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v})(c_v \cos v\phi + d_v \sin v\phi)$

$\rho \rightarrow 0$ ,  $\varphi$  有限, 故:  $b_0 = 0$ ,  $b_v = 0$ ,

$$\varphi = a_0 c_0 + a_0 d_0 \phi + \sum_v (a_v c_v \rho^v \cos v\phi + a_v \rho^v d_v \sin v\phi)$$

## *Let there be light*

通解:  $\varphi = (a_0 + b_0 \ln \rho)(c_0 + d_0 \phi) + \sum_v (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v})(c_v \cos v\phi + d_v \sin v\phi)$

$\rho \rightarrow 0$ ,  $\varphi$  有限, 故:  $b_0 = 0$ ,  $b_v = 0$ ,

$$\varphi = a_0 c_0 + a_0 d_0 \phi + \sum_v (a_v c_v \rho^v \cos v\phi + a_v \rho^v d_v \sin v\phi)$$

简化:  $\varphi = A_0 + B_0 \phi + \sum_v (A_v \rho^v \cos v\phi + B_v \rho^v \sin v\phi)$

Let there be light

通解:  $\varphi = (a_0 + b_0 \ln \rho)(c_0 + d_0 \phi) + \sum_v (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v})(c_v \cos v\phi + d_v \sin v\phi)$

$\rho \rightarrow 0$ ,  $\varphi$  有限, 故:  $b_0 = 0$ ,  $b_v = 0$ ,

$$\varphi = a_0 c_0 + a_0 d_0 \phi + \sum_v (a_v c_v \rho^v \cos v\phi + a_v \rho^v d_v \sin v\phi)$$

简化:  $\varphi = A_0 + B_0 \phi + \sum_v (A_v \rho^v \cos v\phi + B_v \rho^v \sin v\phi)$

$$\phi = 0 \text{ 时, } \varphi = V_0, \quad \implies \quad \varphi = A_0 + \sum_v A_v \rho^v = V_0 \quad \implies \quad A_0 = V_0, \quad A_v = 0$$

Let there be light

通解:  $\varphi = (a_0 + b_0 \ln \rho)(c_0 + d_0 \phi) + \sum_v (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v})(c_v \cos v\phi + d_v \sin v\phi)$

$\rho \rightarrow 0$ ,  $\varphi$  有限, 故:  $b_0 = 0$ ,  $b_v = 0$ ,

$$\varphi = a_0 c_0 + a_0 d_0 \phi + \sum_v (a_v c_v \rho^v \cos v\phi + a_v \rho^v d_v \sin v\phi)$$

简化:  $\varphi = A_0 + B_0 \phi + \sum_v (A_v \rho^v \cos v\phi + B_v \rho^v \sin v\phi)$

$$\phi = 0 \text{ 时, } \varphi = V_0, \quad \implies \quad \varphi = A_0 + \sum_v A_v \rho^v = V_0 \quad \implies \quad A_0 = V_0, \quad A_v = 0$$

所以:  $\varphi = V_0 + B_0 \phi + \sum_v B_v \rho^v \sin v\phi$

Let there be light

通解:  $\varphi = (a_0 + b_0 \ln \rho)(c_0 + d_0 \phi) + \sum_v (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v})(c_v \cos v\phi + d_v \sin v\phi)$

$\rho \rightarrow 0$ ,  $\varphi$  有限, 故:  $b_0 = 0$ ,  $b_v = 0$ ,

$$\varphi = a_0 c_0 + a_0 d_0 \phi + \sum_v (a_v c_v \rho^v \cos v\phi + a_v \rho^v d_v \sin v\phi)$$

简化:  $\varphi = A_0 + B_0 \phi + \sum_v (A_v \rho^v \cos v\phi + B_v \rho^v \sin v\phi)$

$\phi = 0$  时,  $\varphi = V_0$ ,  $\implies \varphi = A_0 + \sum_v A_v \rho^v = V_0 \implies A_0 = V_0, A_v = 0$

所以:  $\varphi = V_0 + B_0 \phi + \sum_v B_v \rho^v \sin v\phi$

$\phi = \alpha$  时,  $\varphi = V_0$ ,  $\implies B_0 \alpha + \sum_v B_v \rho^v \sin v\alpha = 0$  两个解:  $B_0 = 0, B_v = 0$   
 $B_0 = 0, v\alpha = n\pi$

