# § 2.2 安培定律　静磁场的散度和旋度

# § 2.2 安培定律　静磁场的散度和旋度

## 一、电流、电荷守恒定律

# § 2.2 安培定律　静磁场的散度和旋度

## 一、电流、电荷守恒定律

**电流：**　　　电荷的运动产生电流

# § 2.2 安培定律　静磁场的散度和旋度

## 一、电流、电荷守恒定律

电流：　　电荷的运动产生电流

电流强度：　单位时间通过导线横截面的电量

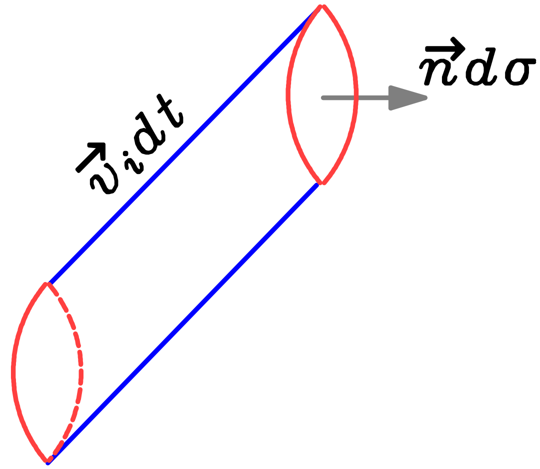
# § 2.2 安培定律　静磁场的散度和旋度

## 一、电流、电荷守恒定律

**电流：**　　电荷的运动产生电流

**电流强度：**　单位时间通过导线横截面的电量

$$\mathrm{d}\tau = \vec{v}_i \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t$$



# § 2.2 安培定律　静磁场的散度和旋度

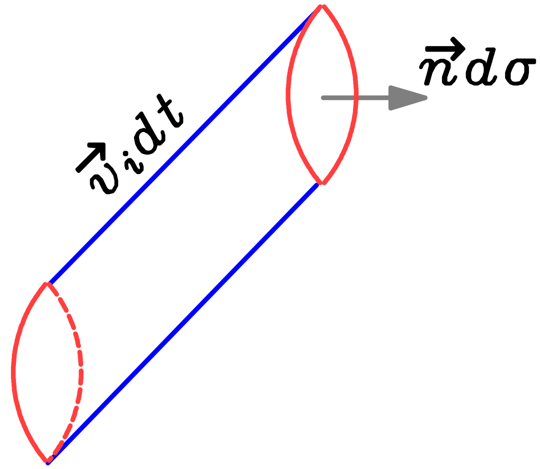
## 一、电流、电荷守恒定律

电流：　　电荷的运动产生电流

电流强度：　单位时间通过导线横截面的电量

$$\mathrm{d}\tau = \vec{\boldsymbol{v}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}t$$

导体中存在以各种运动速度的电荷。



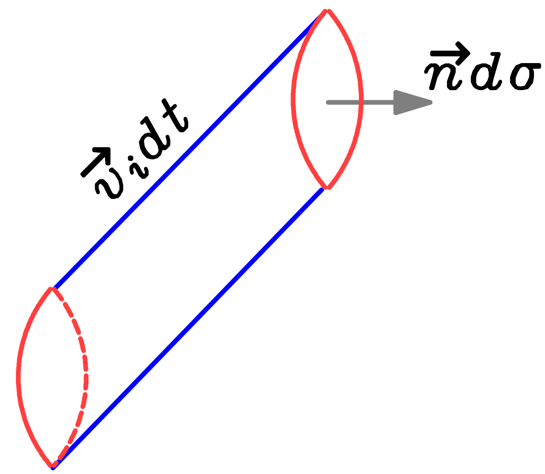
# § 2.2 安培定律　静磁场的散度和旋度

## 一、电流、电荷守恒定律

电流：　电荷的运动产生电流

电流强度：　单位时间通过导线横截面的电量

$$\mathrm{d}\tau = \vec{\boldsymbol{v}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t$$




导体中存在以各种运动速度的电荷。

考虑运动速度为 $\vec{v}_i$ 的电荷，设其电荷密度为 $\rho_i$

# § 2.2 安培定律　静磁场的散度和旋度

## 一、电流、电荷守恒定律

电流：　电荷的运动产生电流

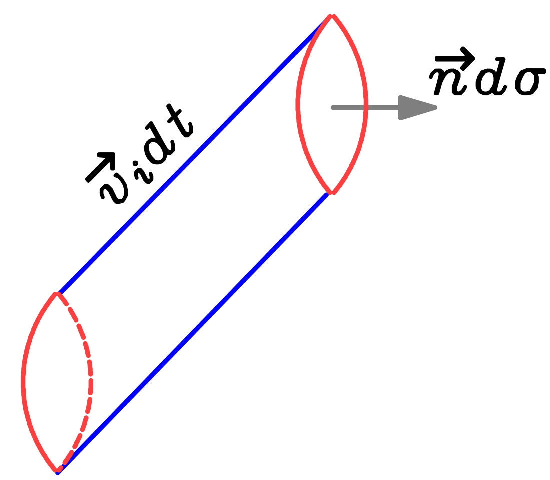
电流强度：　单位时间通过导线横截面的电量

$\mathrm{d}\tau = \vec{\boldsymbol{v}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t$

导体中存在以各种运动速度的电荷。

考虑运动速度为 $\vec{\boldsymbol{v}}_i$ 的电荷，设其电荷密度为 $\rho_i$

在 $\mathrm{d}t$ 时间内，位于右图所示小体积元 $\mathrm{d}\tau$ 内的电荷将穿过小面元 $\mathrm{d}\sigma$，而 $\mathrm{d}\tau = \vec{\boldsymbol{v}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t$，



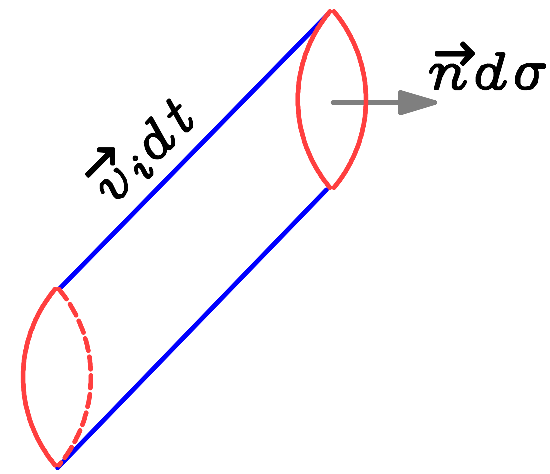
# § 2.2 安培定律　静磁场的散度和旋度

## 一、电流、电荷守恒定律

**电流：**　　电荷的运动产生电流

**电流强度：**　单位时间通过导线横截面的电量

$$\mathrm{d}\tau=\vec{\boldsymbol{v}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t$$




导体中存在以各种运动速度的电荷。

考虑运动速度为 $\vec{\boldsymbol{v}}_i$ 的电荷，设其电荷密度为 $\rho_i$

在 $\mathrm{d}t$ 时间内，位于右图所示小体积元 $\mathrm{d}\tau$ 内的电荷将穿过小面元 $\mathrm{d}\sigma$，而 $\mathrm{d}\tau=\vec{\boldsymbol{v}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t$，

故，在 $\mathrm{d}t$ 时间内穿过小面元 $\mathrm{d}\sigma$ 的电量为：

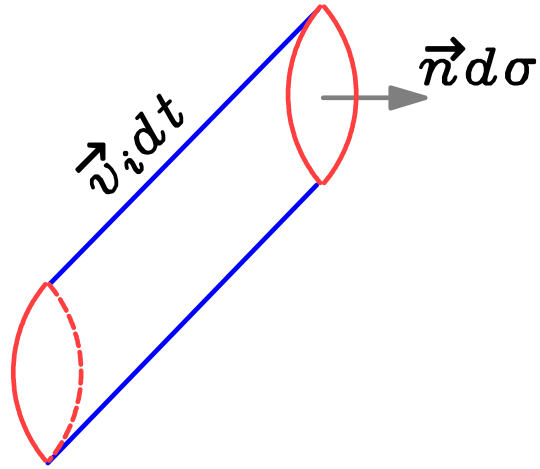
# §2.2 安培定律　静磁场的散度和旋度

## 一、电流、电荷守恒定律

电流：　电荷的运动产生电流

电流强度：　单位时间通过导线横截面的电量

$$\mathrm{d}\tau = \vec{\boldsymbol{v}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t$$




导体中存在以各种运动速度的电荷。

考虑运动速度为 $\vec{\boldsymbol{v}}_i$ 的电荷，设其电荷密度为 $\rho_i$

在 $\mathrm{d}t$ 时间内，位于右图所示小体积元 $\mathrm{d}\tau$ 内的电荷将穿过小面元 $\mathrm{d}\sigma$，而 $\mathrm{d}\tau = \vec{\boldsymbol{v}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t$，

故，在 $\mathrm{d}t$ 时间内穿过小面元 $\mathrm{d}\sigma$ 的电量为：

$$\mathrm{d}q_i = \rho_i\,\vec{\boldsymbol{v}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t$$

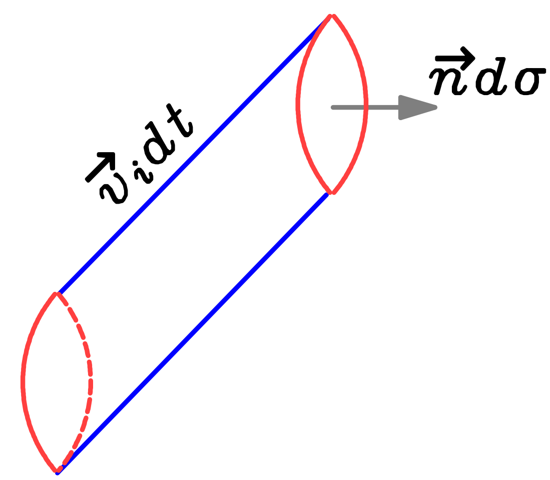
# § 2.2 安培定律　静磁场的散度和旋度

## 一、电流、电荷守恒定律

电流：　　电荷的运动产生电流

电流强度：单位时间通过导线横截面的电量

$\mathrm{d}\tau = \vec{\boldsymbol{v}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}t$




导体中存在以各种运动速度的电荷。

考虑运动速度为 $\vec{\boldsymbol{v}}_i$ 的电荷，设其电荷密度为 $\rho_i$

在 $\mathrm{d}t$ 时间内，位于右图所示小体积元 $\mathrm{d}\tau$ 内的电荷将穿过小面元 $\mathrm{d}\sigma$，而 $\mathrm{d}\tau = \vec{\boldsymbol{v}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}t$，

故，在 $\mathrm{d}t$ 时间内穿过小面元 $\mathrm{d}\sigma$ 的电量为：

$$\mathrm{d}q_i = \rho_i \vec{\boldsymbol{v}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}t$$

对各种速度求和：　$$\mathrm{d}q = \sum_i \mathrm{d}q_i = \sum_i \rho_i \vec{\boldsymbol{v}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}t$$

单位时间穿过该小面元的电量为：

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \sum_i \rho_i \vec{\boldsymbol{v}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}\sigma = \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma$$

单位时间穿过该小面元的电量为：

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \sum_i \rho_i \vec{\boldsymbol{v}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}\sigma = \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{\boldsymbol{j}} = \sum_i \rho_i \vec{\boldsymbol{v}}_i}$$

单位时间穿过该小面元的电量为：

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \sum_i \rho_i \vec{\boldsymbol{v}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}\sigma = \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{\boldsymbol{j}} = \sum_i \rho_i \vec{\boldsymbol{v}}_i}$$

(体)电流密度矢量

单位时间穿过该小面元的电量为：

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \sum_i \rho_i \vec{\boldsymbol{v}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}\sigma = \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{\boldsymbol{j}} = \sum_i \rho_i \vec{\boldsymbol{v}}_i}$$

(体)电流密度矢量

$\vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma$

单位时间穿过该小面元的电量为：

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \sum_i \rho_i \vec{\boldsymbol{v}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}\sigma = \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{\boldsymbol{j}} = \sum_i \rho_i \vec{\boldsymbol{v}}_i}$$

(体)电流密度矢量

$\vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma$ 单位时间从小面元 $\mathrm{d}\sigma$ 的负 $\vec{\boldsymbol{n}}$ 侧穿过小面元到面元正 $\vec{\boldsymbol{n}}$ 侧的电量；

单位时间穿过该小面元的电量为：

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \sum_i \rho_i \vec{\boldsymbol{v}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}\sigma = \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{\boldsymbol{j}} = \sum_i \rho_i \vec{\boldsymbol{v}}_i}$$

(体)电流密度矢量

$\vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma$ 单位时间从小面元 $\mathrm{d}\sigma$ 的负 $\vec{\boldsymbol{n}}$ 侧穿过小面元到面元正 $\vec{\boldsymbol{n}}$ 侧的电量；

$$\int_S \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma$$

单位时间穿过该小面元的电量为：

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \sum_i \rho_i \vec{\boldsymbol{v}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}\sigma = \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{\boldsymbol{j}} = \sum_i \rho_i \vec{\boldsymbol{v}}_i}$$

(体)电流密度矢量

$\vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma$ 单位时间从小面元 $\mathrm{d}\sigma$ 的负 $\vec{\boldsymbol{n}}$ 侧穿过小面元到面元正 $\vec{\boldsymbol{n}}$ 侧的电量；

$\int_S \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma$ 单位时间穿过面积 $S$ 的电量，也即流过截面积 $S$ 的电流强度

单位时间穿过该小面元的电量为：

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \sum_i \rho_i \vec{\boldsymbol{v}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\sigma = \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{\boldsymbol{j}} = \sum_i \rho_i \vec{\boldsymbol{v}}_i}$$

(体)电流密度矢量

$\vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma$　单位时间从小面元 $\mathrm{d}\sigma$ 的负 $\vec{\boldsymbol{n}}$ 侧穿过小面元到面元正 $\vec{\boldsymbol{n}}$ 侧的电量；

$\int_S \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma$　单位时间穿过面积 $S$ 的电量，也即流过截面积 $S$ 的电流强度

$\oint_S \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma$

单位时间穿过该小面元的电量为：

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \sum_i \rho_i \vec{\boldsymbol{v}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}\sigma = \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{\boldsymbol{j}} = \sum_i \rho_i \vec{\boldsymbol{v}}_i}$$

(体)电流密度矢量

$\vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma$ 单位时间从小面元 $\mathrm{d}\sigma$ 的负 $\vec{\boldsymbol{n}}$ 侧穿过小面元到面元正 $\vec{\boldsymbol{n}}$ 侧的电量；

$\int_S \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma$ 单位时间穿过面积 $S$ 的电量，也即流过截面积 $S$ 的电流强度

$\oint_S \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma$ 单位时间流出闭合曲面 $S$ 的电量。$\vec{\boldsymbol{n}}$ 取闭合曲面 $S$ 的外法线方向

单位时间穿过该小面元的电量为：

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\sum_i \rho_i\vec{\boldsymbol{v}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\sigma=\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\vec{\boldsymbol{j}}=\sum_i \rho_i\vec{\boldsymbol{v}}_i}$$

(体)电流密度矢量

$\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma$ 单位时间从小面元 $\mathrm{d}\sigma$ 的负 $\vec{\boldsymbol{n}}$ 侧穿过小面元到面元正 $\vec{\boldsymbol{n}}$ 侧的电量；

$\int_S\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma$ 单位时间穿过面积 $S$ 的电量，也即流过截面积 $S$ 的电流强度

$\oint_S\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma$ 单位时间流出闭合曲面 $S$ 的电量。$\vec{\boldsymbol{n}}$ 取闭合曲面 $S$ 的外法线方向

实验表明，电荷是守恒的

流出任意一个闭合曲面的电量　等于　该闭合曲面所包围区域内电量的减少

流出任意一个闭合曲面的电量　等于　该闭合曲面所包围区域内电量的减少

$$\oint_S \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}\sigma \quad = \quad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \rho \, \mathrm{d}\tau$$

