§1.7 矢量场理论

§ 1.7 矢量场理论

自 Faraday 之后，电磁规律用矢量场 $\vec{\boldsymbol{E}}$，$\vec{\boldsymbol{B}}$ 来描述，而 $\vec{\boldsymbol{E}}$，$\vec{\boldsymbol{B}}$ 的规律则用微分方程描述。后者通常基于矢量场的散度和旋度。

§ 1.7 矢量场理论

自 Faraday 之后，电磁规律用矢量场 $\vec{E}$，$\vec{B}$ 来描述，而 $\vec{E}$，$\vec{B}$ 的规律则用微分方程描述。后者通常基于矢量场的散度和旋度。

问题一：给定（已知）某矢量场 $\vec{F}$ 的散度和旋度，能否唯一确定 $\vec{F}$

§ 1.7 矢量场理论

自 Faraday 之后，电磁规律用矢量场 $\vec{\boldsymbol{E}}$，$\vec{\boldsymbol{B}}$ 来描述，而 $\vec{\boldsymbol{E}}$，$\vec{\boldsymbol{B}}$ 的规律则用微分方程描述。后者通常基于矢量场的散度和旋度。

问题一：给定（已知）某矢量场 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 的散度和旋度，能否唯一确定 $\vec{\boldsymbol{F}}$

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{C}} \\ \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{F}} = D \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} \vec{\boldsymbol{F}}$$

§ 1.7 矢量场理论

自 Faraday 之后，电磁规律用矢量场 $\vec{\boldsymbol{E}}$，$\vec{\boldsymbol{B}}$ 来描述，而 $\vec{\boldsymbol{E}}$，$\vec{\boldsymbol{B}}$ 的规律则用微分方程描述。后者通常基于矢量场的散度和旋度。

问题一：给定（已知）某矢量场 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 的散度和旋度，能否唯一确定 $\vec{\boldsymbol{F}}$

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla\times\vec{\boldsymbol{F}}=\vec{\boldsymbol{C}} \\ \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}=D \end{array}\right. \overset{?}{\Longrightarrow} \vec{\boldsymbol{F}}$$

反例：

§ 1.7 矢量场理论

自 Faraday 之后，电磁规律用矢量场 $\vec{\boldsymbol{E}}$，$\vec{\boldsymbol{B}}$ 来描述，而 $\vec{\boldsymbol{E}}$，$\vec{\boldsymbol{B}}$ 的规律则用微分方程描述。后者通常基于矢量场的散度和旋度。

问题一：给定（已知）某矢量场 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 的散度和旋度，能否唯一确定 $\vec{\boldsymbol{F}}$

$$\left\{\begin{array}{l}\nabla\times\vec{\boldsymbol{F}}=\vec{\boldsymbol{C}}\\[2ex]\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}=D\end{array}\right.\quad\overset{?}{\Longrightarrow}\quad\vec{\boldsymbol{F}}$$

反例：

$$\vec{\boldsymbol{F}}_1=y\,\hat{\boldsymbol{e}}_x+x\,\hat{\boldsymbol{e}}_y\qquad\neq\qquad\vec{\boldsymbol{F}}_2=yz\,\hat{\boldsymbol{e}}_x+zx\,\hat{\boldsymbol{e}}_y+xy\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}_1=\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}_2=0,\qquad\qquad\nabla\times\vec{\boldsymbol{F}}_1=\nabla\times\vec{\boldsymbol{F}}_2=0$$

§1.7 矢量场理论

自 Faraday 之后，电磁规律用矢量场 $\vec{\boldsymbol{E}}$，$\vec{\boldsymbol{B}}$ 来描述，而 $\vec{\boldsymbol{E}}$，$\vec{\boldsymbol{B}}$ 的规律则用微分方程描述。后者通常基于矢量场的散度和旋度。

问题一：给定（已知）某矢量场 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 的散度和旋度，能否唯一确定 $\vec{\boldsymbol{F}}$

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{\boldsymbol{F}}=\vec{\boldsymbol{C}} \\ \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}=D \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} \vec{\boldsymbol{F}}$$

反例：

$$\vec{\boldsymbol{F}}_1=y\,\hat{\boldsymbol{e}}_x+x\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \qquad \neq \qquad \vec{\boldsymbol{F}}_2=yz\,\hat{\boldsymbol{e}}_x+zx\,\hat{\boldsymbol{e}}_y+xy\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}_1=\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}_2=0, \qquad \nabla\times\vec{\boldsymbol{F}}_1=\nabla\times\vec{\boldsymbol{F}}_2=0$$

还需要边界（初始）条件

有些矢量场满足： $\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{F}}_e = 0$

有些矢量场满足： $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}_e=0$ 称为无散(度)场 (divergence-less or solenoidal fields)

有些矢量场满足： $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}_e=0$ 称为无散(度)场 (divergence-less or solenoidal fields)

有些矢量场满足： $\nabla\times\vec{\boldsymbol{F}}_l=0$

有些矢量场满足： $\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{F}}_e = 0$ 称为无散(度)场 (divergence-less or solenoidal fields)

有些矢量场满足： $\nabla \times \vec{\boldsymbol{F}}_l = 0$ 称为无旋(度)场 (curl-less or irrotational fields)

有些矢量场满足： $\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{F}}_e = 0$ 称为无散(度)场 (divergence-less or solenoidal fields)

有些矢量场满足： $\nabla \times \vec{\boldsymbol{F}}_l = 0$ 称为无旋(度)场 (curl-less or irrotational fields)

一般矢量场：

有些矢量场满足： $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}_e=0$ 称为无散(度)场 (divergence-less or solenoidal fields)

有些矢量场满足： $\nabla\times\vec{\boldsymbol{F}}_l=0$ 称为无旋(度)场 (curl-less or irrotational fields)

一般矢量场： $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}\neq 0$ $\nabla\times\vec{\boldsymbol{F}}\neq 0$

有些矢量场满足： $\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{F}}_e = 0$ 称为无散(度)场 (divergence-less or solenoidal fields)

有些矢量场满足： $\nabla \times \vec{\boldsymbol{F}}_l = 0$ 称为无旋(度)场 (curl-less or irrotational fields)

一般矢量场： $\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{F}} \neq 0 \quad \nabla \times \vec{\boldsymbol{F}} \neq 0$

问题二：一般矢量场能否表为一个无散场和一个无旋场之和？

有些矢量场满足： $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}_e=0$ 称为无散(度)场 (divergence-less or solenoidal fields)

有些矢量场满足： $\nabla\times\vec{\boldsymbol{F}}_l=0$ 称为无旋(度)场 (curl-less or irrotational fields)

一般矢量场： $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}\neq 0 \qquad \nabla\times\vec{\boldsymbol{F}}\neq 0$

问题二：一般矢量场能否表为一个无散场和一个无旋场之和？

$$\vec{\boldsymbol{F}} \quad \overset{?}{=} \quad \vec{\boldsymbol{F}}_e+\vec{\boldsymbol{F}}_l$$

一、 Helmholtz 定理

一、 Helmholtz 定理

在单连通有限区域 $\mathcal{V}$ 内，如果：

一、 Helmholtz 定理

在单连通有限区域 $\mathcal{V}$ 内，如果：

1. 矢量场 $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 的散度 $D(\vec{\boldsymbol{r}})$ 和旋度 $\vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 给定

一、 Helmholtz 定理

在单连通有限区域 $\mathcal{V}$ 内，如果：

1. 矢量场 $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 的散度 $D(\vec{\boldsymbol{r}})$ 和旋度 $\vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 给定
2. 有限区域 $\mathcal{V}$ 的边界 $\mathcal{S}$ 上，$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 的法向和切向分量给定