Let there be light

通解:  $\varphi = (a_0 + b_0 \ln \rho)(c_0 + d_0 \phi) + \sum_v (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v})(c_v \cos v\phi + d_v \sin v\phi)$

$\rho \rightarrow 0$ ,  $\varphi$  有限, 故:  $b_0 = 0$ ,  $b_v = 0$ ,

$$\varphi = a_0 c_0 + a_0 d_0 \phi + \sum_v (a_v c_v \rho^v \cos v\phi + a_v \rho^v d_v \sin v\phi)$$

简化:  $\varphi = A_0 + B_0 \phi + \sum_v (A_v \rho^v \cos v\phi + B_v \rho^v \sin v\phi)$

$$\phi = 0 \text{ 时, } \varphi = V_0, \quad \implies \quad \varphi = A_0 + \sum_v A_v \rho^v = V_0 \quad \implies \quad A_0 = V_0, \quad A_v = 0$$

所以:  $\varphi = V_0 + B_0 \phi + \sum_v B_v \rho^v \sin v\phi$

$$\phi = \alpha \text{ 时, } \varphi = V_0, \quad \implies \quad B_0 \alpha + \sum_v B_v \rho^v \sin v\alpha = 0 \quad \text{两个解:} \quad \begin{array}{l} B_0 = 0, \quad B_v = 0 \\ B_0 = 0, \quad v\alpha = n\pi \end{array}$$

$B_0 = 0, B_v = 0$  解对应于  $\varphi = V_0$ , 不是一般情况的解

Let there be light

通解:  $\varphi = (a_0 + b_0 \ln \rho)(c_0 + d_0 \phi) + \sum_v (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v})(c_v \cos v\phi + d_v \sin v\phi)$

$\rho \rightarrow 0$ ,  $\varphi$  有限, 故:  $b_0 = 0$ ,  $b_v = 0$ ,

$$\varphi = a_0 c_0 + a_0 d_0 \phi + \sum_v (a_v c_v \rho^v \cos v\phi + a_v \rho^v d_v \sin v\phi)$$

简化:  $\varphi = A_0 + B_0 \phi + \sum_v (A_v \rho^v \cos v\phi + B_v \rho^v \sin v\phi)$

$$\phi = 0 \text{ 时, } \varphi = V_0, \quad \Rightarrow \quad \varphi = A_0 + \sum_v A_v \rho^v = V_0 \quad \Rightarrow \quad A_0 = V_0, A_v = 0$$

所以:  $\varphi = V_0 + B_0 \phi + \sum_v B_v \rho^v \sin v\phi$

$$\phi = \alpha \text{ 时, } \varphi = V_0, \quad \Rightarrow \quad B_0 \alpha + \sum_v B_v \rho^v \sin v\alpha = 0 \quad \text{两个解: } \begin{array}{l} B_0 = 0, B_v = 0 \\ B_0 = 0, v\alpha = n\pi \end{array}$$

$B_0 = 0, B_v = 0$  解对应于  $\varphi = V_0$ , 不是一般情况的解

$$B_0 = 0, v\alpha = n\pi = 0 \text{ 解对应于: } \varphi = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \rho^{n\pi/\alpha} \sin \frac{n\pi}{\alpha} \phi \quad (n \text{ 不可为负})$$

Let there be light

通解:  $\varphi = (a_0 + b_0 \ln \rho)(c_0 + d_0 \phi) + \sum_v (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v})(c_v \cos v\phi + d_v \sin v\phi)$

$\rho \rightarrow 0$ ,  $\varphi$  有限, 故:  $b_0 = 0$ ,  $b_v = 0$ ,

$$\varphi = a_0 c_0 + a_0 d_0 \phi + \sum_v (a_v c_v \rho^v \cos v\phi + a_v \rho^v d_v \sin v\phi)$$

简化:  $\varphi = A_0 + B_0 \phi + \sum_v (A_v \rho^v \cos v\phi + B_v \rho^v \sin v\phi)$

$$\phi = 0 \text{ 时, } \varphi = V_0, \quad \Rightarrow \quad \varphi = A_0 + \sum_v A_v \rho^v = V_0 \quad \Rightarrow \quad A_0 = V_0, A_v = 0$$

所以:  $\varphi = V_0 + B_0 \phi + \sum_v B_v \rho^v \sin v\phi$

$$\phi = \alpha \text{ 时, } \varphi = V_0, \quad \Rightarrow \quad B_0 \alpha + \sum_v B_v \rho^v \sin v\alpha = 0 \quad \text{两个解: } \begin{matrix} B_0 = 0, B_v = 0 \\ B_0 = 0, v\alpha = n\pi \end{matrix}$$