流出任意一个闭合曲面的电量　等于　该闭合曲面所包围区域内电量的减少

$$\oint_S \vec{j}\cdot\vec{n}\mathrm{d}\sigma \quad = \quad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\,\mathrm{d}\tau$$

$\Downarrow$ 散度定理　　　　$\Downarrow$ 曲面不随 $t$ 变

流出任意一个闭合曲面的电量　等于　该闭合曲面所包围区域内电量的减少

$$\oint_S \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}\sigma \quad = \quad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\, \mathrm{d}\tau$$

$\Downarrow$ 散度定理　　　$\Downarrow$ 曲面不随 $t$ 变

$$\int_V \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{j}} \mathrm{d}\tau \quad = \quad -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}\tau$$

流出任意一个闭合曲面的电量　等于　该闭合曲面所包围区域内电量的减少

$$\oint_S \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}\sigma = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \, \mathrm{d}\tau$$

$\Downarrow$ 散度定理　　　$\Downarrow$ 曲面不随 $t$ 变

$$\int_V \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{j}} \mathrm{d}\tau = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}\tau$$

$V$是任意的，上式可化为微分形式

流出任意一个闭合曲面的电量　等于　该闭合曲面所包围区域内电量的减少

$$\oint_S \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}\sigma = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \rho\, \mathrm{d}\tau$$

$\Downarrow$ 散度定理　　　　$\Downarrow$ 曲面不随 $t$ 变

$$\int_V \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{j}} \mathrm{d}\tau = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}\tau$$

$V$是任意的，上式可化为微分形式

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

流出任意一个闭合曲面的电量　等于　该闭合曲面所包围区域内电量的减少

$$\oint_S \vec{j}\cdot\vec{n}\mathrm{d}\sigma = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\,\mathrm{d}\tau$$

$\Downarrow$ 散度定理　　　　$\Downarrow$ 曲面不随 $t$ 变

$$\int_V \nabla\cdot\vec{j}\mathrm{d}\tau = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}\tau$$

$V$是任意的，上式可化为微分形式

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0}$$

电荷守恒定律 (local charge conservation) 也称

连续性方程 (continuity equation)

流出任意一个闭合曲面的电量　等于　该闭合曲面所包围区域内电量的减少

$$\oint_S \vec{j}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\,\mathrm{d}\tau$$

$$\Downarrow \text{散度定理} \qquad\qquad \Downarrow \text{曲面不随 } t \text{ 变}$$

$$\int_V \nabla\cdot\vec{j}\,\mathrm{d}\tau = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau$$

$V$是任意的，上式可化为微分形式

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0}$$

电荷守恒定律 (local charge conservation) 也称
连续性方程 (continuity equation)

对于稳定电流

流出任意一个闭合曲面的电量　等于　该闭合曲面所包围区域内电量的减少

$$\oint_S \vec{j}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\,\mathrm{d}\tau$$

$$\Downarrow \text{散度定理} \qquad \Downarrow \text{曲面不随 } t \text{ 变}$$

$$\int_V \nabla\cdot\vec{j}\,\mathrm{d}\tau = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau$$

$V$是任意的，上式可化为微分形式

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0}$$

电荷守恒定律 (local charge conservation) 也称

连续性方程 (continuity equation)

对于稳定电流

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \quad\Longrightarrow\quad \nabla\cdot\vec{j}=0$$

流出任意一个闭合曲面的电量 等于 该闭合曲面所包围区域内电量的减少

$$\oint_S \vec{j}\cdot\vec{n}\mathrm{d}\sigma = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\,\mathrm{d}\tau$$

$\Downarrow$ 散度定理 $\qquad\qquad$ $\Downarrow$ 曲面不随 $t$ 变

$$\int_V \nabla\cdot\vec{j}\mathrm{d}\tau = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}\tau$$

$V$是任意的，上式可化为微分形式

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0}$$

电荷守恒定律 (local charge conservation) 也称

连续性方程 (continuity equation)

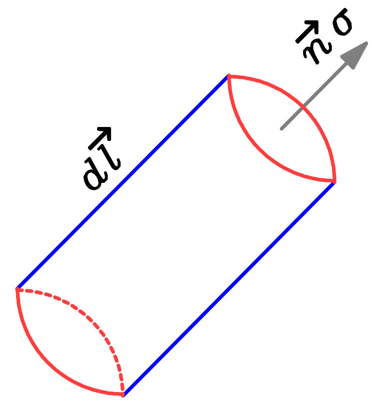
对于稳定电流

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \quad\Longrightarrow\quad \nabla\cdot\vec{j}=0$$

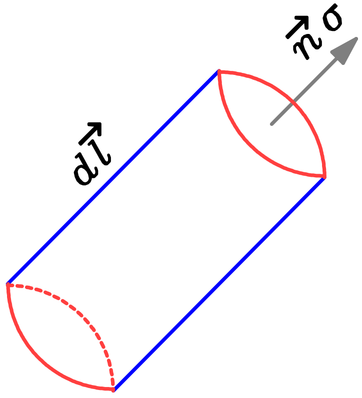
稳定电流线一定是闭合线，不会（在有限远处）中断

线电流： 如果电流在一根细导线流动

**线电流：** 如果电流在一根细导线流动



**线电流：** 如果电流在一根细导线流动

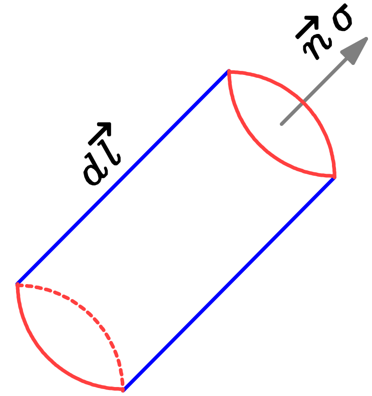



$$\vec{j}\,\mathrm{d}\tau = j\,\vec{n}\,\sigma\,\mathrm{d}l = \Big[\lim_{\substack{\sigma\to 0\\ j\to\infty}} j\,\sigma\Big]\vec{n}\,\mathrm{d}l = I\,\mathrm{d}\vec{l}$$

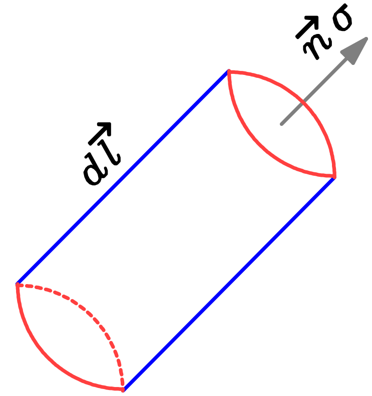
**线电流：** 如果电流在一根细导线流动

$$\vec{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\tau = j\,\vec{\boldsymbol{n}}\,\sigma\,\mathrm{d}l = \Big[\lim_{\substack{\sigma\to 0\\ j\to\infty}} j\,\sigma\Big]\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}l = I\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$$

因此对线电流： $\boxed{\vec{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\tau \quad \Longrightarrow \quad I\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \vec{\boldsymbol{I}}\,\mathrm{d}l}$



**线电流：** 如果电流在一根细导线流动



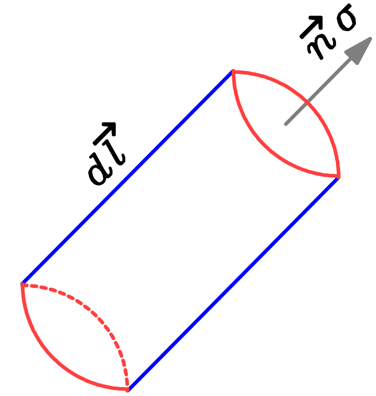

$$\vec{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\tau = j\,\vec{\boldsymbol{n}}\,\sigma\,\mathrm{d}l = \Big[\lim_{\substack{\sigma\to 0\\ j\to\infty}} j\,\sigma\Big]\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}l = I\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$$

因此对线电流：$\boxed{\vec{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\tau \quad\Longrightarrow\quad I\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \vec{\boldsymbol{I}}\,\mathrm{d}l}$

**面电流：** 如果电流在表面很薄一层流动

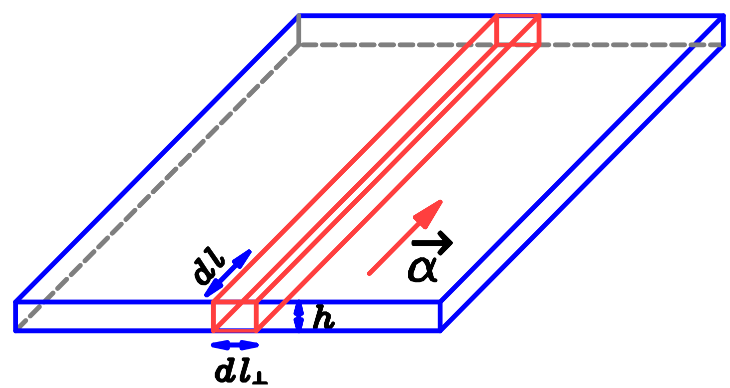
**线电流：** 如果电流在一根细导线流动

$$\vec{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\tau = j\,\vec{\boldsymbol{n}}\,\sigma\,\mathrm{d}l = \left[\lim_{\substack{\sigma\to 0\\ j\to\infty}} j\,\sigma\right]\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}l = I\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$$




因此对线电流：$\boxed{\vec{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\tau \quad\Longrightarrow\quad I\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \vec{\boldsymbol{I}}\,\mathrm{d}l}$

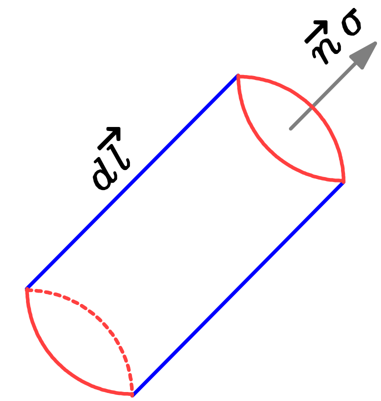
**面电流：** 如果电流在表面很薄一层流动



**线电流：** 如果电流在一根细导线流动

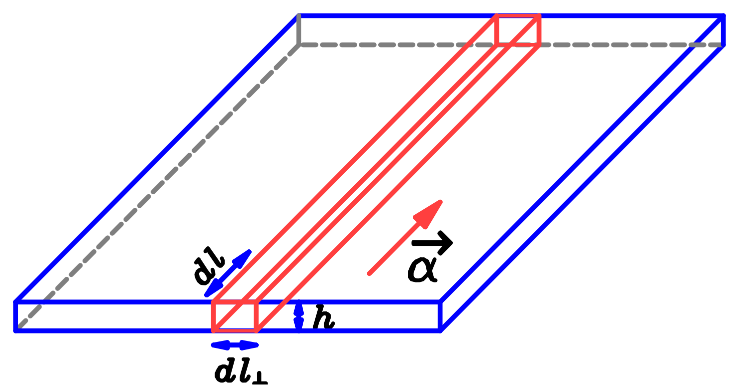
$$\vec{j}\,\mathrm{d}\tau = j\,\vec{n}\,\sigma\,\mathrm{d}l = \left[\lim_{\substack{\sigma\to 0\\ j\to\infty}} j\,\sigma\right]\vec{n}\,\mathrm{d}l = I\,\mathrm{d}\vec{l}$$

因此对线电流： $\boxed{\vec{j}\,\mathrm{d}\tau \quad\Longrightarrow\quad I\,\mathrm{d}\vec{l} = \vec{I}\,\mathrm{d}l}$




**面电流：** 如果电流在表面很薄一层流动

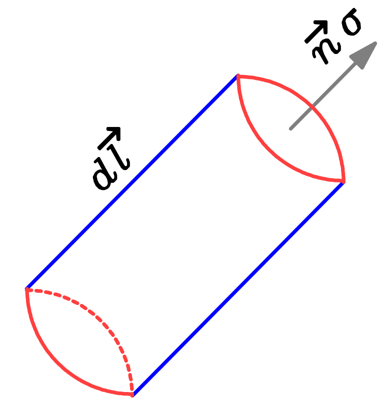
$$\vec{j}\,\mathrm{d}\tau = \vec{j}\,\mathrm{d}l_\perp h\,\mathrm{d}l = \left[\lim_{\substack{h\to 0\\ j\to\infty}} \vec{j}\,h\right]\mathrm{d}l\,\mathrm{d}l_\perp = \vec{\alpha}\,\mathrm{d}\sigma$$



**线电流：** 如果电流在一根细导线流动

$$\vec{j}\,\mathrm{d}\tau = j\,\vec{n}\,\sigma\,\mathrm{d}l = \Big[\lim_{\substack{\sigma\to 0\\ j\to\infty}} j\,\sigma\Big]\vec{n}\,\mathrm{d}l = I\,\mathrm{d}\vec{l}$$

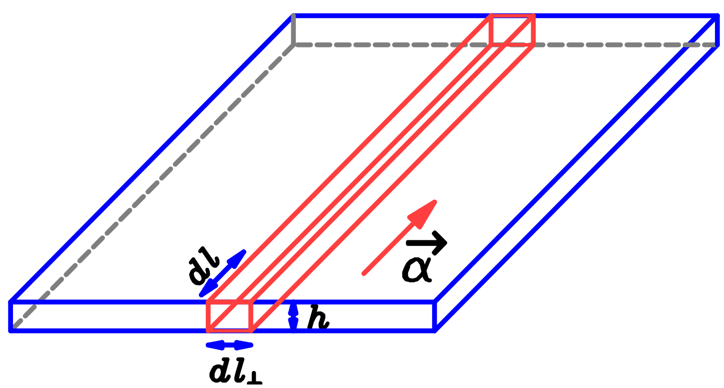
因此对线电流： $\boxed{\vec{j}\,\mathrm{d}\tau \quad\Longrightarrow\quad I\,\mathrm{d}\vec{l} = \vec{I}\,\mathrm{d}l}$




**面电流：** 如果电流在表面很薄一层流动

$$\vec{j}\,\mathrm{d}\tau = \vec{j}\,\mathrm{d}l_\perp h\,\mathrm{d}l = \Big[\lim_{\substack{h\to 0\\ j\to\infty}} \vec{j}\,h\Big]\mathrm{d}l\,\mathrm{d}l_\perp = \vec{\alpha}\,\mathrm{d}\sigma$$

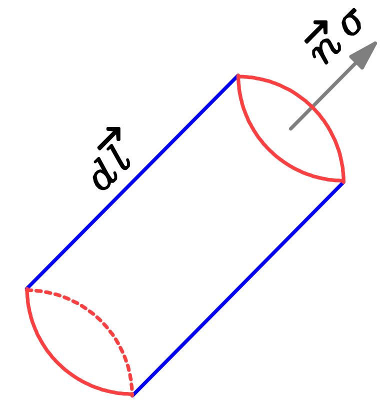
因此对面电流： $\boxed{\vec{j}\,\mathrm{d}\tau \quad\Longrightarrow\quad \vec{\alpha}\,\mathrm{d}\sigma}$



**线电流：** 如果电流在一根细导线流动

$$\vec{j}\,\mathrm{d}\tau = j\,\vec{n}\,\sigma\,\mathrm{d}l = \Big[\lim_{\substack{\sigma\to 0\\ j\to\infty}} j\,\sigma\Big]\vec{n}\,\mathrm{d}l = I\,\mathrm{d}\vec{l}$$

因此对线电流： $\boxed{\vec{j}\,\mathrm{d}\tau \quad\Longrightarrow\quad I\,\mathrm{d}\vec{l} = \vec{I}\,\mathrm{d}l}$