一、 Helmholtz 定理

在单连通有限区域 $\mathcal{V}$ 内，如果：

1. 矢量场 $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 的散度 $D(\vec{\boldsymbol{r}})$ 和旋度 $\vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 给定

2. 有限区域 $\mathcal{V}$ 的边界 $\mathcal{S}$ 上，$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 的法向和切向分量给定

则：$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 由下式唯一确定

一、 Helmholtz 定理

在单连通有限区域 $\mathcal{V}$ 内，如果：

1. 矢量场 $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 的散度 $D(\vec{\boldsymbol{r}})$ 和旋度 $\vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 给定
2. 有限区域 $\mathcal{V}$ 的边界 $\mathcal{S}$ 上，$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 的法向和切向分量给定

则：$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 由下式唯一确定

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla U + \nabla \times \vec{\boldsymbol{W}}$$

$$U(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \frac{D(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \frac{1}{4\pi}\oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'$$

$$\vec{\boldsymbol{W}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \frac{1}{4\pi}\oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'$$

一、 Helmholtz 定理

在单连通有限区域 $\mathcal{V}$ 内，如果：

1. 矢量场 $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 的散度 $D(\vec{\boldsymbol{r}})$ 和旋度 $\vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 给定
2. 有限区域 $\mathcal{V}$ 的边界 $\mathcal{S}$ 上，$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 的法向和切向分量给定

则：$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 由下式唯一确定

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla U + \nabla \times \vec{\boldsymbol{W}}$$

$$U(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \frac{D(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \frac{1}{4\pi}\oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'$$

$$\vec{\boldsymbol{W}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \frac{1}{4\pi}\oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'$$

证明：

一、 Helmholtz 定理

在单连通有限区域 $\mathcal{V}$ 内，如果：

1. 矢量场 $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 的散度 $D(\vec{\boldsymbol{r}})$ 和旋度 $\vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 给定
2. 有限区域 $\mathcal{V}$ 的边界 $\mathcal{S}$ 上，$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 的法向和切向分量给定

则：$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 由下式唯一确定

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla U + \nabla \times \vec{\boldsymbol{W}}$$

$$U(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \frac{D(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \frac{1}{4\pi}\oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'$$

$$\vec{\boldsymbol{W}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \frac{1}{4\pi}\oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'$$

证明：

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \quad = \int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,')\,\mathrm{d}\tau'$$ 积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \quad = \int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,')\,\mathrm{d}\tau'$$

Let there be light

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \quad = \int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,')\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla^2 \dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} = -4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,')$

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla^2 \dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|} = -4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\nabla^2 \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,')\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla^2 \dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} = -4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,')$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\nabla^2 \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

由于 ∇^2 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 视为常矢量

利用：$\nabla^2(f\vec{\boldsymbol{c}}) = \vec{\boldsymbol{c}}\nabla^2 f$

思考：如 $\vec{\boldsymbol{a}}$ 是 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 的函数，$\nabla^2(f\vec{\boldsymbol{a}}) = ?$

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,\mathrm{d}\tau'$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\nabla^2\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \nabla^2\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla^2\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|} = -4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')$

由于 ∇^2 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 视为常矢量

利用：$\nabla^2(f\vec{\boldsymbol{c}}) = \vec{\boldsymbol{c}}\,\nabla^2 f$

思考：如 $\vec{\boldsymbol{a}}$ 是 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 的函数，$\nabla^2(f\vec{\boldsymbol{a}}) = ?$

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla^2 \dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|} = -4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\nabla^2\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

由于 ∇^2 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 视为常矢量

利用：$\nabla^2(f\vec{\boldsymbol{c}}) = \vec{\boldsymbol{c}}\,\nabla^2 f$

思考：如 $\vec{\boldsymbol{a}}$ 是 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 的函数，$\nabla^2(f\vec{\boldsymbol{a}}) = ?$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \nabla^2\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，∇^2对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，可交换次序

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,\mathrm{d}\tau' \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\nabla^2\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \nabla^2\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' \\ &= -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\end{aligned}$$

利用 $\nabla^2\dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|} = -4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')$

由于 ∇^2 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 视为常矢量

利用：$\nabla^2(f\vec{\boldsymbol{c}}) = \vec{\boldsymbol{c}}\,\nabla^2 f$

思考：如 $\vec{\boldsymbol{a}}$ 是 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 的函数，$\nabla^2(f\vec{\boldsymbol{a}}) =?$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，∇^2对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，可交换次序

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,\mathrm{d}\tau' \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\nabla^2\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \nabla^2\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' \\
&= -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'
\end{aligned}
$$

利用 $\nabla^2\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|} = -4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')$

由于 ∇^2 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 视为常矢量

利用：$\nabla^2(f\vec{\boldsymbol{c}}) = \vec{\boldsymbol{c}}\nabla^2 f$

思考：如 $\vec{\boldsymbol{a}}$ 是 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 的函数，$\nabla^2(f\vec{\boldsymbol{a}}) =?$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，∇^2对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，可交换次序

利用：$\nabla\times(\nabla\times\vec{\boldsymbol{a}}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{a}}) - \nabla^2\vec{\boldsymbol{a}}$

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla^2 \dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|} = -4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\nabla^2 \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

由于 ∇^2 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 视为常矢量

利用：$\nabla^2(f\vec{\boldsymbol{c}}) = \vec{\boldsymbol{c}}\nabla^2 f$

思考：如 $\vec{\boldsymbol{a}}$ 是 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 的函数，$\nabla^2(f\vec{\boldsymbol{a}}) =?$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \nabla^2 \frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，∇^2对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，可交换次序

$$= -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

利用：$\nabla\times(\nabla\times\vec{\boldsymbol{a}}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{a}}) - \nabla^2\vec{\boldsymbol{a}}$

$$= -\frac{1}{4\pi}\nabla\left[\nabla\cdot\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right] + \frac{1}{4\pi}\nabla\times\left[\nabla\times\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right]$$

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,\mathrm{d}\tau' \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\nabla^2\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \nabla^2\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' \\
&= -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' \\
&= -\frac{1}{4\pi}\nabla\left[\nabla\cdot\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right] + \frac{1}{4\pi}\nabla\times\left[\nabla\times\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right] \\
&= -\nabla U + \nabla\times\vec{\boldsymbol{W}}
\end{aligned}$$

利用 $\nabla^2\dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|} = -4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')$

由于 ∇^2 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 视为常矢量

利用：$\nabla^2(f\vec{\boldsymbol{c}}) = \vec{\boldsymbol{c}}\nabla^2 f$

思考：如 $\vec{\boldsymbol{a}}$ 是 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 的函数，$\nabla^2(f\vec{\boldsymbol{a}}) =?$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，∇^2对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，可交换次序

利用：$\nabla\times(\nabla\times\vec{\boldsymbol{a}}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{a}}) - \nabla^2\vec{\boldsymbol{a}}$

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla^2 \dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|} = -4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\nabla^2\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

由于 ∇^2 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 视为常矢量

利用：$\nabla^2(f\vec{\boldsymbol{c}}) = \vec{\boldsymbol{c}}\nabla^2 f$

思考：如 $\vec{\boldsymbol{a}}$ 是 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 的函数，$\nabla^2(f\vec{\boldsymbol{a}}) =?$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \nabla^2\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，∇^2对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，可交换次序

$$= -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

利用：$\nabla\times(\nabla\times\vec{\boldsymbol{a}}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{a}}) - \nabla^2\vec{\boldsymbol{a}}$

$$= -\frac{1}{4\pi}\nabla\left[\nabla\cdot\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right] + \frac{1}{4\pi}\nabla\times\left[\nabla\times\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right]$$

$$= -\nabla U + \nabla\times\vec{\boldsymbol{W}}$$

$$U = \frac{1}{4\pi}\left[\nabla\cdot\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right],$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla^2 \dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|} = -4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\nabla^2 \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