$B_0 = 0, B_v = 0$  解对应于  $\varphi = V_0$ , 不是一般情况的解

$$B_0 = 0, v\alpha = n\pi = 0 \text{ 解对应于: } \varphi = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \rho^{n\pi/\alpha} \sin \frac{n\pi}{\alpha} \phi \quad (n \text{ 不可为负})$$

讨论  $\rho \sim 0$  情况, 取最低次幂  $n = 1$  项:  $\varphi = B_1 \rho^{\pi/\alpha} \sin \frac{\pi\phi}{\alpha} + V_0$



Let there be light

通解:  $\varphi = (a_0 + b_0 \ln \rho)(c_0 + d_0 \phi) + \sum_v (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v})(c_v \cos v\phi + d_v \sin v\phi)$

$\rho \rightarrow 0$ ,  $\varphi$  有限, 故:  $b_0 = 0$ ,  $b_v = 0$ ,

$$\varphi = a_0 c_0 + a_0 d_0 \phi + \sum_v (a_v c_v \rho^v \cos v\phi + a_v \rho^v d_v \sin v\phi)$$

简化:  $\varphi = A_0 + B_0 \phi + \sum_v (A_v \rho^v \cos v\phi + B_v \rho^v \sin v\phi)$

$$\phi = 0 \text{ 时, } \varphi = V_0, \quad \Rightarrow \quad \varphi = A_0 + \sum_v A_v \rho^v = V_0 \quad \Rightarrow \quad A_0 = V_0, A_v = 0$$

所以:  $\varphi = V_0 + B_0 \phi + \sum_v B_v \rho^v \sin v\phi$

$$\phi = \alpha \text{ 时, } \varphi = V_0, \quad \Rightarrow \quad B_0 \alpha + \sum_v B_v \rho^v \sin v\alpha = 0 \quad \text{两个解: } \begin{matrix} B_0 = 0, B_v = 0 \\ B_0 = 0, v\alpha = n\pi \end{matrix}$$

$B_0 = 0, B_v = 0$  解对应于  $\varphi = V_0$ , 不是一般情况的解

$$B_0 = 0, v\alpha = n\pi = 0 \text{ 解对应于: } \varphi = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \rho^{n\pi/\alpha} \sin \frac{n\pi}{\alpha} \phi \quad (n \text{ 不可为负})$$

讨论  $\rho \sim 0$  情况, 取最低次幂  $n = 1$  项:  $\varphi = B_1 \rho^{\pi/\alpha} \sin \frac{\pi\phi}{\alpha} + V_0$

$$\text{电场: } E_\rho = -\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = -B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \sin \frac{\pi}{\alpha} \phi, \quad E_\phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} = -B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \cos \frac{\pi}{\alpha} \phi$$

Let there be light

通解:  $\varphi = (a_0 + b_0 \ln \rho)(c_0 + d_0 \phi) + \sum_v (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v})(c_v \cos v\phi + d_v \sin v\phi)$

$\rho \rightarrow 0$ ,  $\varphi$  有限, 故:  $b_0 = 0$ ,  $b_v = 0$ ,

$$\varphi = a_0 c_0 + a_0 d_0 \phi + \sum_v (a_v c_v \rho^v \cos v\phi + a_v \rho^v d_v \sin v\phi)$$

简化:  $\varphi = A_0 + B_0 \phi + \sum_v (A_v \rho^v \cos v\phi + B_v \rho^v \sin v\phi)$

$$\phi = 0 \text{ 时, } \varphi = V_0, \quad \Rightarrow \quad \varphi = A_0 + \sum_v A_v \rho^v = V_0 \quad \Rightarrow \quad A_0 = V_0, A_v = 0$$

所以:  $\varphi = V_0 + B_0 \phi + \sum_v B_v \rho^v \sin v\phi$

$$\phi = \alpha \text{ 时, } \varphi = V_0, \quad \Rightarrow \quad B_0 \alpha + \sum_v B_v \rho^v \sin v\alpha = 0 \quad \text{两个解: } \begin{matrix} B_0 = 0, B_v = 0 \\ B_0 = 0, v\alpha = n\pi \end{matrix}$$