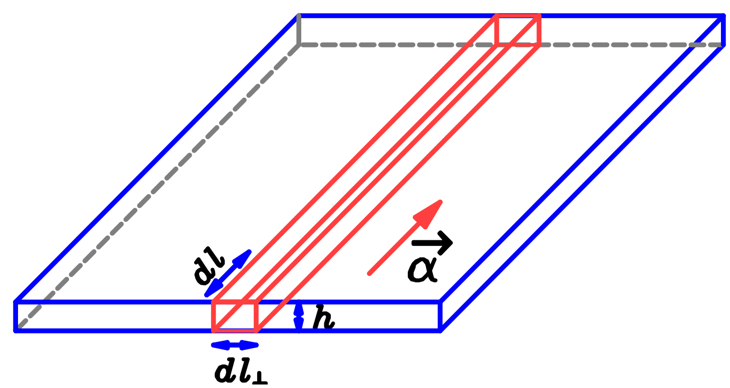



**面电流：** 如果电流在表面很薄一层流动

$$\vec{j}\,\mathrm{d}\tau = \vec{j}\,\mathrm{d}l_\perp h\,\mathrm{d}l = \Big[\lim_{\substack{h\to 0\\ j\to\infty}} \vec{j}\,h\Big]\mathrm{d}l\,\mathrm{d}l_\perp = \vec{\alpha}\,\mathrm{d}\sigma$$

因此对面电流： $\boxed{\vec{j}\,\mathrm{d}\tau \quad\Longrightarrow\quad \vec{\alpha}\,\mathrm{d}\sigma}$

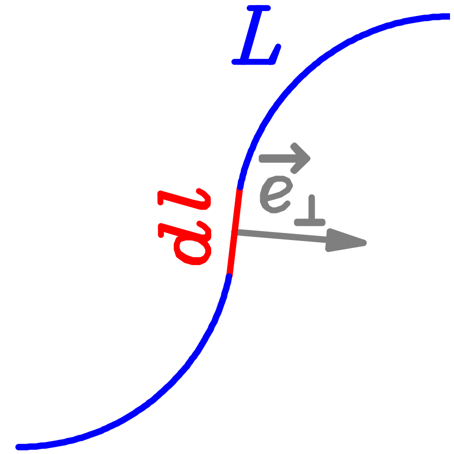
$$\vec{\alpha} = \lim_{\substack{h\to 0\\ j\to\infty}} \vec{j}\,h$$ 称为面电流密度矢量



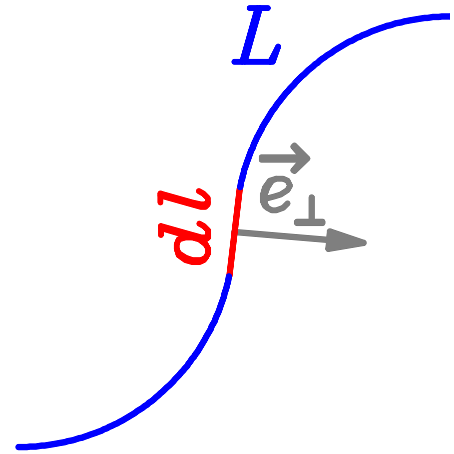
类似于体电流密度矢量，
若已知电流在某曲面上流动，面电流密度矢量为 $\vec{\alpha}$，则：

类似于体电流密度矢量，
若已知电流在某曲面上流动，面电流密度矢量为 $\vec{\alpha}$，则：

$\vec{\alpha}\cdot\hat{e}_{\perp}\mathrm{d}\,l$



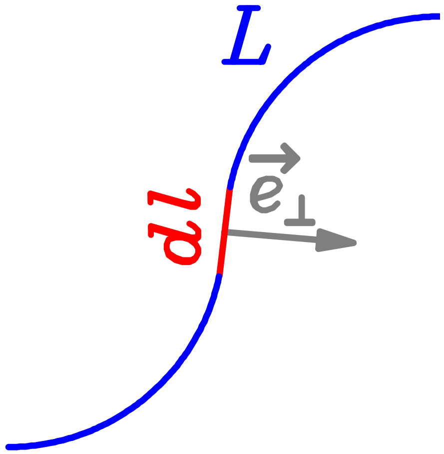
类似于体电流密度矢量，
若已知电流在某曲面上流动，面电流密度矢量为 $\vec{\alpha}$，则：




$\vec{\alpha}\cdot\hat{e}_{\perp}\mathrm{d}\,l$　　单位时间穿过小线段元的电量

（$\mathrm{d}\,l$ 为曲面上的一段小线段元）

类似于体电流密度矢量，
若已知电流在某曲面上流动，面电流密度矢量为 $\vec{\alpha}$，则：

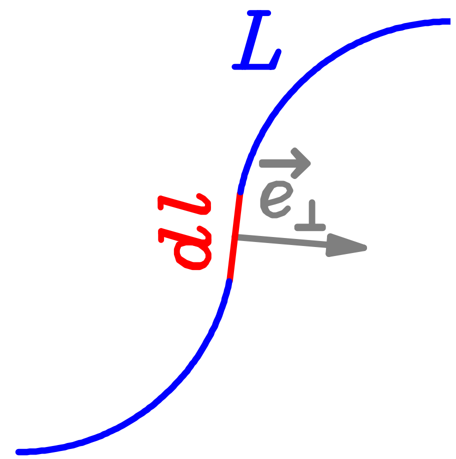



$\vec{\alpha} \cdot \hat{e}_\perp \mathrm{d}\, l$　　单位时间穿过小线段元的电量

（$\mathrm{d}\, l$ 为曲面上的一段小线段元）

$\int_L \vec{\alpha} \cdot \hat{e}_\perp \mathrm{d}\, l$

类似于体电流密度矢量，
若已知电流在某曲面上流动，面电流密度矢量为 $\vec{\alpha}$，则：



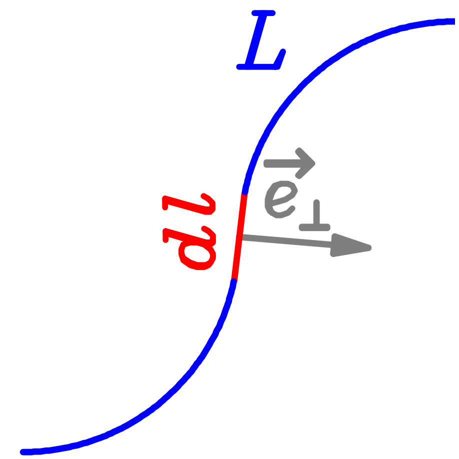

$\vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp \mathrm{d}\, l$　　单位时间穿过小线段元的电量

（$\mathrm{d}\, l$ 为曲面上的一段小线段元）

$\int_L \vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp \mathrm{d}\, l$　　单位时间穿过曲线 $L$ 的电量

（$L$ 为曲面上的一条曲线）

类似于体电流密度矢量，
若已知电流在某曲面上流动，面电流密度矢量为 $\vec{\alpha}$，则：




$\vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp \mathrm{d}\,l$ 单位时间穿过小线段元的电量

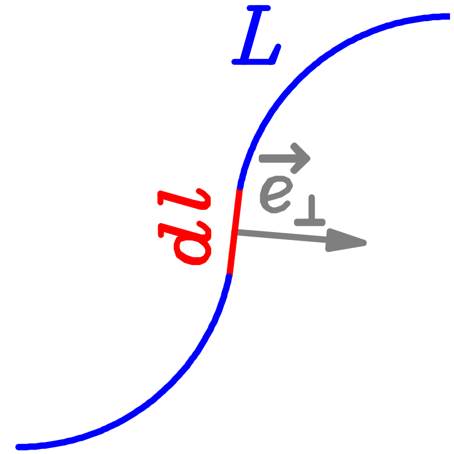
（$\mathrm{d}\,l$ 为曲面上的一段小线段元）

$\int_L \vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp \mathrm{d}\,l$ 单位时间穿过曲线 $L$ 的电量

（$L$ 为曲面上的一条曲线）

$\oint_{\mathcal{L}} \vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp d\,l$

类似于体电流密度矢量，
若已知电流在某曲面上流动，面电流密度矢量为 $\vec{\alpha}$，则：




$\vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp \mathrm{d}\,l$　　单位时间穿过小线段元的电量

（$\mathrm{d}\,l$ 为曲面上的一段小线段元）

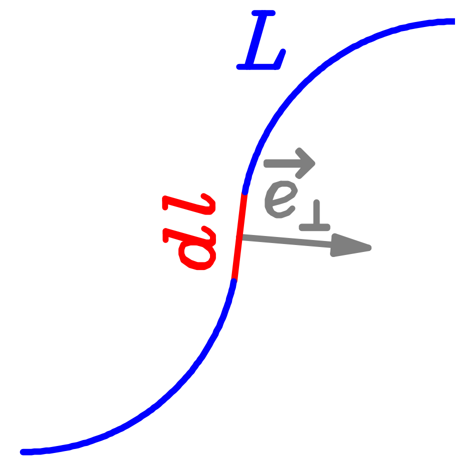
$\int_L \vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp \mathrm{d}\,l$　　单位时间穿过曲线 $L$ 的电量

（$L$ 为曲面上的一条曲线）

$\oint_{\mathcal{L}} \vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp d\,l$　　单位时间流出闭合曲线 $\mathcal{L}$ 的电量

（$\mathcal{L}$ 为曲面上的一条闭合曲线，$\hat{e}_\perp$ 取闭合曲线 $\mathcal{L}$ 的“外法线”方向）

类似于体电流密度矢量，
若已知电流在某曲面上流动，面电流密度矢量为 $\vec{\alpha}$，则：




$\vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp \mathrm{d}\,l$　　单位时间穿过小线段元的电量

（$\mathrm{d}\,l$ 为曲面上的一段小线段元）

$\int_L \vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp \mathrm{d}\,l$　　单位时间穿过曲线 $L$ 的电量

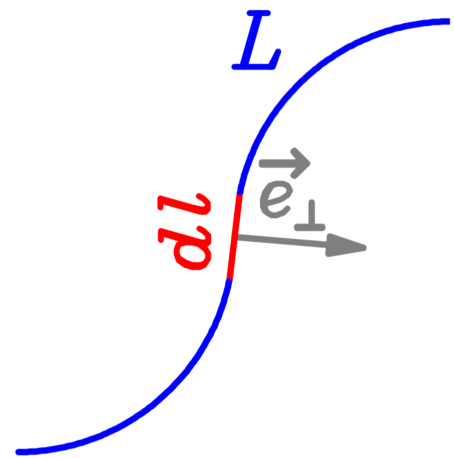
（$L$ 为曲面上的一条曲线）

$\oint_{\mathcal{L}} \vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp d\,l$　　单位时间流出闭合曲线 $\mathcal{L}$ 的电量

（$\mathcal{L}$ 为曲面上的一条闭合曲线，$\hat{e}_\perp$ 取闭合曲线 $\mathcal{L}$ 的“外法线”方向）

若有一段单位长度的 $x$ 向线段，落在面电流所在的曲面上，那么单位时间穿过该线段的电量为：

类似于体电流密度矢量，
若已知电流在某曲面上流动，面电流密度矢量为 $\vec{\alpha}$，则：




$\vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp \mathrm{d}\,l$ 单位时间穿过小线段元的电量

（$\mathrm{d}\,l$ 为曲面上的一段小线段元）

$\int_L \vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp \mathrm{d}\,l$ 单位时间穿过曲线 $L$ 的电量

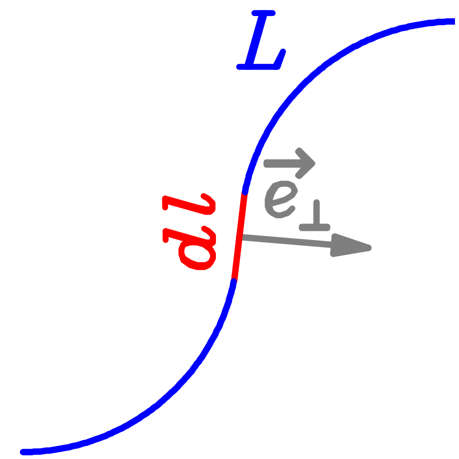
（$L$ 为曲面上的一条曲线）

$\oint_{\mathcal{L}} \vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp d\,l$ 单位时间流出闭合曲线 $\mathcal{L}$ 的电量

（$\mathcal{L}$ 为曲面上的一条闭合曲线，$\hat{e}_\perp$ 取闭合曲线 $\mathcal{L}$ 的“外法线”方向）

若有一段单位长度的 $x$ 向线段，落在面电流所在的曲面上，那么单位时间穿过该线段的电量为：　$\vec{\alpha}\cdot\hat{e}_y=\alpha_y$　?　　$\vec{\alpha}\cdot\hat{e}_x=\alpha_x$　?

类似于体电流密度矢量，
若已知电流在某曲面上流动，面电流密度矢量为 $\vec{\alpha}$，则：




$\vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp \mathrm{d}\,l$　　单位时间穿过小线段元的电量

（$\mathrm{d}\,l$ 为曲面上的一段小线段元）

$\int_L \vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp \mathrm{d}\,l$　　单位时间穿过曲线 $L$ 的电量

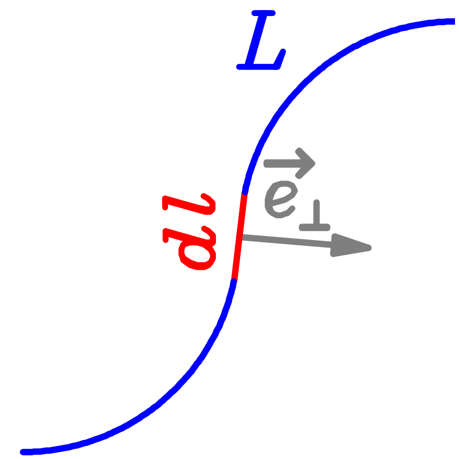
（$L$ 为曲面上的一条曲线）

$\oint_{\mathcal{L}} \vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp d\,l$　　单位时间流出闭合曲线 $\mathcal{L}$ 的电量

（$\mathcal{L}$ 为曲面上的一条闭合曲线，$\hat{e}_\perp$ 取闭合曲线 $\mathcal{L}$ 的“外法线”方向）

若有一段单位长度的 $x$ 向线段，落在面电流所在的曲面上，那么单位时间穿过该线段的电量为：　$\vec{\alpha}\cdot\hat{e}_y = \alpha_y$

类似于体电流密度矢量，
若已知电流在某曲面上流动，面电流密度矢量为 $\vec{\alpha}$，则：




$\vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp \mathrm{d}\,l$ 单位时间穿过小线段元的电量

（$\mathrm{d}\,l$ 为曲面上的一段小线段元）

$\int_L \vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp \mathrm{d}\,l$ 单位时间穿过曲线 $L$ 的电量

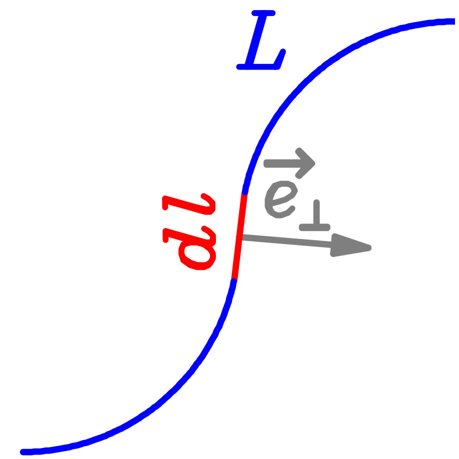
（$L$ 为曲面上的一条曲线）

$\oint_{\mathcal{L}} \vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp d\,l$ 单位时间流出闭合曲线 $\mathcal{L}$ 的电量

（$\mathcal{L}$ 为曲面上的一条闭合曲线，$\hat{e}_\perp$ 取闭合曲线 $\mathcal{L}$ 的“外法线”方向）

若有一段单位长度的 $x$ 向线段，落在面电流所在的曲面上，那么单位时间穿过该线段的电量为： $\vec{\alpha}\cdot\hat{e}_y = \alpha_y$ 类似地，

类似于体电流密度矢量，
若已知电流在某曲面上流动，面电流密度矢量为 $\vec{\alpha}$，则：




$\vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp \mathrm{d}\,l$ 单位时间穿过小线段元的电量

（$\mathrm{d}\,l$ 为曲面上的一段小线段元）

$\int_L \vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp \mathrm{d}\,l$ 单位时间穿过曲线 $L$ 的电量