由于 ∇^2 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 视为常矢量

利用：$\nabla^2(f\vec{\boldsymbol{c}}) = \vec{\boldsymbol{c}}\nabla^2 f$

思考：如 $\vec{\boldsymbol{a}}$ 是 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 的函数，$\nabla^2(f\vec{\boldsymbol{a}}) = ?$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \nabla^2 \frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，∇^2对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，可交换次序

$$= -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

利用：$\nabla\times(\nabla\times\vec{\boldsymbol{a}}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{a}}) - \nabla^2\vec{\boldsymbol{a}}$

$$= -\frac{1}{4\pi}\nabla\Big[\nabla\cdot\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\Big] + \frac{1}{4\pi}\nabla\times\Big[\nabla\times\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\Big]$$

$$= -\nabla U + \nabla\times\vec{\boldsymbol{W}}$$

$$U = \frac{1}{4\pi}\Big[\nabla\cdot\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\Big], \qquad \vec{\boldsymbol{W}} = \frac{1}{4\pi}\Big[\nabla\times\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\Big]$$

$$U = \frac{1}{4\pi}\left[\nabla\cdot\int_{\mathcal{V}}\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathsf{d}\tau'\right]$$

$$U = \frac{1}{4\pi}\left[\nabla\cdot\int_{\mathcal{V}}\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right]$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，$\nabla\cdot$ 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，可交换次序

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{4\pi}\left[\nabla\cdot\int_{\mathcal{V}}\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right] \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'
\end{aligned}
$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，$\nabla\cdot$ 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，可交换次序

$$U = \frac{1}{4\pi}\left[\nabla\cdot\int_{\mathcal{V}}\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right]$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，$\nabla\cdot$ 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，可交换次序

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 与 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 无关，可利用 $\nabla\cdot(\vec{\boldsymbol{c}}f) = \vec{\boldsymbol{c}}\cdot\nabla f$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4\pi}\left[\nabla\cdot\int_{\mathcal{V}}\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right] \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' \end{aligned}$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，$\nabla\cdot$ 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，可交换次序

$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 与 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 无关，可利用 $\nabla\cdot(\vec{\boldsymbol{c}}f)=\vec{\boldsymbol{c}}\cdot\nabla f$

$$U = \frac{1}{4\pi}\left[\nabla\cdot\int_{\mathcal{V}}\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right]$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，$\nabla\cdot$ 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，可交换次序

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 与 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 无关，可利用 $\nabla\cdot(\vec{\boldsymbol{c}}f) = \vec{\boldsymbol{c}}\cdot\nabla f$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla'\dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|} = -\nabla\dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}$

$$U = \frac{1}{4\pi}\left[\nabla\cdot\int_{\mathcal{V}}\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right]$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，$\nabla\cdot$ 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，可交换次序

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 与 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 无关，可利用 $\nabla\cdot(\vec{\boldsymbol{c}}f) = \vec{\boldsymbol{c}}\cdot\nabla f$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla'\dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|} = -\nabla\dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\cdot\nabla'\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

$$U = \frac{1}{4\pi}\left[\nabla\cdot\int_{\mathcal{V}}\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right]$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，$\nabla\cdot$ 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，可交换次序

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 与 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 无关，可利用 $\nabla\cdot(\vec{\boldsymbol{c}}f)=\vec{\boldsymbol{c}}\cdot\nabla f$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla'\dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}=-\nabla\dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\cdot\nabla'\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla'\cdot(\vec{\boldsymbol{a}}f)=f(\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{a}})+\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\nabla' f$

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{4\pi}\left[\nabla\cdot\int_{\mathcal{V}}\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right] && \text{积分对 } \vec{\boldsymbol{r}}\,' \text{ 进行，} \nabla\cdot \text{ 对 } \vec{\boldsymbol{r}} \text{ 进行，可交换次序} \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' && \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \text{ 与 } \vec{\boldsymbol{r}} \text{ 无关，可利用 } \nabla\cdot(\vec{\boldsymbol{c}}f)=\vec{\boldsymbol{c}}\cdot\nabla f \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' && \text{利用 } \nabla'\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}=-\nabla\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|} \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\cdot\nabla'\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' && \text{利用 } \nabla'\cdot(\vec{\boldsymbol{a}}f)=f(\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{a}})+\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\nabla' f \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla'\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'+\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\frac{\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'
\end{aligned}
$$

$$U = \frac{1}{4\pi}\left[\nabla\cdot\int_{\mathcal{V}}\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right]$$ 积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，$\nabla\cdot$ 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，可交换次序

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$ $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 与 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 无关，可利用 $\nabla\cdot(\vec{\boldsymbol{c}}f) = \vec{\boldsymbol{c}}\cdot\nabla f$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$ 利用 $\nabla'\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|} = -\nabla\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\cdot\nabla'\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$ 利用 $\nabla'\cdot(\vec{\boldsymbol{a}}f) = f(\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{a}}) + \vec{\boldsymbol{a}}\cdot\nabla' f$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla'\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' + \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\frac{\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$ 第一项利用散度定理

$$U = \frac{1}{4\pi}\left[\nabla\cdot\int_{\mathcal{V}}\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right]$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，$\nabla\cdot$ 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，可交换次序

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 与 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 无关，可利用 $\nabla\cdot(\vec{\boldsymbol{c}}f) = \vec{\boldsymbol{c}}\cdot\nabla f$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla'\dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|} = -\nabla\dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\cdot\nabla'\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla'\cdot(\vec{\boldsymbol{a}}f) = f(\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{a}}) + \vec{\boldsymbol{a}}\cdot\nabla' f$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla'\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' + \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\frac{\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

第一项利用散度定理

$$\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\tau$$

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{4\pi}\left[\nabla\cdot\int_{\mathcal{V}}\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right] && \text{积分对 } \vec{\boldsymbol{r}}\,' \text{ 进行，} \nabla\cdot \text{ 对 } \vec{\boldsymbol{r}} \text{ 进行，可交换次序}\\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' && \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \text{ 与 } \vec{\boldsymbol{r}} \text{ 无关，可利用 } \nabla\cdot(\vec{\boldsymbol{c}}f)=\vec{\boldsymbol{c}}\cdot\nabla f\\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' && \text{利用 } \nabla'\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}=-\nabla\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\cdot\nabla'\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' && \text{利用 } \nabla'\cdot(\vec{\boldsymbol{a}}f)=f(\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{a}})+\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\nabla' f\\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla'\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'+\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\frac{\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' && \text{第一项利用散度定理}\\
& && \oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\sigma=\int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\tau\\
&= -\frac{1}{4\pi}\oint_{\mathcal{S}}\frac{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'+\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\frac{\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'
\end{aligned}
$$

$$U = \frac{1}{4\pi}\left[\nabla\cdot\int_{\mathcal{V}}\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right]$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，$\nabla\cdot$ 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，可交换次序

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 与 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 无关，可利用 $\nabla\cdot(\vec{\boldsymbol{c}}f) = \vec{\boldsymbol{c}}\cdot\nabla f$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla'\dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|} = -\nabla\dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\cdot\nabla'\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla'\cdot(\vec{\boldsymbol{a}}f) = f(\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{a}}) + \vec{\boldsymbol{a}}\cdot\nabla' f$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla'\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' + \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\frac{\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