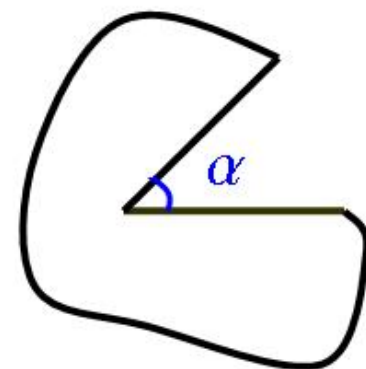
$B_0 = 0, B_v = 0$  解对应于  $\varphi = V_0$ , 不是一般情况的解

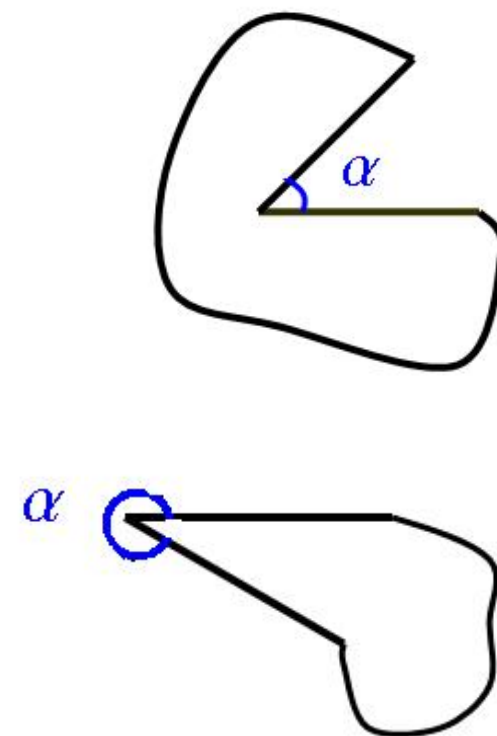
$$B_0 = 0, v\alpha = n\pi = 0 \text{ 解对应于: } \varphi = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \rho^{n\pi/\alpha} \sin \frac{n\pi}{\alpha} \phi \quad (n \text{ 不可为负})$$

讨论  $\rho \sim 0$  情况, 取最低次幂  $n = 1$  项:  $\varphi = B_1 \rho^{\pi/\alpha} \sin \frac{\pi\phi}{\alpha} + V_0$

$$\text{电场: } E_\rho = -\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = -B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \sin \frac{\pi}{\alpha} \phi, \quad E_\phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} = -B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \cos \frac{\pi}{\alpha} \phi$$

$$\text{在 } \phi = 0 \text{ 和 } \phi = \alpha \text{ 处: } \sigma_f \Big|_{\phi=0} = D_n \Big|_{\phi=0} = \epsilon E_\phi \Big|_{\phi=0} = -\epsilon B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} = \sigma_f \Big|_{\phi=\alpha}$$

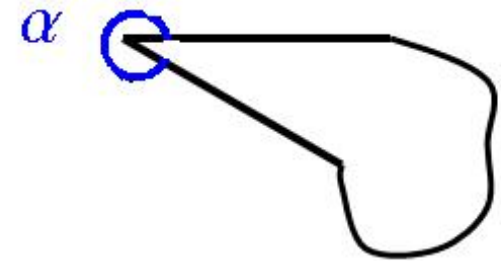
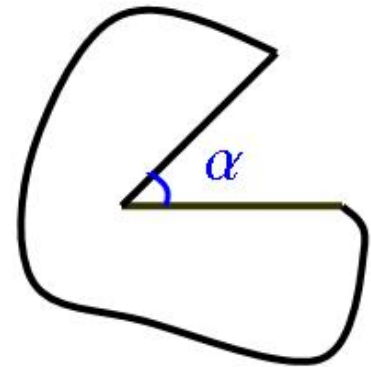




# Let there be light

$$\text{电场: } E_\rho = -B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \sin \frac{\pi}{\alpha} \phi,$$

$$E_\phi = -B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \cos \frac{\pi}{\alpha} \phi$$