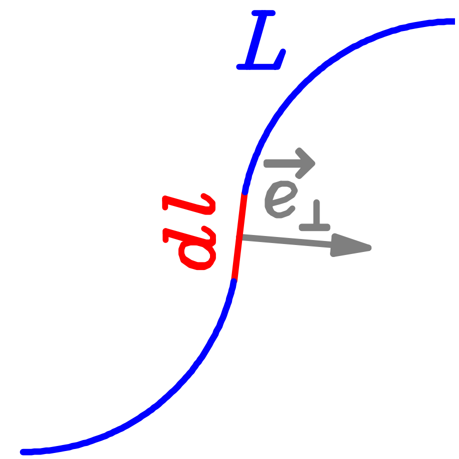
（$L$ 为曲面上的一条曲线）

$\oint_{\mathcal{L}} \vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp d\,l$ 单位时间流出闭合曲线 $\mathcal{L}$ 的电量

（$\mathcal{L}$ 为曲面上的一条闭合曲线，$\hat{e}_\perp$ 取闭合曲线 $\mathcal{L}$ 的“外法线”方向）

若有一段单位长度的 $x$ 向线段，落在面电流所在的曲面上，那么单位时间穿过该线段的电量为：$\vec{\alpha}\cdot\hat{e}_y = \alpha_y$ 类似地，
$\alpha_x$ 为单位时间穿过 $y$ 向单位长度线段的电量（当然该线段须在面电流所在的曲面上）

类似于体电流密度矢量，
若已知电流在某曲面上流动，面电流密度矢量为 $\vec{\alpha}$，则：




$\vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp \mathrm{d}\,l$ 单位时间穿过小线段元的电量

（$\mathrm{d}\,l$ 为曲面上的一段小线段元）

$\int_L \vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp \mathrm{d}\,l$ 单位时间穿过曲线 $L$ 的电量

（$L$ 为曲面上的一条曲线）

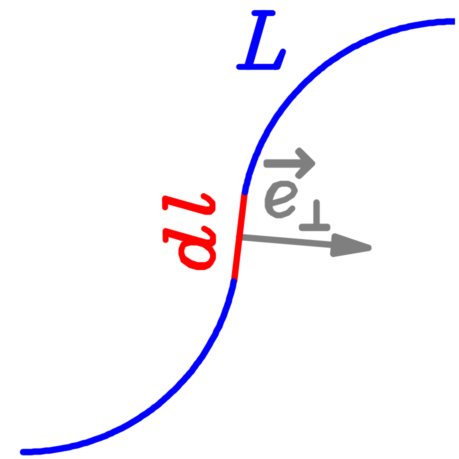
$\oint_{\mathcal{L}} \vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp d\,l$ 单位时间流出闭合曲线 $\mathcal{L}$ 的电量

（$\mathcal{L}$ 为曲面上的一条闭合曲线，$\hat{e}_\perp$ 取闭合曲线 $\mathcal{L}$ 的“外法线”方向）

若有一段单位长度的 $x$ 向线段，落在面电流所在的曲面上，那么单位时间穿过该线段的电量为：$\vec{\alpha}\cdot\hat{e}_y=\alpha_y$ 类似地，
$\alpha_x$ 为单位时间穿过 $y$ 向单位长度线段的电量（当然该线段须在面电流所在的曲面上）

变换关系

类似于体电流密度矢量，
若已知电流在某曲面上流动，面电流密度矢量为 $\vec{\alpha}$，则：




$\vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp \mathrm{d}\,l$ 单位时间穿过小线段元的电量

（$\mathrm{d}\,l$ 为曲面上的一段小线段元）

$\int_L \vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp \mathrm{d}\,l$ 单位时间穿过曲线 $L$ 的电量

（$L$ 为曲面上的一条曲线）

$\oint_{\mathcal{L}} \vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp d\,l$ 单位时间流出闭合曲线 $\mathcal{L}$ 的电量

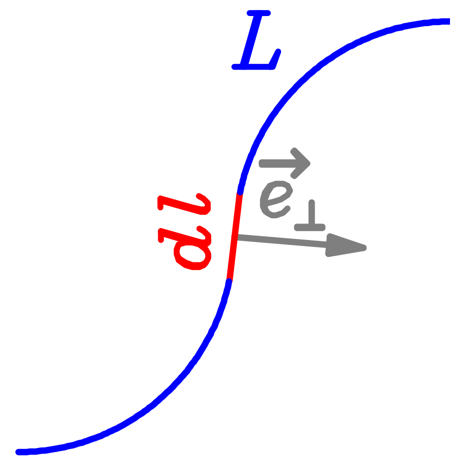
（$\mathcal{L}$ 为曲面上的一条闭合曲线，$\hat{e}_\perp$ 取闭合曲线 $\mathcal{L}$ 的“外法线”方向）

若有一段单位长度的 $x$ 向线段，落在面电流所在的曲面上，那么单位时间穿过该线段的电量为： $\vec{\alpha}\cdot\hat{e}_y = \alpha_y$ 类似地，
$\alpha_x$ 为单位时间穿过 $y$ 向单位长度线段的电量（当然该线段须在面电流所在的曲面上）

变换关系

电流： $q\,\vec{v} \sim \vec{I}\,\mathrm{d}l \sim \vec{\alpha}\,\mathrm{d}\sigma \sim \vec{j}\,\mathrm{d}\tau$

类似于体电流密度矢量，
若已知电流在某曲面上流动，面电流密度矢量为 $\vec{\alpha}$，则：




$\vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp \mathrm{d}\, l$ 单位时间穿过小线段元的电量

（$\mathrm{d}\, l$ 为曲面上的一段小线段元）

$\int_L \vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp \mathrm{d}\, l$ 单位时间穿过曲线 $L$ 的电量

（$L$ 为曲面上的一条曲线）

$\oint_{\mathcal{L}} \vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp d\, l$ 单位时间流出闭合曲线 $\mathcal{L}$ 的电量

（$\mathcal{L}$ 为曲面上的一条闭合曲线，$\hat{e}_\perp$ 取闭合曲线 $\mathcal{L}$ 的“外法线”方向）

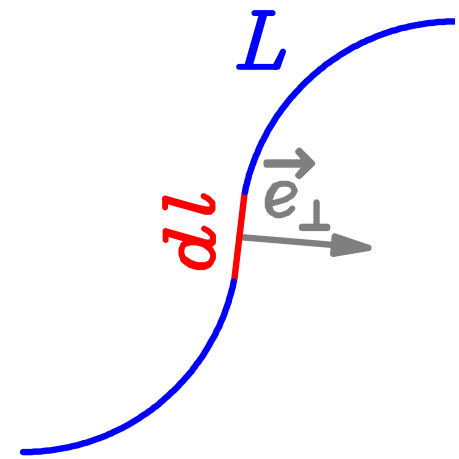
若有一段单位长度的 $x$ 向线段，落在面电流所在的曲面上，那么单位时间穿过该线段的电量为： $\vec{\alpha}\cdot\hat{e}_y = \alpha_y$ 类似地，
$\alpha_x$ 为单位时间穿过 $y$ 向单位长度线段的电量（当然该线段须在面电流所在的曲面上）

变换关系

$$\text{电流：}\quad q\,\vec{v} \sim \vec{I}\,\mathrm{d}l \sim \vec{\alpha}\,\mathrm{d}\sigma \sim \vec{j}\,\mathrm{d}\tau$$

$$\text{电荷：}\quad q \sim \lambda\,\mathrm{d}l \sim \sigma_q\,\mathrm{d}\sigma \sim \rho\,\mathrm{d}\tau$$

类似于体电流密度矢量，
若已知电流在某曲面上流动，面电流密度矢量为 $\vec{\alpha}$，则：




$\vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp \mathrm{d}\,l$　单位时间穿过小线段元的电量
（$\mathrm{d}\,l$ 为曲面上的一段小线段元）

$\int_L \vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp \mathrm{d}\,l$　单位时间穿过曲线 $L$ 的电量
（$L$ 为曲面上的一条曲线）

$\oint_{\mathcal{L}} \vec{\alpha}\cdot\hat{e}_\perp d\,l$　单位时间流出闭合曲线 $\mathcal{L}$ 的电量
（$\mathcal{L}$ 为曲面上的一条闭合曲线，$\hat{e}_\perp$ 取闭合曲线 $\mathcal{L}$ 的“外法线”方向）

若有一段单位长度的 $x$ 向线段，落在面电流所在的曲面上，那么单位时间穿过该线段的电量为：　$\vec{\alpha}\cdot\hat{e}_y=\alpha_y$　类似地，
$\alpha_x$ 为单位时间穿过 $y$ 向单位长度线段的电量（当然该线段须在面电流所在的曲面上）

变换关系

$$\left.\begin{array}{lccccccc}
\text{电流：} & q\,\vec{v} & \sim & \vec{I}\,\mathrm{d}l & \sim & \vec{\alpha}\,\mathrm{d}\sigma & \sim & \vec{j}\,\mathrm{d}\tau \\
\text{电荷：} & q & \sim & \lambda\,\mathrm{d}l & \sim & \sigma_q\,\mathrm{d}\sigma & \sim & \rho\,\mathrm{d}\tau
\end{array}\right\}
\qquad
\left\{\begin{array}{l}
\vec{I}=\lambda\,\vec{v}, \\
\vec{\alpha}=\sigma_q\,\vec{v}, \\
\vec{j}=\rho\,\vec{v}
\end{array}\right.$$

## 二、安培定律

## 二、安培定律

描述真空中两稳定电流元之间的相互作用力：

## 二、安培定律

描述真空中两稳定电流元之间的相互作用力：

$$d\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\boldsymbol{j}}_1 \, \mathrm{d}\tau_1 \times (\vec{\boldsymbol{j}}_2 \, \mathrm{d}\tau_2 \times \vec{\boldsymbol{R}}_{12})}{R_{12}^3} \tag{1}$$

## 二、安培定律

描述真空中两稳定电流元之间的相互作用力：

$$d\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1 \times (\vec{\boldsymbol{j}}_2\,\mathrm{d}\tau_2 \times \vec{\boldsymbol{R}}_{12})}{R_{12}^3} \tag{1}$$

其中 $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{12}$ 表示电流元 $\vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1$ 受到电流元 $\vec{\boldsymbol{j}}_2\,\mathrm{d}\tau_2$ 的作用力，

$$\vec{\boldsymbol{R}}_{12} = \vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_2, \quad \mu_0 = 1.26\times 10^{-6}\,H/m$$

## 二、安培定律

描述真空中两稳定电流元之间的相互作用力：

$$d\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\boldsymbol{j}}_1 \, \mathrm{d}\tau_1 \times (\vec{\boldsymbol{j}}_2 \, \mathrm{d}\tau_2 \times \vec{\boldsymbol{R}}_{12})}{R_{12}^3} \tag{1}$$

其中 $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{12}$ 表示电流元 $\vec{\boldsymbol{j}}_1 \, \mathrm{d}\tau_1$ **受到**电流元 $\vec{\boldsymbol{j}}_2 \, \mathrm{d}\tau_2$ 的作用力，

$$\vec{\boldsymbol{R}}_{12} = \vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_2, \quad \mu_0 = 1.26 \times 10^{-6} \, H/m$$

### 几点说明：

## 二、安培定律

描述真空中两稳定电流元之间的相互作用力：

$$d\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1 \times (\vec{\boldsymbol{j}}_2\,\mathrm{d}\tau_2 \times \vec{\boldsymbol{R}}_{12})}{R_{12}^3} \tag{1}$$

其中 $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{12}$ 表示电流元 $\vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1$ 受到电流元 $\vec{\boldsymbol{j}}_2\,\mathrm{d}\tau_2$ 的作用力，

$$\vec{\boldsymbol{R}}_{12} = \vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_2, \quad \mu_0 = 1.26 \times 10^{-6}\,H/m$$

### 几点说明：

1. 平方反比，但不具向心性质；

## 二、安培定律

描述真空中两稳定电流元之间的相互作用力：

$$d\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\boldsymbol{j}}_1 \, \mathrm{d}\tau_1 \times (\vec{\boldsymbol{j}}_2 \, \mathrm{d}\tau_2 \times \vec{\boldsymbol{R}}_{12})}{R_{12}^3} \tag{1}$$

其中 $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{12}$ 表示电流元 $\vec{\boldsymbol{j}}_1 \, \mathrm{d}\tau_1$ 受到电流元 $\vec{\boldsymbol{j}}_2 \, \mathrm{d}\tau_2$ 的作用力，

$$\vec{\boldsymbol{R}}_{12} = \vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_2, \quad \mu_0 = 1.26 \times 10^{-6} \, H/m$$

### 几点说明：

1. 平方反比，但不具向心性质；
2. 相互作用通过场传递，而不是超距作用；

## 二、安培定律

描述真空中两稳定电流元之间的相互作用力：

$$d\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\boldsymbol{j}}_1 \, \mathrm{d}\tau_1 \times (\vec{\boldsymbol{j}}_2 \, \mathrm{d}\tau_2 \times \vec{\boldsymbol{R}}_{12})}{R_{12}^3} \tag{1}$$

其中 $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{12}$ 表示电流元 $\vec{\boldsymbol{j}}_1 \, \mathrm{d}\tau_1$ 受到电流元 $\vec{\boldsymbol{j}}_2 \, \mathrm{d}\tau_2$ 的作用力，

$$\vec{\boldsymbol{R}}_{12} = \vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_2, \quad \mu_0 = 1.26 \times 10^{-6} \, H/m$$

### 几点说明：

1. 平方反比，但不具向心性质；
2. 相互作用通过场传递，而不是超距作用；
3. 满足叠加原理；

4. 由场传递和叠加原理，定义静磁场的磁感应强度 (magnetic induction)：

$$d\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1 \times (\vec{\boldsymbol{j}}_2\,\mathrm{d}\tau_2 \times \vec{\boldsymbol{R}}_{12})}{R_{12}^3}$$

4. 由场传递和叠加原理，定义静磁场的磁感应强度 (magnetic induction)：

$$d\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1 \times (\vec{\boldsymbol{j}}_2\,\mathrm{d}\tau_2 \times \vec{\boldsymbol{R}}_{12})}{R_{12}^3} \quad\Longrightarrow$$

4. 由场传递和叠加原理，定义静磁场的磁感应强度 (magnetic induction)：

$$d\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1 \times (\vec{\boldsymbol{j}}_2\,\mathrm{d}\tau_2 \times \vec{\boldsymbol{R}}_{12})}{R_{12}^3} \quad\Longrightarrow\quad d\vec{\boldsymbol{F}}_1 = \vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1 \times \vec{\boldsymbol{B}}$$

4. 由场传递和叠加原理，定义静磁场的磁感应强度 (magnetic induction)：

$$d\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\boldsymbol{j}}_1 \, \mathsf{d}\tau_1 \times (\vec{\boldsymbol{j}}_2 \, \mathsf{d}\tau_2 \times \vec{\boldsymbol{R}}_{12})}{R_{12}^3} \quad \Longrightarrow \quad d\vec{\boldsymbol{F}}_1 = \vec{\boldsymbol{j}}_1 \, \mathsf{d}\tau_1 \times \vec{\boldsymbol{B}}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times [\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,']}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3} \, \mathsf{d}\tau'$$

4. 由场传递和叠加原理，定义静磁场的磁感应强度 (magnetic induction)：

$$d\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1 \times (\vec{\boldsymbol{j}}_2\,\mathrm{d}\tau_2 \times \vec{\boldsymbol{R}}_{12})}{R_{12}^3} \quad\Longrightarrow\quad d\vec{\boldsymbol{F}}_1 = \vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1 \times \vec{\boldsymbol{B}}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times [\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,']}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

$d\vec{\boldsymbol{F}}_1$ 表示电流元 $\vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1$ 受到的力；

4. 由场传递和叠加原理，定义静磁场的磁感应强度 (magnetic induction)：

$$d\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1 \times (\vec{\boldsymbol{j}}_2\,\mathrm{d}\tau_2 \times \vec{\boldsymbol{R}}_{12})}{R_{12}^3} \quad\Longrightarrow\quad d\vec{\boldsymbol{F}}_1 = \vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1 \times \vec{\boldsymbol{B}}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times [\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,']}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

$d\vec{\boldsymbol{F}}_1$ 表示电流元 $\vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1$ 受到的力；

5. 线电流：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,d\tau' \quad\Longrightarrow\quad I\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\,'$