第一项利用散度定理

$$\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\tau$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\oint_{\mathcal{S}}\frac{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma' + \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\frac{\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' \qquad = U$$

$$\vec{\boldsymbol{W}} = \frac{1}{4\pi}\left[\nabla\times\int_{\mathcal{V}}\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right]$$

$$\vec{\boldsymbol{W}} \quad = \frac{1}{4\pi}\left[\nabla\times\int_{\mathcal{V}}\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right]$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，$\nabla\times$ 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，可交换次序

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{W}} &= \frac{1}{4\pi}\left[\nabla\times\int_{\mathcal{V}}\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathsf{d}\tau'\right] \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla\times\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathsf{d}\tau'\end{aligned}$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，$\nabla\times$ 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，可交换次序

$$\vec{\boldsymbol{W}} = \frac{1}{4\pi}\left[\nabla\times\int_{\mathcal{V}}\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathsf{d}\tau'\right]$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，$\nabla\times$ 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，可交换次序

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla\times\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathsf{d}\tau'$$

$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 与 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 无关，有 $\nabla\times(\vec{\boldsymbol{c}}f) = -\vec{\boldsymbol{c}}\times\nabla f$

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{W}} &= \frac{1}{4\pi}\left[\nabla\times\int_{\mathcal{V}}\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right] \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla\times\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\times\nabla\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\end{aligned}$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，$\nabla\times$ 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，可交换次序

$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 与 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 无关，有 $\nabla\times(\vec{\boldsymbol{c}}f) = -\vec{\boldsymbol{c}}\times\nabla f$

$$\vec{\boldsymbol{W}} = \frac{1}{4\pi}\left[\nabla\times\int_{\mathcal{V}}\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right]$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，$\nabla\times$ 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，可交换次序

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla\times\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 与 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 无关，有 $\nabla\times(\vec{\boldsymbol{c}}f) = -\vec{\boldsymbol{c}}\times\nabla f$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\times\nabla\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla'\dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|} = -\nabla\dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}$

$$\vec{\boldsymbol{W}} = \frac{1}{4\pi}\left[\nabla\times\int_{\mathcal{V}}\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\mathrm{d}\tau'\right]$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，$\nabla\times$ 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，可交换次序

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla\times\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\mathrm{d}\tau'$$

$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 与 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 无关，有 $\nabla\times(\vec{\boldsymbol{c}}f) = -\vec{\boldsymbol{c}}\times\nabla f$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\times\nabla\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla'\dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|} = -\nabla\dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\times\nabla'\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\mathrm{d}\tau'$$

$$\vec{\boldsymbol{W}} = \frac{1}{4\pi}\left[\nabla\times\int_{\mathcal{V}}\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right]$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，$\nabla\times$ 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，可交换次序

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla\times\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 与 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 无关，有 $\nabla\times(\vec{\boldsymbol{c}}f) = -\vec{\boldsymbol{c}}\times\nabla f$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\times\nabla\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla'\dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|} = -\nabla\dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\times\nabla'\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla'\times(\vec{\boldsymbol{a}}f) = f(\nabla'\times\vec{\boldsymbol{a}}) - \vec{\boldsymbol{a}}\times\nabla' f$

$$\vec{\boldsymbol{W}} = \frac{1}{4\pi}\left[\nabla\times\int_{\mathcal{V}}\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right]$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，$\nabla\times$ 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，可交换次序

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla\times\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 与 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 无关，有 $\nabla\times(\vec{\boldsymbol{c}}f) = -\vec{\boldsymbol{c}}\times\nabla f$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\times\nabla\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla'\dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|} = -\nabla\dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\times\nabla'\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla'\times(\vec{\boldsymbol{a}}f) = f(\nabla'\times\vec{\boldsymbol{a}}) - \vec{\boldsymbol{a}}\times\nabla' f$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla'\times\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' + \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\frac{\nabla'\times\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

$$\vec{\boldsymbol{W}} = \frac{1}{4\pi}\left[\nabla\times\int_{\mathcal{V}}\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right]$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，$\nabla\times$ 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，可交换次序

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla\times\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 与 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 无关，有 $\nabla\times(\vec{\boldsymbol{c}}f) = -\vec{\boldsymbol{c}}\times\nabla f$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\times\nabla\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla'\dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|} = -\nabla\dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\times\nabla'\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla'\times(\vec{\boldsymbol{a}}f) = f(\nabla'\times\vec{\boldsymbol{a}}) - \vec{\boldsymbol{a}}\times\nabla' f$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla'\times\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' + \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\frac{\nabla'\times\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

第一项利用旋度定理

$$\vec{\boldsymbol{W}} = \frac{1}{4\pi}\left[\nabla\times\int_{\mathcal{V}}\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right]$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，$\nabla\times$ 对 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 进行，可交换次序

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla\times\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 与 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 无关，有 $\nabla\times(\vec{\boldsymbol{c}}f) = -\vec{\boldsymbol{c}}\times\nabla f$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\times\nabla\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla'\dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|} = -\nabla\dfrac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\times\nabla'\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla'\times(\vec{\boldsymbol{a}}f) = f(\nabla'\times\vec{\boldsymbol{a}}) - \vec{\boldsymbol{a}}\times\nabla' f$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla'\times\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' + \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\frac{\nabla'\times\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

第一项利用旋度定理

$$\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{V}}\nabla\times\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\tau$$

$$\vec{W} = \frac{1}{4\pi}\left[\nabla\times\int_{\mathcal{V}}\frac{\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'\right]$$

积分对 $\vec{r}\,'$ 进行，$\nabla\times$ 对 $\vec{r}$ 进行，可交换次序

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla\times\frac{\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

$\vec{F}(\vec{r}\,')$ 与 $\vec{r}$ 无关，有 $\nabla\times(\vec{c}f) = -\vec{c}\times\nabla f$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{F}(\vec{r}\,')\times\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla'\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\nabla\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\vec{F}(\vec{r}\,')\times\nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla'\times(\vec{a}f) = f(\nabla'\times\vec{a}) - \vec{a}\times\nabla' f$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\nabla'\times\frac{\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' + \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\frac{\nabla'\times\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

第一项利用旋度定理

$$\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\times\vec{v}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{V}}\nabla\times\vec{v}\,\mathrm{d}\tau$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\oint_{\mathcal{S}}\frac{\vec{n}\times\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma' + \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\frac{\nabla'\times\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' = \vec{W}$$

利用 U 和 $\vec{W}$ 得 Helmholtz 定理：

利用 U 和 $\vec{\boldsymbol{W}}$ 得 Helmholtz 定理：

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla U + \nabla \times \vec{\boldsymbol{W}}$$

利用 U 和 $\vec{W}$ 得 Helmholtz 定理：

$$
\begin{aligned}
\vec{F}(\vec{r}) &= -\nabla U + \nabla \times \vec{W} \\
&= -\nabla \left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{n} \cdot \vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \mathrm{d}\sigma' \right] \\
&\qquad + \nabla \times \left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \times \vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{n} \times \vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \mathrm{d}\sigma' \right]
\end{aligned}
$$

利用 U 和 $\vec{\boldsymbol{W}}$ 得 Helmholtz 定理：

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= -\nabla U + \nabla\times\vec{\boldsymbol{W}} \\
&= -\nabla \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'\right]} \\
&\qquad + \nabla\times\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla'\times\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'\right]
\end{aligned}$$