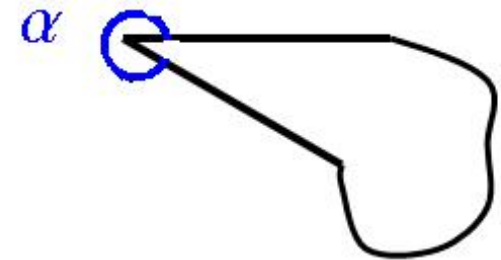
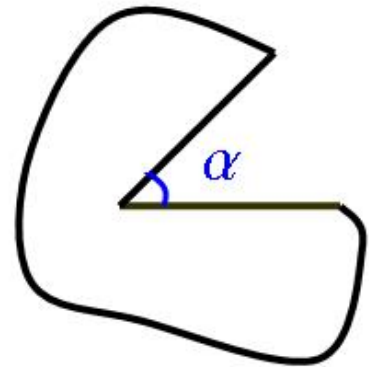


Let there be light

$$\text{电场: } E_\rho = -B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \sin \frac{\pi}{\alpha} \phi,$$

$$E_\phi = -B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \cos \frac{\pi}{\alpha} \phi$$

$$\sigma_f \Big|_{\phi=0} = \sigma_f \Big|_{\phi=\alpha} = -\epsilon B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}$$



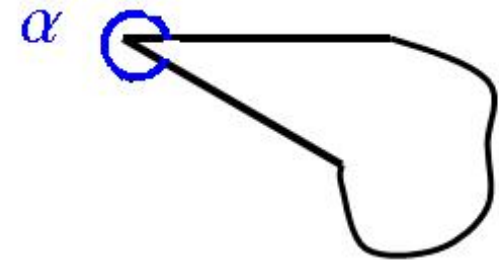
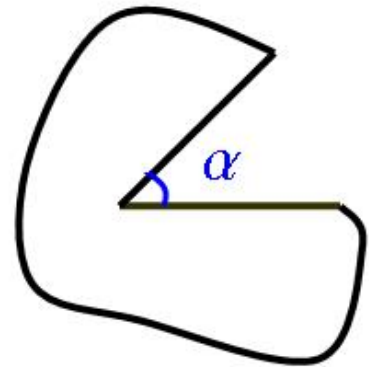
Let there be light

$$\text{电场: } E_\rho = -B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \sin \frac{\pi}{\alpha} \phi,$$

$$E_\phi = -B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \cos \frac{\pi}{\alpha} \phi$$

$$\sigma_f \Big|_{\phi=0} = \sigma_f \Big|_{\phi=\alpha} = -\epsilon B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}$$

讨论：



Let there be light

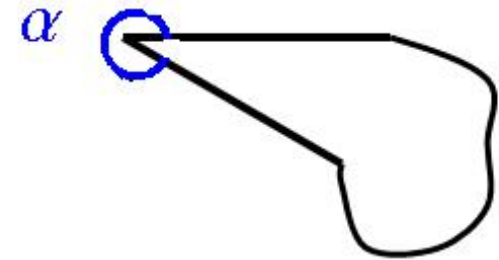
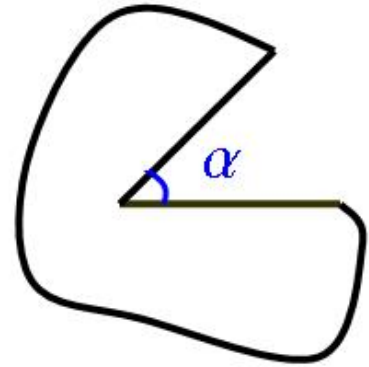
$$\text{电场: } E_\rho = -B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \sin \frac{\pi}{\alpha} \phi,$$

$$E_\phi = -B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \cos \frac{\pi}{\alpha} \phi$$

$$\sigma_f \Big|_{\phi=0} = \sigma_f \Big|_{\phi=\alpha} = -\epsilon B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}$$

讨论：

1. 对凹口,  $\alpha < \pi$  (如上图),  $\frac{\pi}{\alpha} - 1 > 0$ ,  $\sigma_f \sim \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}$ ,  $\sigma_f \sim 0$





Let there be light

$$\text{电场: } E_\rho = -B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \sin \frac{\pi}{\alpha} \phi,$$

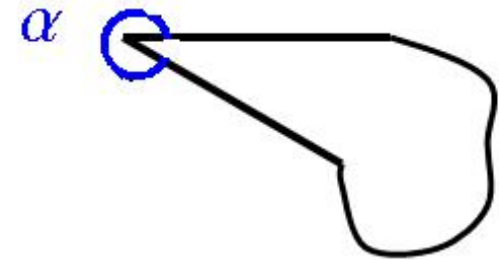
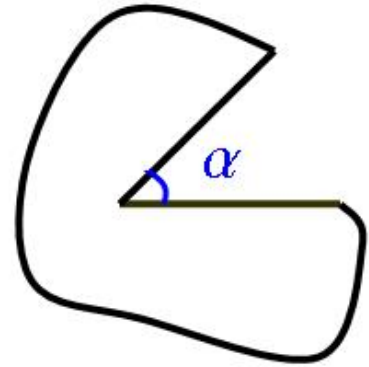
$$E_\phi = -B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \cos \frac{\pi}{\alpha} \phi$$

$$\sigma_f \Big|_{\phi=0} = \sigma_f \Big|_{\phi=\alpha} = -\epsilon B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}$$