4. 由场传递和叠加原理，定义静磁场的磁感应强度 (magnetic induction)：

$$d\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1 \times (\vec{\boldsymbol{j}}_2\,\mathrm{d}\tau_2 \times \vec{\boldsymbol{R}}_{12})}{R_{12}^3} \quad\Longrightarrow\quad d\vec{\boldsymbol{F}}_1 = \vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1 \times \vec{\boldsymbol{B}}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times [\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,']}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

$d\vec{\boldsymbol{F}}_1$ 表示电流元 $\vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1$ 受到的力；

5. 线电流： $\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,d\tau' \quad\Longrightarrow\quad I\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\,'$

Biot-Savart 定律

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\mathrm{d}\tau' \times \frac{\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int I\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\,' \times \frac{\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}}$$

4. 由场传递和叠加原理，定义静磁场的磁感应强度 (magnetic induction)：

$$d\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1 \times (\vec{\boldsymbol{j}}_2\,\mathrm{d}\tau_2 \times \vec{\boldsymbol{R}}_{12})}{R_{12}^3} \quad\Longrightarrow\quad d\vec{\boldsymbol{F}}_1 = \vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1 \times \vec{\boldsymbol{B}}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}') \times [\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}']}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

$d\vec{\boldsymbol{F}}_1$ 表示电流元 $\vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1$ 受到的力；

5. 线电流： $\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\,d\tau' \quad\Longrightarrow\quad I\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}'$

Biot-Savart 定律

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\mathrm{d}\tau' \times \frac{\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|^3} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int I\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}' \times \frac{\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|^3}}$$

6. 面电流： $\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\,\mathrm{d}\tau' \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{\alpha}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\,\mathrm{d}\sigma'$

4. 由场传递和叠加原理，定义静磁场的磁感应强度 (magnetic induction)：

$$d\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\boldsymbol{j}}_1 \, \mathrm{d}\tau_1 \times (\vec{\boldsymbol{j}}_2 \, \mathrm{d}\tau_2 \times \vec{\boldsymbol{R}}_{12})}{R_{12}^3} \implies d\vec{\boldsymbol{F}}_1 = \vec{\boldsymbol{j}}_1 \, \mathrm{d}\tau_1 \times \vec{\boldsymbol{B}}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times [\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,']}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3} \, \mathrm{d}\tau'$$

$d\vec{\boldsymbol{F}}_1$ 表示电流元 $\vec{\boldsymbol{j}}_1 \, \mathrm{d}\tau_1$ 受到的力；

5. 线电流： $\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \, d\tau' \implies I \, \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\,'$

Biot-Savart 定律

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \mathrm{d}\tau' \times \frac{\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3} \Rightarrow \boxed{\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int I \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\,' \times \frac{\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}}$$

6. 面电流： $\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \, \mathrm{d}\tau' \implies \vec{\boldsymbol{\alpha}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \, \mathrm{d}\sigma'$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \mathrm{d}\tau' \times \frac{\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3} \Rightarrow \boxed{\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\boldsymbol{\alpha}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times [\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,']}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3} \, \mathrm{d}\sigma'}$$

7. $$d\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\boldsymbol{j}}_1 \, \mathrm{d}\tau_1 \times (\vec{\boldsymbol{j}}_2 \, \mathrm{d}\tau_2 \times \vec{\boldsymbol{R}}_{12})}{R_{12}^3}$$

7. $$d\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathsf{d}\tau_1 \times (\vec{\boldsymbol{j}}_2\,\mathsf{d}\tau_2 \times \vec{\boldsymbol{R}}_{12})}{R_{12}^3}$$ 而 $$d\vec{\boldsymbol{F}}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\boldsymbol{j}}_2\,\mathsf{d}\tau_2 \times (\vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathsf{d}\tau_1 \times \vec{\boldsymbol{R}}_{21})}{R_{21}^3}$$

7. $$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}_1\,\mathrm{d}\tau_1 \times (\vec{j}_2\,\mathrm{d}\tau_2 \times \vec{R}_{12})}{R_{12}^3} \quad 而 \quad d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}_2\,\mathrm{d}\tau_2 \times (\vec{j}_1\,\mathrm{d}\tau_1 \times \vec{R}_{21})}{R_{21}^3}$$

易找到反例：$\mathrm{d}\vec{F}_{12} \neq -\mathrm{d}\vec{F}_{21}$。例如：$\vec{j}_1 \| \hat{e}_x$，$\vec{j}_2 \| \hat{e}_z$，$\vec{R}_{21} \| \hat{e}_z$

稳定电流线总是闭合的（$\nabla \cdot \vec{j} = 0$），不存在孤立的稳定电流元，

$\mathrm{d}\vec{F}_{12} \neq -\mathrm{d}\vec{F}_{21}$ 并非违背牛顿第三定律。

引进“电流元”概念只是为形式上与库仑定律类比；

7. $$d\vec{\boldsymbol{F}}_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1\times(\vec{\boldsymbol{j}}_2\,\mathrm{d}\tau_2\times\vec{\boldsymbol{R}}_{12})}{R_{12}^3}\quad\text{而}\quad d\vec{\boldsymbol{F}}_{21}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\boldsymbol{j}}_2\,\mathrm{d}\tau_2\times(\vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1\times\vec{\boldsymbol{R}}_{21})}{R_{21}^3}$$

易找到反例：$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{12}\neq-\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$。例如：$\vec{\boldsymbol{j}}_1\|\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$， $\vec{\boldsymbol{j}}_2\|\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$， $\vec{\boldsymbol{R}}_{21}\|\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

稳定电流线总是闭合的（$\nabla\cdot\vec{j}=0$），不存在孤立的稳定电流元，
$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{12}\neq-\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$ 并非违背牛顿第三定律。
引进“电流元”概念只是为形式上与库仑定律类比；

8. 两闭合电流回路的相互作用力满足牛顿第三定律：

7. $$d\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1 \times (\vec{\boldsymbol{j}}_2\,\mathrm{d}\tau_2 \times \vec{\boldsymbol{R}}_{12})}{R_{12}^3} \quad 而 \quad d\vec{\boldsymbol{F}}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\boldsymbol{j}}_2\,\mathrm{d}\tau_2 \times (\vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1 \times \vec{\boldsymbol{R}}_{21})}{R_{21}^3}$$

易找到反例：$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{12} \neq -\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$。例如：$\vec{\boldsymbol{j}}_1 \parallel \hat{\boldsymbol{e}}_x$，$\vec{\boldsymbol{j}}_2 \parallel \hat{\boldsymbol{e}}_z$，$\vec{\boldsymbol{R}}_{21} \parallel \hat{\boldsymbol{e}}_z$

稳定电流线总是闭合的（$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}} = 0$），不存在孤立的稳定电流元，

$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{12} \neq -\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$ 并非违背牛顿第三定律。

引进“电流元”概念只是为形式上与库仑定律类比；

8. 两闭合电流回路的相互作用力满足牛顿第三定律：

闭合电流回路 $l_1$ 受到闭合电流回路 $l_2$ 的作用力 $\vec{\boldsymbol{F}}_{12}$ 为

7. $$d\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1 \times (\vec{\boldsymbol{j}}_2\,\mathrm{d}\tau_2 \times \vec{\boldsymbol{R}}_{12})}{R_{12}^3} \quad 而 \quad d\vec{\boldsymbol{F}}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\boldsymbol{j}}_2\,\mathrm{d}\tau_2 \times (\vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1 \times \vec{\boldsymbol{R}}_{21})}{R_{21}^3}$$

易找到反例：$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{12} \neq -\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$。例如：$\vec{\boldsymbol{j}}_1 \| \hat{\boldsymbol{e}}_x$， $\vec{\boldsymbol{j}}_2 \| \hat{\boldsymbol{e}}_z$， $\vec{\boldsymbol{R}}_{21} \| \hat{\boldsymbol{e}}_z$

稳定电流线总是闭合的（$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}} = 0$），不存在孤立的稳定电流元，

$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{12} \neq -\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$ 并非违背牛顿第三定律。

引进“电流元”概念只是为形式上与库仑定律类比；

8. 两闭合电流回路的相互作用力满足牛顿第三定律：

闭合电流回路 $l_1$ 受到闭合电流回路 $l_2$ 的作用力 $\vec{\boldsymbol{F}}_{12}$ 为 $\boxed{\vec{\boldsymbol{j}}\mathrm{d}\tau \Rightarrow I\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}}$

7. $$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}_1\,\mathrm{d}\tau_1 \times (\vec{j}_2\,\mathrm{d}\tau_2 \times \vec{R}_{12})}{R_{12}^3} \quad 而 \quad d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}_2\,\mathrm{d}\tau_2 \times (\vec{j}_1\,\mathrm{d}\tau_1 \times \vec{R}_{21})}{R_{21}^3}$$

易找到反例：$\mathrm{d}\vec{F}_{12} \neq -\mathrm{d}\vec{F}_{21}$。例如：$\vec{j}_1 \| \hat{e}_x$， $\vec{j}_2 \| \hat{e}_z$， $\vec{R}_{21} \| \hat{e}_z$

稳定电流线总是闭合的（$\nabla\cdot\vec{j}=0$），不存在孤立的稳定电流元，
$\mathrm{d}\vec{F}_{12} \neq -\mathrm{d}\vec{F}_{21}$ 并非违背牛顿第三定律。
引进“电流元”概念只是为形式上与库仑定律类比；

8. 两闭合电流回路的相互作用力满足牛顿第三定律：

闭合电流回路 $l_1$ 受到闭合电流回路 $l_2$ 的作用力 $\vec{F}_{12}$ 为 $\boxed{\vec{j}\mathrm{d}\tau \Rightarrow I\,\mathrm{d}\vec{l}}$

$$\vec{F}_{12} = \oint_{l_1} I_1\mathrm{d}\vec{l}_1 \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_2} I_2\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}\right]$$

7. $$d\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1 \times (\vec{\boldsymbol{j}}_2\,\mathrm{d}\tau_2 \times \vec{\boldsymbol{R}}_{12})}{R_{12}^3} \quad 而 \quad d\vec{\boldsymbol{F}}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\boldsymbol{j}}_2\,\mathrm{d}\tau_2 \times (\vec{\boldsymbol{j}}_1\,\mathrm{d}\tau_1 \times \vec{\boldsymbol{R}}_{21})}{R_{21}^3}$$

易找到反例：$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{12} \neq -\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$。例如：$\vec{\boldsymbol{j}}_1 \| \hat{\boldsymbol{e}}_x$， $\vec{\boldsymbol{j}}_2 \| \hat{\boldsymbol{e}}_z$， $\vec{\boldsymbol{R}}_{21} \| \hat{\boldsymbol{e}}_z$

稳定电流线总是闭合的（$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}} = 0$），不存在孤立的稳定电流元，
$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{12} \neq -\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$ 并非违背牛顿第三定律。
引进"电流元"概念只是为形式上与库仑定律类比；

8. 两闭合电流回路的相互作用力满足牛顿第三定律：

闭合电流回路 $l_1$ 受到闭合电流回路 $l_2$ 的作用力 $\vec{\boldsymbol{F}}_{12}$ 为 $\boxed{\vec{\boldsymbol{j}}\mathrm{d}\tau \Rightarrow I\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}}$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = \oint_{l_1} I_1\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}_1 \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_2} I_2\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}_2 \times \frac{\vec{\boldsymbol{r}}_{12}}{r_{12}^3}\right]$$

其中：$\vec{\boldsymbol{r}}_{12} = \vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_2$

7. $$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}_1\,\mathrm{d}\tau_1 \times (\vec{j}_2\,\mathrm{d}\tau_2 \times \vec{R}_{12})}{R_{12}^3} \quad 而 \quad d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}_2\,\mathrm{d}\tau_2 \times (\vec{j}_1\,\mathrm{d}\tau_1 \times \vec{R}_{21})}{R_{21}^3}$$

易找到反例：$\mathrm{d}\vec{F}_{12} \neq -\mathrm{d}\vec{F}_{21}$。例如：$\vec{j}_1 \| \hat{e}_x$， $\vec{j}_2 \| \hat{e}_z$， $\vec{R}_{21} \| \hat{e}_z$

稳定电流线总是闭合的（$\nabla \cdot \vec{j} = 0$），不存在孤立的稳定电流元，
$\mathrm{d}\vec{F}_{12} \neq -\mathrm{d}\vec{F}_{21}$ 并非违背牛顿第三定律。
引进“电流元”概念只是为形式上与库仑定律类比；

8. 两闭合电流回路的相互作用力满足牛顿第三定律：

闭合电流回路 $l_1$ 受到闭合电流回路 $l_2$ 的作用力 $\vec{F}_{12}$ 为 $\boxed{\vec{j}\mathrm{d}\tau \Rightarrow I\,\mathrm{d}\vec{l}}$

$$\vec{F}_{12} = \oint_{l_1} I_1 \mathrm{d}\vec{l}_1 \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_2} I_2 \mathrm{d}\vec{l}_2 \times \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}\right]$$

其中：$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\mathrm{d}\vec{l}_1 \times [\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}]}{r_{12}^3}$$

7. $$d\vec{F}_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}_1\,\mathrm{d}\tau_1\times(\vec{j}_2\,\mathrm{d}\tau_2\times\vec{R}_{12})}{R_{12}^3}\quad 而\quad d\vec{F}_{21}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}_2\,\mathrm{d}\tau_2\times(\vec{j}_1\,\mathrm{d}\tau_1\times\vec{R}_{21})}{R_{21}^3}$$

易找到反例：$\mathrm{d}\vec{F}_{12}\neq-\mathrm{d}\vec{F}_{21}$。例如：$\vec{j}_1\parallel\hat{e}_x$， $\vec{j}_2\parallel\hat{e}_z$， $\vec{R}_{21}\parallel\hat{e}_z$

稳定电流线总是闭合的（$\nabla\cdot\vec{j}=0$），不存在孤立的稳定电流元，

$\mathrm{d}\vec{F}_{12}\neq-\mathrm{d}\vec{F}_{21}$ 并非违背牛顿第三定律。

引进“电流元”概念只是为形式上与库仑定律类比；

8. 两闭合电流回路的相互作用力满足牛顿第三定律：

闭合电流回路 $l_1$ 受到闭合电流回路 $l_2$ 的作用力 $\vec{F}_{12}$ 为 $\boxed{\vec{j}\mathrm{d}\tau\Rightarrow I\,\mathrm{d}\vec{l}}$

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12}&=\oint_{l_1}I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_2}I_2\mathrm{d}\vec{l}_2\times\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}\right]\\&=\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\mathrm{d}\vec{l}_1\times[\mathrm{d}\vec{l}_2\times\vec{r}_{12}]}{r_{12}^3}\end{aligned}$$

其中：$\vec{r}_{12}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$

利用：$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

# Let there be light

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}_1 \times [\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}_2 \times \vec{\boldsymbol{r}}_{12}]}{r_{12}^3}$$

利用：$\vec{\boldsymbol{a}} \times (\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{c}}) = (\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{c}})\vec{\boldsymbol{b}} - (\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}})\vec{\boldsymbol{c}}$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}_1 \times [\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}_2 \times \vec{\boldsymbol{r}}_{12}]}{r_{12}^3}$$

利用：$\vec{\boldsymbol{a}} \times (\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{c}}) = (\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{c}})\vec{\boldsymbol{b}} - (\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}})\vec{\boldsymbol{c}}$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\left[-\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{(\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}_2)\vec{\boldsymbol{r}}_{12}}{r_{12}^3} + \oint_{l_2}\oint_{l_1}\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}_2\frac{(d\vec{\boldsymbol{l}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{r}}_{12})}{r_{12}^3}\right]$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{\mathrm{d}\vec{l}_1 \times [\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}]}{r_{12}^3}$$

利用：$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left[ - \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{(\mathrm{d}\vec{l}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l}_2)\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} + \oint_{l_2} \oint_{l_1} \mathrm{d}\vec{l}_2 \frac{(d\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left[ - \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{(\mathrm{d}\vec{l}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l}_2)\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} + \oint_{l_2} \mathrm{d}\vec{l}_2 \oint_{l_1} d\vec{l}_1 \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right]$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{\mathrm{d}\vec{l}_1 \times [\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}]}{r_{12}^3}$$