利用 U 和 $\vec{W}$ 得 Helmholtz 定理：

$$\begin{aligned}
\vec{F}(\vec{r}) &= -\nabla U + \nabla \times \vec{W} \\
&= -\nabla \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{n} \cdot \vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'\right]}_{U} \\
&\quad + \nabla \times \left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \times \vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{n} \times \vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'\right]
\end{aligned}$$

利用 U 和 $\vec{W}$ 得 Helmholtz 定理：

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}) &= -\nabla U + \nabla\times\vec{W} \\ &= -\nabla\underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}}\frac{\nabla'\cdot\vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}}\frac{\vec{n}\cdot\vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'\right]}_{U} \\ &\quad + \nabla\times\underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}}\frac{\nabla'\times\vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}}\frac{\vec{n}\times\vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'\right]}\end{aligned}$$

利用 U 和 $\vec{W}$ 得 Helmholtz 定理：

$$
\begin{aligned}
\vec{F}(\vec{r}) &= -\nabla U + \nabla \times \vec{W} \\
&= -\nabla \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{n} \cdot \vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \mathrm{d}\sigma'\right]}_{U} \\
&\quad + \nabla \times \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \times \vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{n} \times \vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \mathrm{d}\sigma'\right]}_{\vec{W}}
\end{aligned}
$$

利用 U 和 $\vec{\boldsymbol{W}}$ 得 Helmholtz 定理：

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= -\nabla U + \nabla\times\vec{\boldsymbol{W}} \\ &= -\nabla\underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}}\frac{\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}}\frac{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'\right]}_{U} \\ &\quad + \nabla\times\underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}}\frac{\nabla'\times\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}}\frac{\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'\right]}_{\vec{\boldsymbol{W}}}\end{aligned}$$

故，由 Helmholtz 定理知：

利用 U 和 $\vec{W}$ 得 Helmholtz 定理：

$$
\begin{aligned}
\vec{F}(\vec{r}) &= -\nabla U + \nabla\times\vec{W} \\
&= -\nabla \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla'\cdot\vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{n}\cdot\vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'\right]}_{U} \\
&\quad + \nabla\times \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla'\times\vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{n}\times\vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'\right]}_{\vec{W}}
\end{aligned}
$$

故，由 Helmholtz 定理知：

1. 矢量场的散度、旋度加上边界条件，才能唯一确定矢量场

利用 U 和 $\vec{W}$ 得 Helmholtz 定理：

$$\begin{aligned}
\vec{F}(\vec{r}) &= -\nabla U + \nabla \times \vec{W} \\
&= -\nabla \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{n} \cdot \vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \mathrm{d}\sigma'\right]}_{U} \\
&\quad + \nabla \times \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \times \vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{n} \times \vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \mathrm{d}\sigma'\right]}_{\vec{W}}
\end{aligned}$$

故，由 Helmholtz 定理知：

1. 矢量场的散度、旋度加上边界条件，才能唯一确定矢量场
2. 由 $\nabla \times (\nabla U) = 0$ 和 $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{W}) = 0$ 知，任意的矢量场均能表为一个无旋场和一个无散场之和

二、Helmholtz 定理的一些结论

二、Helmholtz 定理的一些结论

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \cdot \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'\right]}_{U}$$

$$+ \nabla \times \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \times \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'\right]}_{\vec{\boldsymbol{W}}}$$

二、Helmholtz 定理的一些结论

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{n} \cdot \vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\sigma'\right]}_{U}$$

$$+ \nabla \times \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \times \vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{n} \times \vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\sigma'\right]}_{\vec{W}}$$

1. 任意的矢量场 $\vec{F}$ 均可表为一个标量函数 U 的梯度（无旋场）和一个矢量函数 $\vec{W}$ 的旋度（无散场）之和。其中标量函数 U 由 $\vec{F}$ 的散度及 $\vec{F}$ 在边界上的法向分量完全确定，矢量函数 $\vec{W}$ 则由 $\vec{F}$ 的旋度及 $\vec{F}$ 在边界上的切向分量完全确定；

二、Helmholtz 定理的一些结论

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \cdot \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} \mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} \mathrm{d}\sigma'\right]}_{U} + \nabla \times \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \times \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} \mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} \mathrm{d}\sigma'\right]}_{\vec{\boldsymbol{W}}}$$

1. 任意的矢量场 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 均可表为一个标量函数 U 的梯度（无旋场）和一个矢量函数 $\vec{\boldsymbol{W}}$ 的旋度（无散场）之和。其中标量函数 U 由 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 的散度及 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 在边界上的法向分量完全确定，矢量函数 $\vec{\boldsymbol{W}}$ 则由 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 的旋度及 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 在边界上的切向分量完全确定；

2. 矢量场 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 的散度和旋度可视为体源，其在边界上的值则可视为表面源，矢量场 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 由体源和表面源共同确定；

二、Helmholtz 定理的一些结论

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{n}\cdot\vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\sigma'\right]}_{U} + \nabla \times \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \times \vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{n}\times\vec{F}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\sigma'\right]}_{\vec{W}}$$

1. 任意的矢量场 $\vec{F}$ 均可表为一个标量函数 U 的梯度（无旋场）和一个矢量函数 $\vec{W}$ 的旋度（无散场）之和。其中标量函数 U 由 $\vec{F}$ 的散度及 $\vec{F}$ 在边界上的法向分量完全确定，矢量函数 $\vec{W}$ 则由 $\vec{F}$ 的旋度及 $\vec{F}$ 在边界上的切向分量完全确定；
2. 矢量场 $\vec{F}$ 的散度和旋度可视为体源，其在边界上的值则可视为表面源，矢量场 $\vec{F}$ 由体源和表面源共同确定；
3. 如果在某有限区域 $\mathcal{V}$ 内不存在体源，则该区域的矢量场 $\vec{F}$ 完全由 $\vec{F}$ 在边界上的值决定，因此在求解矢量场时可以用所谓“等效源法”，在求解区之外或边界上人为地引进等效源，只要等效源产生的场与矢量场 $\vec{F}$ 在边界上的值相等，则等效源在区域 $\mathcal{V}$ 内产生的场必为 $\vec{F}$。

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \cdot \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'\right]}_{U} + \nabla \times \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \times \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'\right]}_{\vec{\boldsymbol{W}}}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \cdot \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} \mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} \mathrm{d}\sigma'\right]}_{U}$$
$$+ \nabla \times \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \times \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} \mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} \mathrm{d}\sigma'\right]}_{\vec{\boldsymbol{W}}}$$

4. 对无界空间 $\mathcal{V}_\infty$，如果：

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \cdot \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'\right]}_{U}$$

$$+\nabla \times \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \times \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'\right]}_{\vec{\boldsymbol{W}}}$$

4. 对无界空间 $\mathcal{V}_\infty$，如果：

(a) 当 $r \to \infty$ 时，$D(\vec{\boldsymbol{r}})$ 和 $\vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 比 $\dfrac{1}{r^2}$ 更快趋向 0

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \cdot \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} \mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} \mathrm{d}\sigma'\right]}_{U} + \nabla \times \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \times \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} \mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} \mathrm{d}\sigma'\right]}_{\vec{\boldsymbol{W}}}$$

4. 对无界空间 $\mathcal{V}_\infty$，如果：

(a) 当 $r \to \infty$ 时，$D(\vec{\boldsymbol{r}})$ 和 $\vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 比 $\dfrac{1}{r^2}$ 更快趋向 0

$(\lim\limits_{r\to\infty} r^2 D(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0,\ \lim\limits_{r\to\infty} r^2 \vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0)$，

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \cdot \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} \mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} \mathrm{d}\sigma'\right]}_{U}$$
$$+ \nabla \times \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \times \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} \mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} \mathrm{d}\sigma'\right]}_{\vec{\boldsymbol{W}}}$$