讨论：

1. 对凹口， $\alpha < \pi$  (如上图)， $\frac{\pi}{\alpha} - 1 > 0$ ， $\sigma_f \sim \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}$ ， $\sigma_f \sim 0$

凹口处基本无电荷积累，电场  $E \sim \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \sim 0$



Let there be light

$$\text{电场: } E_\rho = -B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \sin \frac{\pi}{\alpha} \phi,$$

$$E_\phi = -B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \cos \frac{\pi}{\alpha} \phi$$

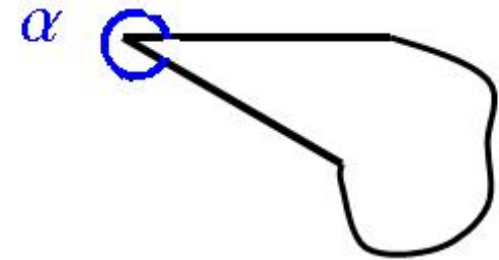
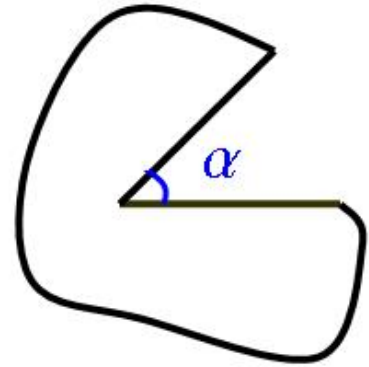
$$\sigma_f \Big|_{\phi=0} = \sigma_f \Big|_{\phi=\alpha} = -\epsilon B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}$$

## 讨论：

1. 对凹口,  $\alpha < \pi$  (如上图),  $\frac{\pi}{\alpha} - 1 > 0$ ,  $\sigma_f \sim \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}$ ,  $\sigma_f \sim 0$

凹口处基本无电荷积累, 电场  $E \sim \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \sim 0$

2. 对平口,  $\alpha = \pi$ , 导体面上  $\sigma_f = -\epsilon B_1$  与  $\rho$  无关,

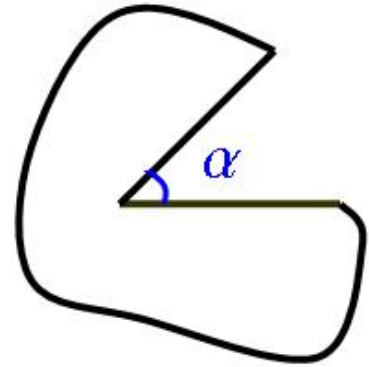


Let there be light

$$\text{电场: } E_\rho = -B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \sin \frac{\pi}{\alpha} \phi,$$

$$E_\phi = -B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \cos \frac{\pi}{\alpha} \phi$$

$$\sigma_f \Big|_{\phi=0} = \sigma_f \Big|_{\phi=\alpha} = -\epsilon B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}$$

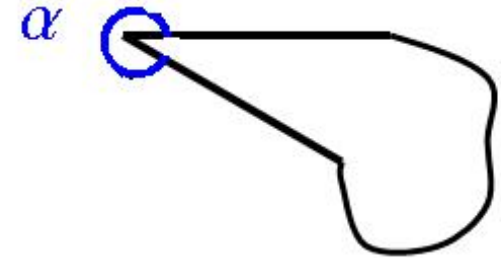
**讨论：**

1. 对凹口,  $\alpha < \pi$  (如上图),  $\frac{\pi}{\alpha} - 1 > 0$ ,  $\sigma_f \sim \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}$ ,  $\sigma_f \sim 0$

凹口处基本无电荷积累, 电场  $E \sim \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \sim 0$