利用：$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left[ -\oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{(\mathrm{d}\vec{l}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l}_2)\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} + \oint_{l_2} \oint_{l_1} \mathrm{d}\vec{l}_2 \frac{(d\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left[ -\oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{(\mathrm{d}\vec{l}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l}_2)\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} + \oint_{l_2} \mathrm{d}\vec{l}_2 \oint_{l_1} d\vec{l}_1 \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right]$$

利用 Stokes 定理：$\oint_{l_1} \mathrm{d}\vec{l}_1 \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = \int_{S_1} \mathrm{d}\sigma_1 \vec{n}_1 \cdot \nabla_1 \times \left( \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right)$

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{\mathrm{d}\vec{l}_1 \times [\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}]}{r_{12}^3}$$

利用：$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left[ -\oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{(\mathrm{d}\vec{l}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l}_2)\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} + \oint_{l_2} \oint_{l_1} \mathrm{d}\vec{l}_2 \frac{(d\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left[ -\oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{(\mathrm{d}\vec{l}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l}_2)\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} + \oint_{l_2} \mathrm{d}\vec{l}_2 \oint_{l_1} d\vec{l}_1 \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right]$$

利用 Stokes 定理：$\oint_{l_1} \mathrm{d}\vec{l}_1 \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = \int_{S_1} \mathrm{d}\sigma_1 \vec{n}_1 \cdot \nabla_1 \times \left( \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right)$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left[ -\oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{(\mathrm{d}\vec{l}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l}_2)\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} + \oint_{l_2} \mathrm{d}\vec{l}_2 \int_{S_1} \mathrm{d}\sigma_1 \vec{n}_1 \cdot \nabla_1 \times \left( \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) \right]$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{\mathrm{d}\vec{l}_1 \times [\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}]}{r_{12}^3}$$

利用：$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left[ -\oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{(\mathrm{d}\vec{l}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l}_2)\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} + \oint_{l_2} \oint_{l_1} \mathrm{d}\vec{l}_2 \frac{(d\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left[ -\oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{(\mathrm{d}\vec{l}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l}_2)\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} + \oint_{l_2} \mathrm{d}\vec{l}_2 \oint_{l_1} d\vec{l}_1 \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right]$$

利用 Stokes 定理：$\oint_{l_1} \mathrm{d}\vec{l}_1 \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = \int_{S_1} \mathrm{d}\sigma_1 \vec{n}_1 \cdot \nabla_1 \times \left( \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right)$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left[ -\oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{(\mathrm{d}\vec{l}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l}_2)\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} + \oint_{l_2} \mathrm{d}\vec{l}_2 \int_{S_1} \mathrm{d}\sigma_1 \vec{n}_1 \cdot \nabla_1 \times \left( \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) \right]$$

利用：$\nabla_1 \times \left( \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) = 0$

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\mathrm{d}\vec{l}_1\times[\mathrm{d}\vec{l}_2\times\vec{r}_{12}]}{r_{12}^3}$$

利用：$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\left[-\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{(\mathrm{d}\vec{l}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2)\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}+\oint_{l_2}\oint_{l_1}\mathrm{d}\vec{l}_2\frac{(d\vec{l}_1\cdot\vec{r}_{12})}{r_{12}^3}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\left[-\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{(\mathrm{d}\vec{l}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2)\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}+\oint_{l_2}\mathrm{d}\vec{l}_2\oint_{l_1}d\vec{l}_1\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}\right]$$

利用 Stokes 定理：$\oint_{l_1}\mathrm{d}\vec{l}_1\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = \int_{S_1}\mathrm{d}\sigma_1\vec{n}_1\cdot\nabla_1\times\left(\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}\right)$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\left[-\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{(\mathrm{d}\vec{l}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2)\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}+\oint_{l_2}\mathrm{d}\vec{l}_2\int_{S_1}\mathrm{d}\sigma_1\vec{n}_1\cdot\nabla_1\times\left(\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}\right)\right]$$

利用：$\nabla_1\times\left(\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}\right) = 0$

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{(\mathrm{d}\vec{l}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2)\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{(d\vec{\boldsymbol{l}}_1 \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}_2)\, \vec{\boldsymbol{r}}_{12}}{r_{12}^3}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{(d\vec{\boldsymbol{l}}_1 \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}_2)\, \vec{\boldsymbol{r}}_{12}}{r_{12}^3}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{(d\vec{\boldsymbol{l}}_2 \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}_1)\, \vec{\boldsymbol{r}}_{21}}{r_{21}^3}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{(d\vec{\boldsymbol{l}}_1 \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}_2)\, \vec{\boldsymbol{r}}_{12}}{r_{12}^3}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{(d\vec{\boldsymbol{l}}_2 \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}_1)\, \vec{\boldsymbol{r}}_{21}}{r_{21}^3}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{F}}_{12} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{(d\vec{\boldsymbol{l}}_1 \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}_2)\,\vec{\boldsymbol{r}}_{12}}{r_{12}^3}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{(d\vec{\boldsymbol{l}}_2 \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}_1)\,\vec{\boldsymbol{r}}_{21}}{r_{21}^3}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{F}}_{12} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$$

9. 变换关系

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{(d\vec{\boldsymbol{l}}_1\cdot d\vec{\boldsymbol{l}}_2)\,\vec{\boldsymbol{r}}_{12}}{r_{12}^3}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{(d\vec{\boldsymbol{l}}_2\cdot d\vec{\boldsymbol{l}}_1)\,\vec{\boldsymbol{r}}_{21}}{r_{21}^3} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{\boldsymbol{F}}_{12} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$$

9. 变换关系

$$d\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\tau\times\vec{\boldsymbol{B}}, \qquad \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\times[\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,']}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{(d\vec{\boldsymbol{l}}_1\cdot d\vec{\boldsymbol{l}}_2)\,\vec{\boldsymbol{r}}_{12}}{r_{12}^3}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{(d\vec{\boldsymbol{l}}_2\cdot d\vec{\boldsymbol{l}}_1)\,\vec{\boldsymbol{r}}_{21}}{r_{21}^3}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{F}}_{12} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$$

9. 变换关系

$$d\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\tau \times \vec{\boldsymbol{B}}, \qquad \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\times[\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,']}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

电流：$q\,\vec{\boldsymbol{v}} \sim$

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)\, \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$
$$\vec{F}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{(d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1)\, \vec{r}_{21}}{r_{21}^3} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

9. 变换关系

$$d\vec{F} = \vec{j}\,\mathrm{d}\tau \times \vec{B}, \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times [\vec{r} - \vec{r}\,']}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

电流：$q\,\vec{v} \sim \quad \vec{I}\,dl$

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{(d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2)\,\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$
$$\vec{F}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{(d\vec{l}_2\cdot d\vec{l}_1)\,\vec{r}_{21}}{r_{21}^3} \quad\Longrightarrow\quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

9. 变换关系

$$d\vec{F} = \vec{j}\,\mathrm{d}\tau\times\vec{B}, \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')\times[\vec{r}-\vec{r}\,']}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

电流：$q\,\vec{v}\sim \quad \vec{I}\,dl\sim\vec{\alpha}\,\mathrm{d}\sigma$

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)\, \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$
$$\vec{F}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{(d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1)\, \vec{r}_{21}}{r_{21}^3} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

9. 变换关系

$$d\vec{F} = \vec{j}\, \mathrm{d}\tau \times \vec{B}, \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times [\vec{r} - \vec{r}\,']}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\, \mathrm{d}\tau'$$

电流：$q\,\vec{v} \sim \quad \vec{I}\, dl \sim \vec{\alpha}\, \mathrm{d}\sigma \sim \vec{j}\, \mathrm{d}\tau$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{(d\vec{\boldsymbol{l}}_1\cdot d\vec{\boldsymbol{l}}_2)\,\vec{\boldsymbol{r}}_{12}}{r_{12}^3}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{(d\vec{\boldsymbol{l}}_2\cdot d\vec{\boldsymbol{l}}_1)\,\vec{\boldsymbol{r}}_{21}}{r_{21}^3}$$

$$\Longrightarrow \qquad \vec{\boldsymbol{F}}_{12} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$$

9. 变换关系

$$d\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\tau\times\vec{\boldsymbol{B}}, \qquad \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\times[\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}']}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

电流：$q\,\vec{\boldsymbol{v}}\sim$ $\boxed{\vec{\boldsymbol{I}}\,dl\sim\vec{\boldsymbol{\alpha}}\,\mathrm{d}\sigma\sim\vec{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\tau}$ $\qquad \vec{\boldsymbol{I}} = \lambda_q\vec{\boldsymbol{v}},\ \ \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \sigma_q\vec{\boldsymbol{v}},\ \ \vec{\boldsymbol{j}} = \rho\vec{\boldsymbol{v}}$

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)\, \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$
$$\vec{F}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{(d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1)\, \vec{r}_{21}}{r_{21}^3} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

9. 变换关系

$$d\vec{F} = \vec{j}\,\mathrm{d}\tau \times \vec{B}, \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times [\vec{r} - \vec{r}\,']}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

电流：$q\,\vec{v} \sim$ $\boxed{\vec{I}\,dl \sim \vec{\alpha}\,\mathrm{d}\sigma \sim \vec{j}\,\mathrm{d}\tau}$ $\qquad \vec{I} = \lambda_q \vec{v}, \;\; \vec{\alpha} = \sigma_q \vec{v}, \;\; \vec{j} = \rho \vec{v}$

对运动电荷 $q$

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{(d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2)\,\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$
$$\vec{F}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{(d\vec{l}_2\cdot d\vec{l}_1)\,\vec{r}_{21}}{r_{21}^3} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

9. 变换关系

$$d\vec{F} = \vec{j}\,\mathrm{d}\tau\times\vec{B}, \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')\times[\vec{r}-\vec{r}\,']}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

电流：$q\,\vec{v}\sim$ $\boxed{\vec{I}\,dl\sim\vec{\alpha}\,\mathrm{d}\sigma\sim\vec{j}\,\mathrm{d}\tau}$ $\quad \vec{I}=\lambda_q\vec{v},\ \ \vec{\alpha}=\sigma_q\vec{v},\ \ \vec{j}=\rho\vec{v}$

对运动电荷 $q$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times[\vec{r}-\vec{r}\,']}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$
$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{(d\vec{\boldsymbol{l}}_1\cdot d\vec{\boldsymbol{l}}_2)\,\vec{\boldsymbol{r}}_{12}}{r_{12}^3}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{(d\vec{\boldsymbol{l}}_2\cdot d\vec{\boldsymbol{l}}_1)\,\vec{\boldsymbol{r}}_{21}}{r_{21}^3}$$

$$\Longrightarrow \qquad \vec{\boldsymbol{F}}_{12} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$$

9. 变换关系

$$d\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\tau\times\vec{\boldsymbol{B}}, \qquad \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\times[\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,']}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

电流：$q\,\vec{\boldsymbol{v}}\sim$ $\boxed{\vec{\boldsymbol{I}}\,dl\sim\vec{\boldsymbol{\alpha}}\,\mathrm{d}\sigma\sim\vec{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\tau}$ $\qquad \vec{\boldsymbol{I}} = \lambda_q\vec{\boldsymbol{v}},\ \ \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \sigma_q\vec{\boldsymbol{v}},\ \ \vec{\boldsymbol{j}} = \rho\vec{\boldsymbol{v}}$

对运动电荷 $q$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{\boldsymbol{v}}\times[\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,']}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3} \qquad ?$$

$$\vec{\boldsymbol{F}} = q\vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{B}} \qquad ?$$

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)\, \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$
$$\vec{F}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{(d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1)\, \vec{r}_{21}}{r_{21}^3} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

9. 变换关系

$$d\vec{F} = \vec{j}\,\mathrm{d}\tau \times \vec{B}, \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times [\vec{r} - \vec{r}\,']}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

电流：$q\,\vec{v} \sim$ $\boxed{\vec{I}\,dl \sim \vec{\alpha}\,\mathrm{d}\sigma \sim \vec{j}\,\mathrm{d}\tau}$ $\quad \vec{I} = \lambda_q \vec{v},\ \ \vec{\alpha} = \sigma_q \vec{v},\ \ \vec{j} = \rho \vec{v}$

对运动电荷 $q$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times [\vec{r} - \vec{r}\,']}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

× 还需条件：低速、匀速、且忽略推迟效应

?

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{(d\vec{\boldsymbol{l}}_1\cdot d\vec{\boldsymbol{l}}_2)\,\vec{\boldsymbol{r}}_{12}}{r_{12}^3}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{(d\vec{\boldsymbol{l}}_2\cdot d\vec{\boldsymbol{l}}_1)\,\vec{\boldsymbol{r}}_{21}}{r_{21}^3} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{\boldsymbol{F}}_{12} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$$

9. 变换关系

$$d\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\tau\times\vec{\boldsymbol{B}}, \qquad \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\times[\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,']}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

电流：$q\,\vec{\boldsymbol{v}}\sim$ $\boxed{\vec{\boldsymbol{I}}\,dl\sim\vec{\boldsymbol{\alpha}}\,\mathrm{d}\sigma\sim\vec{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\tau}$ $\quad\vec{\boldsymbol{I}} = \lambda_q\vec{\boldsymbol{v}},\ \ \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \sigma_q\vec{\boldsymbol{v}},\ \ \vec{\boldsymbol{j}} = \rho\vec{\boldsymbol{v}}$

对运动电荷 $q$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{q\vec{\boldsymbol{v}}\times[\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,']}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}} = q\vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{B}}$$

✗ 还需条件：低速、匀速、且忽略推迟效应

✓ 洛伦兹力，并非安培定律

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)\, \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$
$$\vec{F}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{(d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1)\, \vec{r}_{21}}{r_{21}^3} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

9. 变换关系

$$d\vec{F} = \vec{j}\,\mathrm{d}\tau \times \vec{B}, \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times [\vec{r} - \vec{r}\,']}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

电流：$q\,\vec{v} \sim$ $\boxed{\vec{I}\,dl \sim \vec{\alpha}\,\mathrm{d}\sigma \sim \vec{j}\,\mathrm{d}\tau}$ $\quad \vec{I} = \lambda_q \vec{v},\ \ \vec{\alpha} = \sigma_q \vec{v},\ \ \vec{j} = \rho \vec{v}$

对运动电荷 $q$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times [\vec{r} - \vec{r}\,']}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

✗ 还需条件：低速、匀速、且忽略推迟效应

✓ 洛伦兹力，并非安培定律

磁力与速度方向垂直，磁力不做功

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{(d\vec{\boldsymbol{l}}_1\cdot d\vec{\boldsymbol{l}}_2)\,\vec{\boldsymbol{r}}_{12}}{r_{12}^3}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{(d\vec{\boldsymbol{l}}_2\cdot d\vec{\boldsymbol{l}}_1)\,\vec{\boldsymbol{r}}_{21}}{r_{21}^3}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{F}}_{12} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$$

9. 变换关系

$$d\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\tau\times\vec{\boldsymbol{B}}, \qquad \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\times[\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}']}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

电流：$q\,\vec{\boldsymbol{v}}\sim$ $\boxed{\vec{\boldsymbol{I}}\,dl\sim\vec{\boldsymbol{\alpha}}\,\mathrm{d}\sigma\sim\vec{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\tau}$ $\quad\vec{\boldsymbol{I}}=\lambda_q\vec{\boldsymbol{v}},\ \ \vec{\boldsymbol{\alpha}}=\sigma_q\vec{\boldsymbol{v}},\ \ \vec{\boldsymbol{j}}=\rho\vec{\boldsymbol{v}}$

对运动电荷 $q$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{\boldsymbol{v}}\times[\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}']}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|^3}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}} = q\vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{B}}$$

✗ 还需条件：低速、匀速、且忽略推迟效应

✓ 洛伦兹力，并非安培定律

磁力与速度方向垂直，磁力不做功

运动电荷 $q$ 不构成稳定电流

## 三、静磁场的散度

# 三、静磁场的散度

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\mathrm{d}\tau' \times \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}$$

# 三、静磁场的散度

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\mathrm{d}\tau' \times \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}$$

其中：$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$， $\nabla\frac{1}{R} = -\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}$