4. 对无界空间 $\mathcal{V}_\infty$，如果：

(a) 当 $r \to \infty$ 时，$D(\vec{\boldsymbol{r}})$ 和 $\vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 比 $\dfrac{1}{r^2}$ 更快趋向 0

$(\lim\limits_{r\to\infty} r^2 D(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0,\ \lim\limits_{r\to\infty} r^2 \vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0)$，

此条件已保证面积分项为0

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= -\nabla \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \cdot \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'\right]}_{U} \\ &\quad + \nabla \times \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \times \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'\right]}_{\vec{\boldsymbol{W}}}\end{aligned}$$

4. 对无界空间 $\mathcal{V}_\infty$，如果：

(a) 当 $r \to \infty$ 时，$D(\vec{\boldsymbol{r}})$ 和 $\vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 比 $\dfrac{1}{r^2}$ 更快趋向 0

$(\lim\limits_{r\to\infty} r^2 D(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0,\ \lim\limits_{r\to\infty} r^2 \vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0)$，　　此条件已保证面积分项为0

(b) 当 $r \to \infty$ 时，$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 趋于 0

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \cdot \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'\right]}_{U}$$
$$+ \nabla \times \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \times \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'\right]}_{\vec{\boldsymbol{W}}}$$

4. 对无界空间 $\mathcal{V}_\infty$，如果：

(a) 当 $r \to \infty$ 时，$D(\vec{\boldsymbol{r}})$ 和 $\vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 比 $\dfrac{1}{r^2}$ 更快趋向 0

$\left(\lim\limits_{r\to\infty} r^2 D(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0,\ \lim\limits_{r\to\infty} r^2 \vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0\right)$，　　此条件已保证面积分项为0

(b) 当 $r \to \infty$ 时，$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 趋于 0 $\left(\lim\limits_{r\to\infty} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0\right)$,

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \cdot \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'\right]}_{U}$$
$$+ \nabla \times \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \times \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\sigma'\right]}_{\vec{\boldsymbol{W}}}$$

4. 对无界空间 $\mathcal{V}_\infty$，如果：

(a) 当 $r \to \infty$ 时，$D(\vec{\boldsymbol{r}})$ 和 $\vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 比 $\dfrac{1}{r^2}$ 更快趋向 0

$(\lim\limits_{r\to\infty} r^2 D(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0,\ \lim\limits_{r\to\infty} r^2 \vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0)$， 此条件已保证面积分项为0

(b) 当 $r \to \infty$ 时，$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 趋于 0 $(\lim\limits_{r\to\infty} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0)$, 此条件排除 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 差一常矢量

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \cdot \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} \mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} \mathrm{d}\sigma'\right]}_{U}$$
$$+ \nabla \times \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \times \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} \mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} \mathrm{d}\sigma'\right]}_{\vec{\boldsymbol{W}}}$$

4. 对无界空间 $\mathcal{V}_\infty$，如果：

(a) 当 $r \to \infty$ 时，$D(\vec{\boldsymbol{r}})$ 和 $\vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 比 $\dfrac{1}{r^2}$ 更快趋向 0

$(\lim\limits_{r\to\infty} r^2 D(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0,\ \lim\limits_{r\to\infty} r^2 \vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0)$， 此条件已保证面积分项为0

(b) 当 $r \to \infty$ 时，$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 趋于 0 $(\lim\limits_{r\to\infty} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0)$, 此条件排除 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 差一常矢量

则：$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 由下式唯一确定

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= -\nabla \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \cdot \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\mathrm{d}\sigma'\right]}_{U} \\ &+ \nabla \times \underbrace{\left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \times \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\mathrm{d}\tau' - \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\mathrm{d}\sigma'\right]}_{\vec{\boldsymbol{W}}}\end{aligned}$$

4. 对无界空间 $\mathcal{V}_\infty$，如果：

(a) 当 $r \to \infty$ 时，$D(\vec{\boldsymbol{r}})$ 和 $\vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 比 $\dfrac{1}{r^2}$ 更快趋向 0

$(\lim\limits_{r\to\infty} r^2 D(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0,\ \lim\limits_{r\to\infty} r^2 \vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0)$， 此条件已保证面积分项为0

(b) 当 $r \to \infty$ 时，$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 趋于 0 $(\lim\limits_{r\to\infty} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0)$, 此条件排除 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 差一常矢量

则：$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 由下式唯一确定

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla\left[\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}_\infty} \frac{D(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\mathrm{d}\tau'\right] + \nabla \times \left[\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}_\infty} \frac{\vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\mathrm{d}\tau'\right]$$

三、势函数存在定理

三、势函数存在定理

定理一：对无旋场 $\vec{F}_l$，下面说法等价

三、势函数存在定理

定理一：对无旋场 $\vec{\boldsymbol{F}}_l$，下面说法等价

1. 场的旋度处处为零，即：$\nabla \times \vec{\boldsymbol{F}}_l = 0$ everywhere

三、势函数存在定理

定理一： 对无旋场 $\vec{F}_l$，下面说法等价

1. 场的旋度处处为零，即：$\nabla \times \vec{F}_l = 0$ everywhere
2. $\displaystyle\int_{a\mathcal{P}}^{b} \vec{F}_l \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 的值与积分路径 $\mathcal{P}$ 无关

三、势函数存在定理

定理一： 对无旋场 $\vec{\boldsymbol{F}}_l$ ，下面说法等价

1. 场的旋度处处为零，即：$\nabla \times \vec{\boldsymbol{F}}_l = 0$ everywhere
2. $\displaystyle\int_{\boldsymbol{a}\mathcal{P}}^{\boldsymbol{b}} \vec{\boldsymbol{F}}_l \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$ 的值与积分路径 $\mathcal{P}$ 无关
3. 对任意闭合路径都有 $\displaystyle\oint \vec{\boldsymbol{F}}_l \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = 0$

三、势函数存在定理

定理一： 对无旋场 $\vec{\boldsymbol{F}}_l$，下面说法等价

1. 场的旋度处处为零，即：$\nabla\times\vec{\boldsymbol{F}}_l=0$ everywhere
2. $\displaystyle\int_{\boldsymbol{a}\mathcal{P}}^{\boldsymbol{b}}\vec{\boldsymbol{F}}_l\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$ 的值与积分路径 $\mathcal{P}$ 无关
3. 对任意闭合路径都有 $\displaystyle\oint\vec{\boldsymbol{F}}_l\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}=0$
4. $\vec{\boldsymbol{F}}_l$ 可表为某标量函数的梯度，$\vec{\boldsymbol{F}}_l=-\nabla V$，其中$V$ 称为标（量）势。

三、势函数存在定理

定理一： 对无旋场 $\vec{\boldsymbol{F}}_l$，下面说法等价

1. 场的旋度处处为零，即：$\nabla\times\vec{\boldsymbol{F}}_l=0$ everywhere
2. $\displaystyle\int_{\boldsymbol{a}\mathcal{P}}^{\boldsymbol{b}}\vec{\boldsymbol{F}}_l\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$ 的值与积分路径 $\mathcal{P}$ 无关
3. 对任意闭合路径都有 $\displaystyle\oint\vec{\boldsymbol{F}}_l\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}=0$
4. $\vec{\boldsymbol{F}}_l$ 可表为某标量函数的梯度，$\vec{\boldsymbol{F}}_l=-\nabla V$，其中$V$ 称为标（量）势。