2. 对平口,  $\alpha = \pi$ , 导体面上  $\sigma_f = -\epsilon B_1$  与  $\rho$  无关,

导体外表面: 法向电场  $E_\phi \Big|_{\phi=0,\pi} = -B_1 = \frac{\sigma_f}{\epsilon}$ , 切向电场  $E_\rho \Big|_{\phi=0,\pi} = 0$ 。

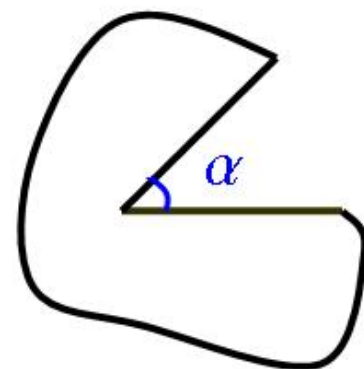


Let there be light

$$\text{电场: } E_\rho = -B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \sin \frac{\pi}{\alpha} \phi,$$

$$E_\phi = -B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \cos \frac{\pi}{\alpha} \phi$$

$$\sigma_f \Big|_{\phi=0} = \sigma_f \Big|_{\phi=\alpha} = -\epsilon B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}$$



## 讨论：

1. 对凹口,  $\alpha < \pi$  (如上图),  $\frac{\pi}{\alpha} - 1 > 0$ ,  $\sigma_f \sim \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}$ ,  $\sigma_f \sim 0$

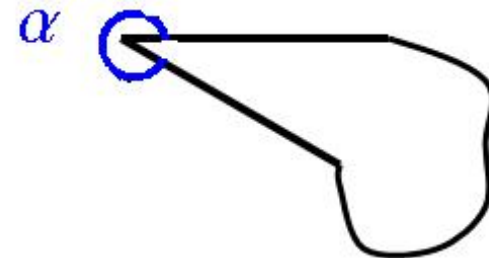
凹口处基本无电荷积累, 电场  $E \sim \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \sim 0$

2. 对平口,  $\alpha = \pi$ , 导体面上  $\sigma_f = -\epsilon B_1$  与  $\rho$  无关,

导体外表面: 法向电场  $E_\phi \Big|_{\phi=0,\pi} = -B_1 = \frac{\sigma_f}{\epsilon}$ , 切向电场  $E_\rho \Big|_{\phi=0,\pi} = 0$ 。

3. 对尖凸口,  $\alpha > \pi$  (如下图),  $\frac{\pi}{\alpha} - 1 < 0$ ,

$\sigma_f \sim \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}$ , 尖凸口处电荷积累, 电场  $E \sim \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}$ , 电场很强

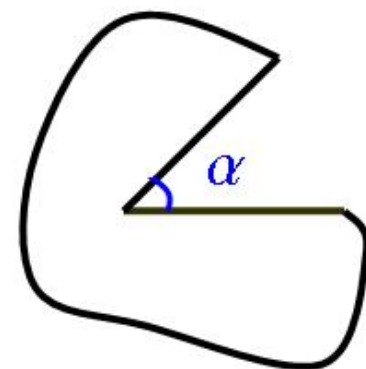


Let there be light

$$\text{电场: } E_\rho = -B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \sin \frac{\pi}{\alpha} \phi,$$

$$E_\phi = -B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \cos \frac{\pi}{\alpha} \phi$$

$$\sigma_f \Big|_{\phi=0} = \sigma_f \Big|_{\phi=\alpha} = -\epsilon B_1 \frac{\pi}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}$$



## 讨论：

1. 对凹口,  $\alpha < \pi$  (如上图),  $\frac{\pi}{\alpha} - 1 > 0$ ,  $\sigma_f \sim \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}$ ,  $\sigma_f \sim 0$

凹口处基本无电荷积累, 电场  $E \sim \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \sim 0$

2. 对平口,  $\alpha = \pi$ , 导体面上  $\sigma_f = -\epsilon B_1$  与  $\rho$  无关,

导体外表面: 法向电场  $E_\phi \Big|_{\phi=0,\pi} = -B_1 = \frac{\sigma_f}{\epsilon}$ , 切向电场  $E_\rho \Big|_{\phi=0,\pi} = 0$ 。

3. 对尖凸口,  $\alpha > \pi$  (如下图),  $\frac{\pi}{\alpha} - 1 < 0$ ,

$\sigma_f \sim \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}$ , 尖凸口处电荷积累, 电场  $E \sim \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}$ , 电场很强

4. 本例为 2D 情况, 对 3D 情况, 参见 [教材 p99 例题 6](#)