# 三、静磁场的散度

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\mathrm{d}\tau' \times \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3} \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \left[\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times \left(\nabla\frac{1}{R}\right)\right]\mathrm{d}\tau'
\end{aligned}
$$

其中：$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$， $\nabla\frac{1}{R} = -\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}$

## 三、静磁场的散度

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}(\vec{r}\,')\mathrm{d}\tau' \times \frac{\vec{R}}{R^3}$$
$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \left[\vec{j}(\vec{r}\,') \times \left(\nabla\frac{1}{R}\right)\right] \mathrm{d}\tau'$$

其中：$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$，　$\nabla\frac{1}{R} = -\frac{\vec{R}}{R^3}$

其中 $\nabla$ 算符仅作用于 $\vec{r}$ 及其函数，而 $\vec{j}(\vec{r}\,')$ 是 $\vec{r}\,'$ 的函数，故对 $\nabla$ 算符而言，$\vec{j}(\vec{r}\,')$ 可视为常矢量。可利用

$$\vec{a} \times \left(\nabla\frac{1}{R}\right) = -\nabla \times \left(\frac{\vec{a}}{R}\right)$$

## 三、静磁场的散度

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}(\vec{r}\,')\mathrm{d}\tau' \times \frac{\vec{R}}{R^3} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \left[\vec{j}(\vec{r}\,') \times \left(\nabla\frac{1}{R}\right)\right]\mathrm{d}\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla \times \left[\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\right]\mathrm{d}\tau'\end{aligned}$$

其中：$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$，$\quad \nabla\frac{1}{R} = -\frac{\vec{R}}{R^3}$

其中 $\nabla$ 算符仅作用于 $\vec{r}$ 及其函数，而 $\vec{j}(\vec{r}\,')$ 是 $\vec{r}\,'$ 的函数，故对 $\nabla$ 算符而言，$\vec{j}(\vec{r}\,')$ 可视为常矢量。可利用

$$\vec{a} \times \left(\nabla\frac{1}{R}\right) = -\nabla \times \left(\frac{\vec{a}}{R}\right)$$

# 三、静磁场的散度

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}(\vec{r}\,')\mathrm{d}\tau' \times \frac{\vec{R}}{R^3}$$
$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \left[\vec{j}(\vec{r}\,') \times \left(\nabla\frac{1}{R}\right)\right]\mathrm{d}\tau'$$

其中：$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$， $\nabla\frac{1}{R} = -\frac{\vec{R}}{R^3}$

其中 $\nabla$ 算符仅作用于 $\vec{r}$ 及其函数，而 $\vec{j}(\vec{r}\,')$ 是 $\vec{r}\,'$ 的函数，故对 $\nabla$ 算符而言，$\vec{j}(\vec{r}\,')$ 可视为常矢量。可利用

$$\vec{a} \times \left(\nabla\frac{1}{R}\right) = -\nabla \times \left(\frac{\vec{a}}{R}\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla \times \left[\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\right]\mathrm{d}\tau'$$

$\nabla$ 算符仅作用于 $\vec{r}$ 及其函数，而积分对 $\vec{r}\,'$ 进行，故 $\nabla$ 算符的微分运算与对 $\vec{r}\,'$ 的积分运算次序可调

# 三、静磁场的散度

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}(\vec{r}\,')\mathrm{d}\tau' \times \frac{\vec{R}}{R^3} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \left[\vec{j}(\vec{r}\,') \times \left(\nabla \frac{1}{R}\right)\right] \mathrm{d}\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla \times \left[\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\right] \mathrm{d}\tau' \\ &= \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\mathrm{d}\tau'\end{aligned}$$

其中：$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$，$\quad \nabla \frac{1}{R} = -\frac{\vec{R}}{R^3}$

其中 $\nabla$ 算符仅作用于 $\vec{r}$ 及其函数，而 $\vec{j}(\vec{r}\,')$ 是 $\vec{r}\,'$ 的函数，故对 $\nabla$ 算符而言，$\vec{j}(\vec{r}\,')$ 可视为常矢量。可利用

$$\vec{a} \times \left(\nabla \frac{1}{R}\right) = -\nabla \times \left(\frac{\vec{a}}{R}\right)$$

$\nabla$ 算符仅作用于 $\vec{r}$ 及其函数，而积分对 $\vec{r}\,'$ 进行，故 $\nabla$ 算符的微分运算与对 $\vec{r}\,'$ 的积分运算次序可调

## 三、静磁场的散度

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\mathrm{d}\tau' \times \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \left[\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}') \times \left(\nabla\frac{1}{R}\right)\right]\mathrm{d}\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla \times \left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\right]\mathrm{d}\tau' \\ &= \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\mathrm{d}\tau' \quad \Longrightarrow\end{aligned}$$

其中：$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'$， $\nabla\dfrac{1}{R} = -\dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}$

其中 $\nabla$ 算符仅作用于 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 及其函数，而 $\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')$ 是 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 的函数，故对 $\nabla$ 算符而言，$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')$ 可视为常矢量。可利用

$$\vec{\boldsymbol{a}} \times \left(\nabla\frac{1}{R}\right) = -\nabla \times \left(\frac{\vec{\boldsymbol{a}}}{R}\right)$$

$\nabla$ 算符仅作用于 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 及其函数，而积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 进行，故 $\nabla$ 算符的微分运算与对 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 的积分运算次序可调

# 三、静磁场的散度

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}(\vec{r}\,')\mathrm{d}\tau' \times \frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \left[\vec{j}(\vec{r}\,') \times \left(\nabla\frac{1}{R}\right)\right] \mathrm{d}\tau'$$

其中：$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$, $\quad \nabla\frac{1}{R} = -\frac{\vec{R}}{R^3}$

其中 $\nabla$ 算符仅作用于 $\vec{r}$ 及其函数，而 $\vec{j}(\vec{r}\,')$ 是 $\vec{r}\,'$ 的函数，故对 $\nabla$ 算符而言，$\vec{j}(\vec{r}\,')$ 可视为常矢量。可利用

$$\vec{a} \times \left(\nabla\frac{1}{R}\right) = -\nabla \times \left(\frac{\vec{a}}{R}\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla \times \left[\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\right] \mathrm{d}\tau'$$

$\nabla$ 算符仅作用于 $\vec{r}$ 及其函数，而积分对 $\vec{r}\,'$ 进行，故 $\nabla$ 算符的微分运算与对 $\vec{r}\,'$ 的积分运算次序可调

$$= \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\mathrm{d}\tau' \quad \Longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \\ \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\mathrm{d}\tau' \end{aligned}}$$

# 三、静磁场的散度

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}(\vec{r}\,')\mathrm{d}\tau' \times \frac{\vec{R}}{R^3}$$

其中：$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$, $\quad \nabla\frac{1}{R} = -\frac{\vec{R}}{R^3}$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \left[\vec{j}(\vec{r}\,') \times \left(\nabla\frac{1}{R}\right)\right] \mathrm{d}\tau'$$

其中 $\nabla$ 算符仅作用于 $\vec{r}$ 及其函数，而 $\vec{j}(\vec{r}\,')$ 是 $\vec{r}\,'$ 的函数，故对 $\nabla$ 算符而言，$\vec{j}(\vec{r}\,')$ 可视为常矢量。可利用

$$\vec{a} \times \left(\nabla\frac{1}{R}\right) = -\nabla \times \left(\frac{\vec{a}}{R}\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla \times \left[\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\right] \mathrm{d}\tau'$$

$\nabla$ 算符仅作用于 $\vec{r}$ 及其函数，而积分对 $\vec{r}\,'$ 进行，故 $\nabla$ 算符的微分运算与对 $\vec{r}\,'$ 的积分运算次序可调

$$= \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\mathrm{d}\tau' \quad \Longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}) &= \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \\ \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\mathrm{d}\tau'\end{aligned}}$$

从而

## 三、静磁场的散度

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}(\vec{r}\,')\mathrm{d}\tau' \times \frac{\vec{R}}{R^3} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \left[\vec{j}(\vec{r}\,') \times \left(\nabla\frac{1}{R}\right)\right]\mathrm{d}\tau'\end{aligned}$$

其中：$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$， $\nabla\frac{1}{R} = -\frac{\vec{R}}{R^3}$

其中 $\nabla$ 算符仅作用于 $\vec{r}$ 及其函数，而 $\vec{j}(\vec{r}\,')$ 是 $\vec{r}\,'$ 的函数，故对 $\nabla$ 算符而言，$\vec{j}(\vec{r}\,')$ 可视为常矢量。可利用

$$\vec{a} \times \left(\nabla\frac{1}{R}\right) = -\nabla \times \left(\frac{\vec{a}}{R}\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla \times \left[\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\right]\mathrm{d}\tau'$$

$\nabla$ 算符仅作用于 $\vec{r}$ 及其函数，而积分对 $\vec{r}\,'$ 进行，故 $\nabla$ 算符的微分运算与对 $\vec{r}\,'$ 的积分运算次序可调

$$= \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\mathrm{d}\tau' \Longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}) &= \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \\ \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\mathrm{d}\tau'\end{aligned}}$$

从而 $\boxed{\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \nabla \cdot [\nabla \times \vec{A}(\vec{r})] = 0}$

# 四、静磁场的旋度

## 四、静磁场的旋度

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla \times [\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})] = \nabla(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}}) - \nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}}, \qquad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\, d\tau'$$

# 四、静磁场的旋度

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\nabla\times[\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})]=\nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}})-\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}},\qquad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}d\tau'$$

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}\quad=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\cdot\int_V\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\mathrm{d}\tau'$$

## 四、静磁场的旋度

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\nabla\times[\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})]=\nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}})-\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}},\qquad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\,d\tau'$$

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}\quad=\frac{\mu_0}{4\pi}\,\nabla\cdot\int_V\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau'$$

其中：$\vec{\boldsymbol{R}}=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'$

## 四、静磁场的旋度

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\nabla\times[\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})]=\nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}})-\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}},\qquad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\,d\tau'$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}&=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\cdot\int_V\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\,\mathrm{d}\tau'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\nabla\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\right]d\tau'\end{aligned}$$

其中：$\vec{\boldsymbol{R}}=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'$

## 四、静磁场的旋度

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\nabla\times[\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})]=\nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}})-\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}},\qquad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\,d\tau'$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\,\nabla\cdot\int_V\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\,\mathrm{d}\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\nabla\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\right]d\tau'\end{aligned}$$

其中：$\vec{\boldsymbol{R}}=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'$

$j(\vec{\boldsymbol{r}}')$ 对算符 $\nabla$ 而言视为常矢量

# 四、静磁场的旋度

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla \times [\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})] = \nabla(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}}) - \nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}}, \qquad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R} d\tau'$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \int_V \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R} \mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\right] d\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}') \cdot \nabla \frac{1}{R} d\tau'
\end{aligned}$$

其中：$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'$

$j(\vec{\boldsymbol{r}}')$ 对算符 $\nabla$ 而言视为常矢量

# 四、静磁场的旋度

$$\nabla\times\vec{B}(\vec{r})=\nabla\times[\nabla\times\vec{A}(\vec{r})]=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A},\qquad \vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}d\tau'$$

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\cdot\int_V\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\mathrm{d}\tau'$$

其中：$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}\,'$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\nabla\cdot\left[\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\right]d\tau'$$

$j(\vec{r}\,')$ 对算符 $\nabla$ 而言视为常矢量

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\vec{j}(\vec{r}\,')\cdot\nabla\frac{1}{R}d\tau'$$

利用：$\nabla'\cdot\left[\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\right]=\frac{\overbrace{\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}\,')}^{0\,\dagger}}{R}+\vec{j}(\vec{r}\,')\cdot\underbrace{\nabla'\frac{1}{R}}_{-\nabla\frac{1}{R}\,\ddagger}$

# 四、静磁场的旋度

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\nabla\times[\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})]=\nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}})-\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}},\qquad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}d\tau'$$

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\cdot\int_V\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\mathrm{d}\tau'$$

其中：$\vec{\boldsymbol{R}}=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\nabla\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\right]d\tau'$$

$j(\vec{\boldsymbol{r}}')$ 对算符 $\nabla$ 而言视为常矢量

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\cdot\nabla\frac{1}{R}d\tau'$$

利用：$\nabla'\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\right]=\frac{\overbrace{\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}^{0\ \dagger}}{R}+\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\cdot\underbrace{\nabla'\frac{1}{R}}_{-\nabla\frac{1}{R}\ \ddagger}$

† 利用了稳恒电流 $\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')=0$

## 四、静磁场的旋度

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\nabla\times[\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})]=\nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}})-\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}},\qquad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}d\tau'$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\cdot\int_V\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\mathrm{d}\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\nabla\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\right]d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\cdot\nabla\frac{1}{R}d\tau'\end{aligned}$$

其中：$\vec{\boldsymbol{R}}=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'$

$j(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 对算符 $\nabla$ 而言视为常矢量

利用：$\nabla'\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\right]=\overbrace{\frac{\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}}^{0\;\dagger}+\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\cdot\underbrace{\nabla'\frac{1}{R}}_{-\nabla\frac{1}{R}\;\ddagger}$

† 利用了稳恒电流 $\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')=0$

‡ 利用了 $\nabla g(R)=-\nabla' g(R)$

## 四、静磁场的旋度

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\nabla\times[\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})]=\nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}})-\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}},\qquad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}d\tau'$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}&=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\cdot\int_V\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\mathrm{d}\tau'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\nabla\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\right]d\tau'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\cdot\nabla\frac{1}{R}d\tau'\end{aligned}$$

其中：$\vec{\boldsymbol{R}}=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'$

$j(\vec{\boldsymbol{r}}')$ 对算符 $\nabla$ 而言视为常矢量

利用：$\nabla'\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\right]=\frac{\overbrace{\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}^{0\,\dagger}}{R}+\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\cdot\underbrace{\nabla'\frac{1}{R}}_{-\nabla\frac{1}{R}\,\ddagger}$

† 利用了稳恒电流 $\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')=0$

‡ 利用了 $\nabla g(R)=-\nabla' g(R)$

从而有：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\cdot\nabla\frac{1}{R}=-\nabla'\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\right]$

# 四、静磁场的旋度

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla \times [\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})] = \nabla(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}}) - \nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}}, \qquad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R} d\tau'$$

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \int_V \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R} \mathrm{d}\tau'$$

其中：$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \left[ \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R} \right] d\tau'$$

$j(\vec{\boldsymbol{r}}')$ 对算符 $\nabla$ 而言视为常矢量

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}') \cdot \nabla \frac{1}{R} d\tau'$$

利用：$\nabla' \cdot \left[ \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R} \right] = \frac{\overbrace{\nabla' \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}^{0\,\dagger}}{R} + \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}') \cdot \underbrace{\nabla' \frac{1}{R}}_{-\nabla \frac{1}{R}\,\ddagger}$

† 利用了稳恒电流 $\nabla' \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}') = 0$

‡ 利用了 $\nabla g(R) = -\nabla' g(R)$

从而有：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}') \cdot \nabla \frac{1}{R} = -\nabla' \cdot \left[ \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R} \right]$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla' \cdot \left[ \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R} \right] d\tau'$$

# 四、静磁场的旋度

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\nabla\times[\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})]=\nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}})-\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}},\qquad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}d\tau'$$

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\cdot\int_V\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\mathrm{d}\tau'$$

其中：$\vec{\boldsymbol{R}}=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\nabla\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\right]d\tau'$$

$j(\vec{\boldsymbol{r}}')$ 对算符 $\nabla$ 而言视为常矢量

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\cdot\nabla\frac{1}{R}d\tau'$$

利用：$\nabla'\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\right]=\overbrace{\frac{\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}}^{0\,\dagger}+\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\cdot\underbrace{\nabla'\frac{1}{R}}_{-\nabla\frac{1}{R}\,\ddagger}$

† 利用了稳恒电流 $\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')=0$

‡ 利用了 $\nabla g(R)=-\nabla' g(R)$

从而有：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\cdot\nabla\frac{1}{R}=-\nabla'\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\right]$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\nabla'\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\right]d\tau'$$

Gauss定理：体积分 $\Rightarrow$ 面积分

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla' \cdot \left[ \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R} \right] d\tau'$$