标（量）势不是唯一的，可差一常数。

三、势函数存在定理

定理一：对无旋场 $\vec{\boldsymbol{F}}_l$，下面说法等价

1. 场的旋度处处为零，即：$\nabla \times \vec{\boldsymbol{F}}_l = 0$ everywhere
2. $\displaystyle\int_{\boldsymbol{a}\mathcal{P}}^{\boldsymbol{b}} \vec{\boldsymbol{F}}_l \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$ 的值与积分路径 $\mathcal{P}$ 无关
3. 对任意闭合路径都有 $\displaystyle\oint \vec{\boldsymbol{F}}_l \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = 0$
4. $\vec{\boldsymbol{F}}_l$ 可表为某标量函数的梯度，$\vec{\boldsymbol{F}}_l = -\nabla V$，其中$V$ 称为标（量）势。

标（量）势不是唯一的，可差一常数。

该定理也称为标量势存在定理。

定理二：对无散场 $\vec{\boldsymbol{F}}_e$，下面说法等价

定理二：对无散场 $\vec{\boldsymbol{F}}_e$ ，下面说法等价

1. 场的散度处处为零，即：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{F}}_e = 0$ everywhere

定理二： 对无散场 $\vec{\boldsymbol{F}}_e$ ，下面说法等价

1. 场的散度处处为零，即：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{F}}_e = 0$ everywhere
2. 给定积分表面 $\mathcal{S}$ 的边界线，面积分 $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}_e \, \mathrm{d}\sigma$ 的值与积分表面 $\mathcal{S}$ 无关

定理二：对无散场 $\vec{\boldsymbol{F}}_e$，下面说法等价

1. 场的散度处处为零，即：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{F}}_e = 0$ everywhere
2. 给定积分表面 $\mathcal{S}$ 的边界线，面积分 $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}_e \, \mathrm{d}\sigma$ 的值与积分表面 $\mathcal{S}$ 无关
3. 对任意闭合面都有 $\displaystyle\oint \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}_e \, \mathrm{d}\sigma = 0$

定理二：对无散场 $\vec{\boldsymbol{F}}_e$，下面说法等价

1. 场的散度处处为零，即：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}_e=0$ everywhere
2. 给定积分表面 $\mathcal{S}$ 的边界线，面积分 $\displaystyle\int_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}_e\,\mathrm{d}\sigma$ 的值与积分表面 $\mathcal{S}$ 无关
3. 对任意闭合面都有 $\displaystyle\oint\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}_e\,\mathrm{d}\sigma=0$
4. $\vec{\boldsymbol{F}}_e$ 可表为某矢量函数的旋度，$\vec{\boldsymbol{F}}_e=\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}$，其中$\vec{\boldsymbol{A}}$ 称为矢（量）势。

定理二： 对无散场 $\vec{\boldsymbol{F}}_e$ ，下面说法等价

1. 场的散度处处为零，即：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{F}}_e = 0$ everywhere
2. 给定积分表面 $\mathcal{S}$ 的边界线，面积分 $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}_e \, \mathrm{d}\sigma$ 的值与积分表面 $\mathcal{S}$ 无关
3. 对任意闭合面都有 $\displaystyle\oint \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}_e \, \mathrm{d}\sigma = 0$
4. $\vec{\boldsymbol{F}}_e$ 可表为某矢量函数的旋度，$\vec{\boldsymbol{F}}_e = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}$，其中 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 称为矢（量）势。

矢（量）势不是唯一的，可差一任意标量函数的梯度。

定理二： 对无散场 $\vec{\boldsymbol{F}}_e$ ，下面说法等价

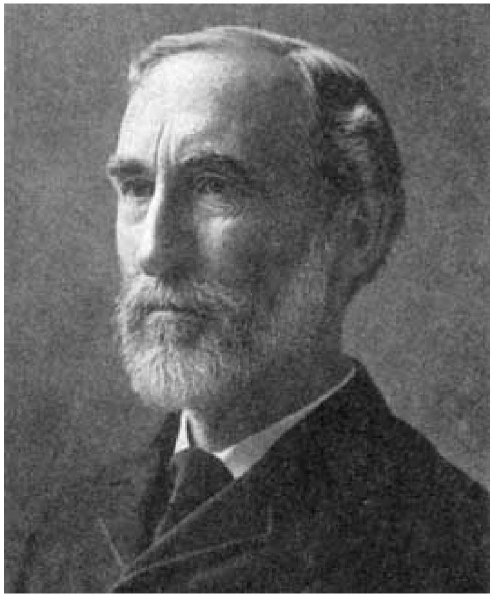
1. 场的散度处处为零，即：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}_e=0$ everywhere
2. 给定积分表面 $\mathcal{S}$ 的边界线，面积分 $\displaystyle\int_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}_e\,\mathrm{d}\sigma$ 的值与积分表面 $\mathcal{S}$ 无关
3. 对任意闭合面都有 $\displaystyle\oint\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}_e\,\mathrm{d}\sigma=0$
4. $\vec{\boldsymbol{F}}_e$ 可表为某矢量函数的旋度，$\vec{\boldsymbol{F}}_e=\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}$，其中 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 称为矢（量）势。

矢（量）势不是唯一的，可差一任意标量函数的梯度。

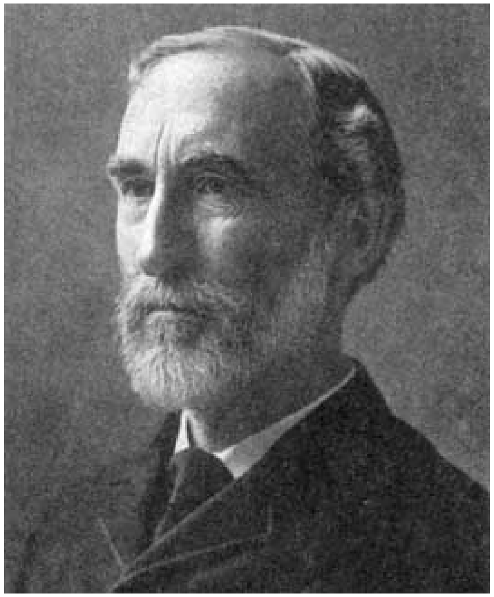
该定理也称为矢量势存在定理。

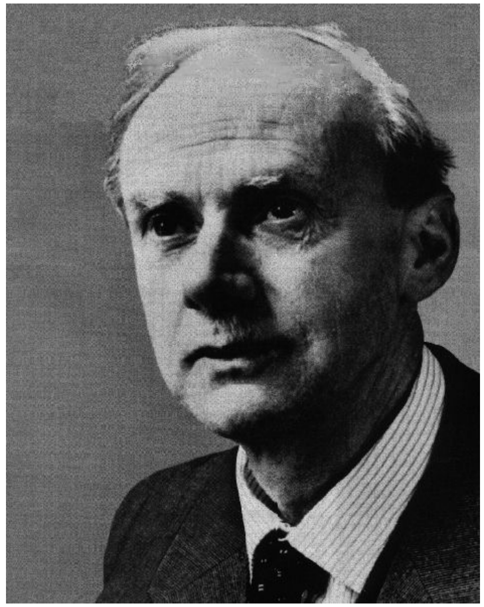
本章风流人物

本章风流人物

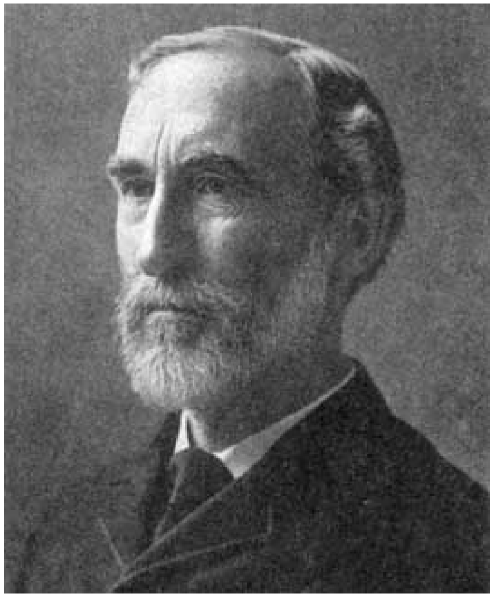


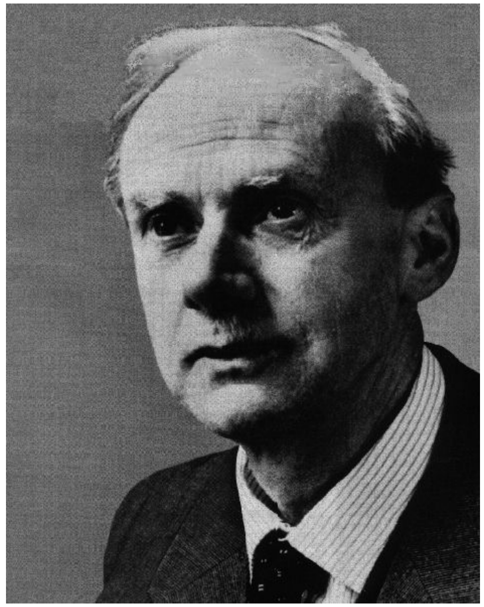
本章风流人物



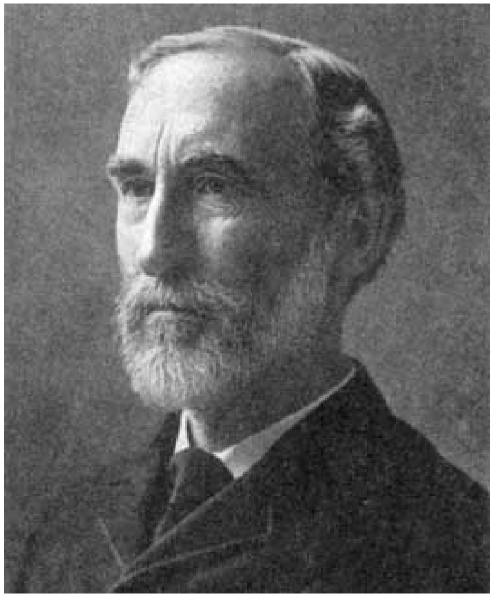
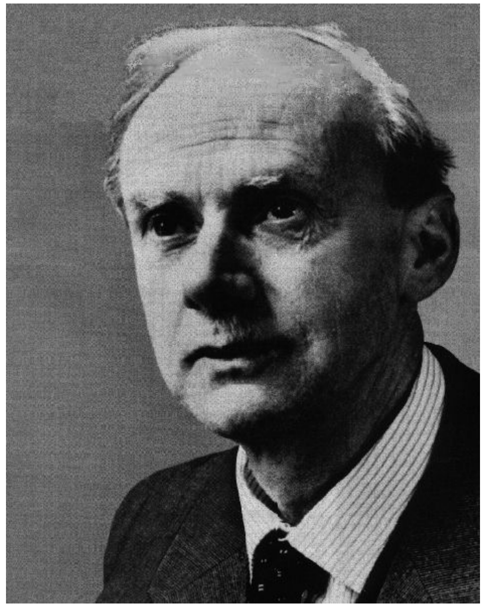


本章风流人物



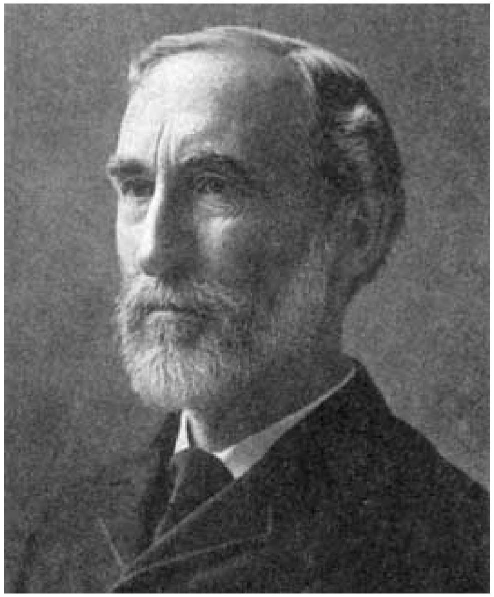


本章风流人物

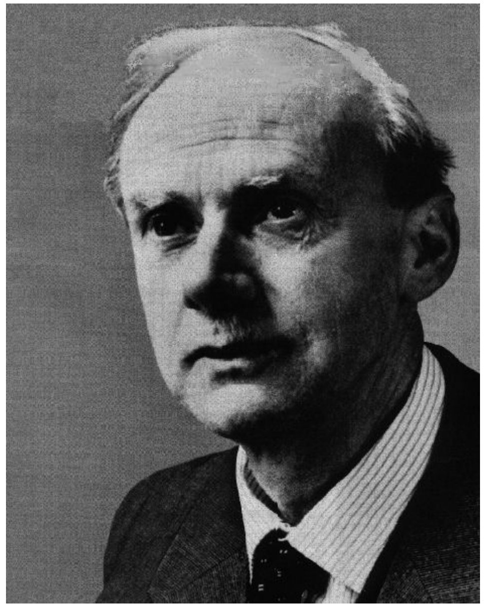




Gibbs

本章风流人物

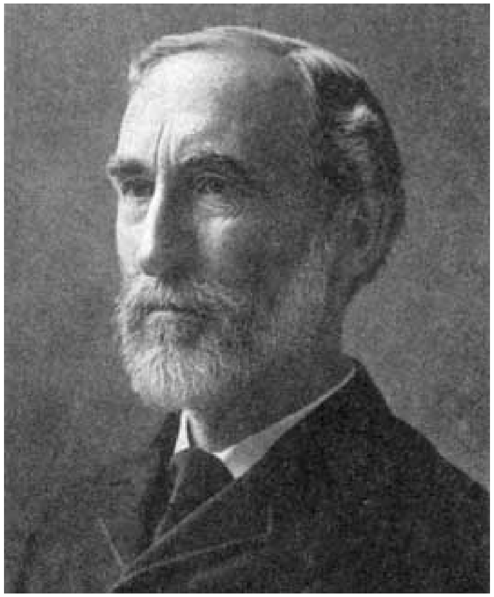


Gibbs

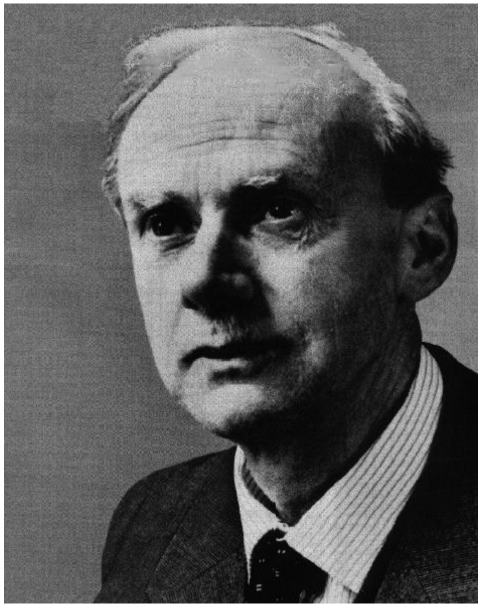


Dirac

本章风流人物



Gibbs



Dirac

Helmholtz