Gauss定理：体积分 $\Rightarrow$ 面积分

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla' \cdot \left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\right] d\tau' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\, d\sigma'
\end{aligned}$$

Gauss定理：体积分 $\Rightarrow$ 面积分

# Let there be light

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla'\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\right]d\tau'$$

Gauss定理：体积分 $\Rightarrow$ 面积分

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}d\sigma'$$

$\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')$ 为沿闭合面正法向流出的电流，
由于 $V$ 包含了所有电流不为0的区域，
故无电流沿闭合面正法向流出，
在 $S$ 面上：$\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}') = 0$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla'\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\right]d\tau' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\,d\sigma' \\ &= 0\end{aligned}$$

Gauss定理：体积分 $\Rightarrow$ 面积分

$\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')$ 为沿闭合面正法向流出的电流，
由于 $V$ 包含了所有电流不为0的区域，
故无电流沿闭合面正法向流出，
在 $S$ 面上：$\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')=0$

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla'\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\right]d\tau'$$

Gauss定理：体积分 ⇒ 面积分

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\,d\sigma'$$

$$= 0$$

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0}$$

$\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 为沿闭合面正法向流出的电流，
由于 $V$ 包含了所有电流不为0的区域，
故无电流沿闭合面正法向流出，
在 $S$ 面上：$\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') = 0$

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla'\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\right]d\tau' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\,d\sigma' \\
&= 0
\end{aligned}$$

Gauss定理：体积分 $\Rightarrow$ 面积分

$\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')$ 为沿闭合面正法向流出的电流，
由于 $V$ 包含了所有电流不为0的区域，
故无电流沿闭合面正法向流出，
在 $S$ 面上：$\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')=0$

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})=0}$$

另一项

$$\nabla\cdot\vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla'\cdot\left[\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\right]d\tau'$$

Gauss定理：体积分 $\Rightarrow$ 面积分

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{n}\cdot\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}d\sigma'$$

$\vec{n}\cdot\vec{j}(\vec{r}\,')$ 为沿闭合面正法向流出的电流，

由于 $V$ 包含了所有电流不为0的区域，

故无电流沿闭合面正法向流出，

在 $S$ 面上：$\vec{n}\cdot\vec{j}(\vec{r}\,')=0$

$$= 0$$

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r}) = 0}$$

另一项

$$\nabla^2\vec{A}(\vec{r}) = \nabla^2\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\right]d\tau'$$

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla'\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\right]d\tau'$$

Gauss定理：体积分 $\Rightarrow$ 面积分

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}d\sigma'$$

$\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')$ 为沿闭合面正法向流出的电流，
由于 $V$ 包含了所有电流不为0的区域，
故无电流沿闭合面正法向流出，
在 $S$ 面上：$\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}') = 0$

$$= 0$$

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0}$$

另一项

$$\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla^2\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\right]d\tau'$$

交换积分微分顺序，(其中 $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'$)

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla'\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\right]d\tau'$$

Gauss定理：体积分 ⇒ 面积分

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}d\sigma'$$

$\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 为沿闭合面正法向流出的电流，
由于 $V$ 包含了所有电流不为0的区域，
故无电流沿闭合面正法向流出，
在 $S$ 面上：$\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') = 0$

$$= 0$$

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0}$$

另一项

$$\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla^2\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\right]d\tau'$$

交换积分微分顺序，(其中 $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$)

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla^2\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\right]d\tau'$$

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla' \cdot \left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\right] d\tau'$$

Gauss定理：体积分 $\Rightarrow$ 面积分

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R} d\sigma'$$

$\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')$ 为沿闭合面正法向流出的电流，

由于 $V$ 包含了所有电流不为0的区域，

故无电流沿闭合面正法向流出，

$$= 0$$

在 $S$ 面上：$\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}') = 0$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0}$$

另一项

$$\nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla^2 \frac{\mu_0}{4\pi}\int \left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\right] d\tau'$$

交换积分微分顺序，(其中 $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'$)

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla^2 \left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\right] d\tau'$$

对于标量算符 $\nabla^2$，$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')$ 视为常矢量

$$\nabla\cdot\vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla'\cdot\left[\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\right]d\tau'$$

Gauss定理：体积分 $\Rightarrow$ 面积分

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{n}\cdot\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}d\sigma'$$

$\vec{n}\cdot\vec{j}(\vec{r}\,')$ 为沿闭合面正法向流出的电流，
由于 $V$ 包含了所有电流不为0的区域，
故无电流沿闭合面正法向流出，
在 $S$ 面上：$\vec{n}\cdot\vec{j}(\vec{r}\,') = 0$

$$= 0$$

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r}) = 0}$$

另一项

$$\nabla^2\vec{A}(\vec{r}) = \nabla^2\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\right]d\tau'$$

交换积分微分顺序，(其中 $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$)

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla^2\left[\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\right]d\tau'$$

对于标量算符 $\nabla^2$，$\vec{j}(\vec{r}\,')$ 视为常矢量

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{j}(\vec{r}\,')\left[\nabla^2\frac{1}{R}\right]d\tau'$$

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla'\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\right]d\tau'$$

Gauss定理：体积分 $\Rightarrow$ 面积分

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}d\sigma'$$

$$= 0$$

$\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 为沿闭合面正法向流出的电流，
由于 $V$ 包含了所有电流不为0的区域，
故无电流沿闭合面正法向流出，
在 $S$ 面上：$\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') = 0$

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0}$$

另一项

$$\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla^2\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\right]d\tau'$$

交换积分微分顺序，(其中 $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$)

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla^2\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\right]d\tau'$$

对于标量算符 $\nabla^2$，$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 视为常矢量

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\left[\nabla^2\frac{1}{R}\right]d\tau'$$

$$\nabla^2\frac{1}{R} = \nabla\cdot\nabla\frac{1}{R} = -\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3} = -4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,')$$

# Let there be light

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}\,') \left[ \nabla^2 \frac{1}{R} \right] d\tau'$$

# Let there be light

$$\nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \left[ \nabla^2 \frac{1}{R} \right] d\tau'$$

$$\nabla^2 \frac{1}{R} = -\nabla \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3} = -4\pi \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,')$$

# Let there be light

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}\,') \left[ \nabla^2 \frac{1}{R} \right] d\tau' \qquad \nabla^2 \frac{1}{R} = -\nabla \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}\,') \left[ -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \right] d\tau'$$

# Let there be light

$$\nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\left[\nabla^2\frac{1}{R}\right]d\tau' \qquad \nabla^2\frac{1}{R} = -\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3} = -4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\left[-4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')\right]d\tau'$$

$$= -\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})$$

# Let there be light

$$\nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\left[\nabla^2 \frac{1}{R}\right] d\tau'$$

$$\nabla^2 \frac{1}{R} = -\nabla \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3} = -4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,')$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\left[-4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,')\right] d\tau'$$

$$\nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\mu_0 \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})$$

# Let there be light

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}(\vec{r}\,')\left[\nabla^2 \frac{1}{R}\right] d\tau' \qquad \nabla^2\frac{1}{R} = -\nabla\cdot\frac{\vec{R}}{R^3} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}(\vec{r}\,')\left[-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\right] d\tau'$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r})}$$

$$\nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}') \left[ \nabla^2 \frac{1}{R} \right] d\tau' \qquad \nabla^2 \frac{1}{R} = -\nabla \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3} = -4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}')$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}') \left[ -4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}') \right] d\tau'$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\mu_0 \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})}$$

最后得:

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}(\vec{r}\,')\left[\nabla^2 \frac{1}{R}\right] d\tau' \qquad \nabla^2 \frac{1}{R} = -\nabla \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}(\vec{r}\,')\left[-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\right] d\tau'$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r})}$$

最后得:

$$\boxed{\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})}$$

$$\nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\left[\nabla^2 \frac{1}{R}\right] d\tau' \qquad \nabla^2 \frac{1}{R} = -\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3} = -4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\left[-4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')\right] d\tau'$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\mu_0 \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})}$$

最后得:

$$\boxed{\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla\times(\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}) - \nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \mu_0\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})}$$

从而有:

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0, \qquad \nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \mu_0\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})}$$

# Let there be light

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})=0,\qquad \nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})}$$

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})=0,\qquad \nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})}$$

**讨论：**

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0, \qquad \nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \mu_0 \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})}$$

## 讨论：

1. 静磁场无源有旋，磁力线闭合，没有起点没有终点（不会中断）；

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})=0,\qquad \nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})}$$

**讨论：**

1. 静磁场无源有旋，磁力线闭合，没有起点没有终点（不会中断）；

2. 静磁场是非保守场，$\oint_{\mathcal{P}}\vec{\boldsymbol{B}}\cdot d\vec{\boldsymbol{l}}\neq 0$，静磁场以涡旋形式出现；

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})=0,\qquad \nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})}$$

## 讨论：

1. 静磁场无源有旋，磁力线闭合，没有起点没有终点（不会中断）；

2. 静磁场是非保守场，$\oint_{\mathcal{P}}\vec{\boldsymbol{B}}\cdot d\vec{\boldsymbol{l}}\neq 0$，静磁场以涡旋形式出现；

3. 静磁场的散度为 $0$，它必可表为一个矢量函数 $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 的旋度：

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}),$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0, \qquad \nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \mu_0 \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})}$$

## 讨论：

1. 静磁场无源有旋，磁力线闭合，没有起点没有终点（不会中断）；

2. 静磁场是非保守场，$\oint_{\mathcal{P}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} \neq 0$，静磁场以涡旋形式出现；

3. 静磁场的散度为 0，它必可表为一个矢量函数 $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 的旋度：

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}), \qquad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\, d\tau'$$

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})=0,\qquad \nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})}$$

## 讨论：

1. 静磁场无源有旋，磁力线闭合，没有起点没有终点（不会中断）；

2. 静磁场是非保守场，$\oint_{\mathcal{P}}\vec{\boldsymbol{B}}\cdot d\vec{\boldsymbol{l}}\neq 0$，静磁场以涡旋形式出现；

3. 静磁场的散度为 0，它必可表为一个矢量函数 $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 的旋度：

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\qquad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\,d\tau'$$

$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 称为矢量势，静磁场的矢量势满足

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})=0$$

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})=0,\qquad \nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})}$$

## 讨论：

1. 静磁场无源有旋，磁力线闭合，没有起点没有终点（不会中断）；

2. 静磁场是非保守场，$\oint_{\mathcal{P}}\vec{\boldsymbol{B}}\cdot d\vec{\boldsymbol{l}}\neq 0$，静磁场以涡旋形式出现；

3. 静磁场的散度为 0，它必可表为一个矢量函数 $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 的旋度：

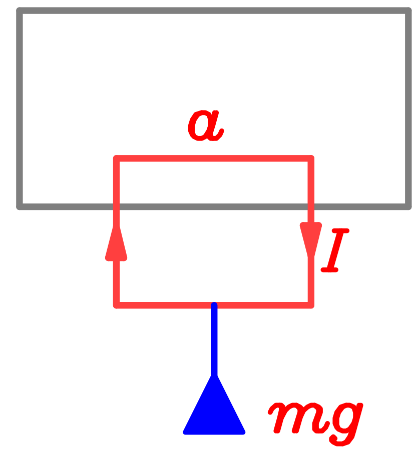
$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\qquad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\,d\tau'$$

$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 称为矢量势，静磁场的矢量势满足

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})=0\qquad \nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})=-\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})$$

## 五、例题

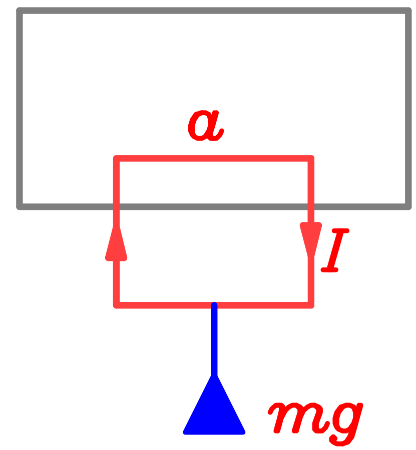
## 五、例题




例 1：如图所示，灰色区有均匀磁场，其磁感应强度 $\vec{B}$ 指向纸内，保持红色回路有电流强度 $I$ 的电流并悬挂一重物 $mg$ 。当磁场强度增强至 $B_c$ 时，回路将上升。求 $B_c$。如回路上升 $h$，外磁场做了多少功？

# 五、例题

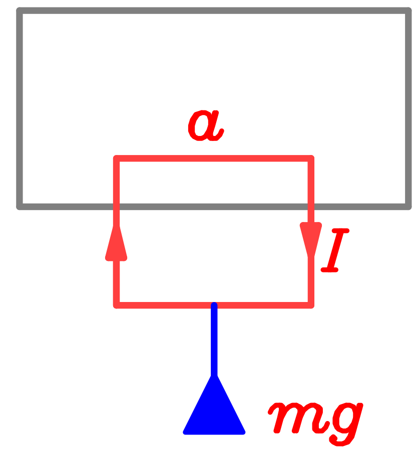
例 1：如图所示，灰色区有均匀磁场，其磁感应强度 $\vec{B}$ 指向纸内，保持红色回路有电流强度 $I$ 的电流并悬挂一重物 $mg$ 。当磁场强度增强至 $B_c$ 时，回路将上升。求 $B_c$。如回路上升 $h$，外磁场做了多少功？




磁力 $\quad F_{\mathrm{mag}} = \int I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = I\,B\,a$ 方向向上

# 五、例题

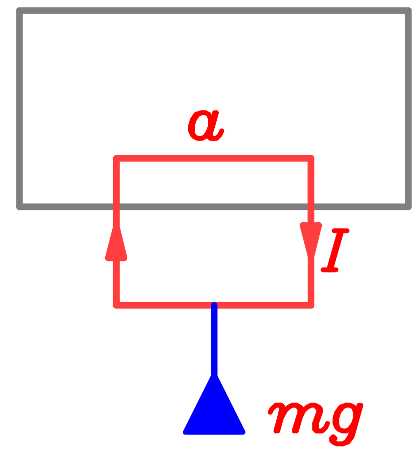
例 1：如图所示，灰色区有均匀磁场，其磁感应强度 $\vec{B}$ 指向纸内，保持红色回路有电流强度 $I$ 的电流并悬挂一重物 $mg$ 。当磁场强度增强至 $B_c$ 时，回路将上升。求 $B_c$。如回路上升 $h$，外磁场做了多少功？




磁力 $\quad F_{\mathrm{mag}} = \int I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = I\,B\,a$ 方向向上

故： $\quad I\,B\,a > mg \quad \Rightarrow \quad B > B_c = \dfrac{mg}{aI}$

# 五、例题



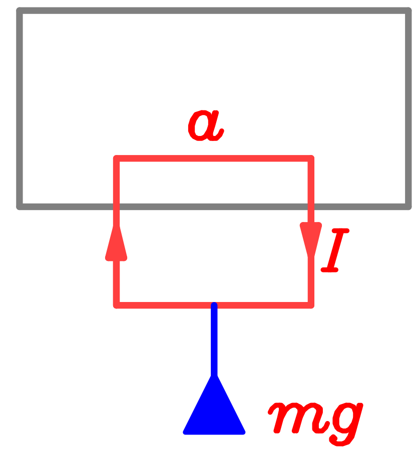

例 1：如图所示，灰色区有均匀磁场，其磁感应强度 $\vec{B}$ 指向纸内，保持红色回路有电流强度 $I$ 的电流并悬挂一重物 $mg$ 。当磁场强度增强至 $B_c$ 时，回路将上升。求 $B_c$。如回路上升 $h$，外磁场做了多少功？

磁力 $F_{\mathsf{mag}} = \int I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = I\,B\,a$ 方向向上

故：$I\,B\,a > mg \quad \Rightarrow \quad B > B_c = \dfrac{mg}{aI}$

因为磁力总与电荷运动方向垂直

## 五、例题




例 1：如图所示，灰色区有均匀磁场，其磁感应强度 $\vec{B}$ 指向纸内，保持红色回路有电流强度 $I$ 的电流并悬挂一重物 $mg$ 。当磁场强度增强至 $B_c$ 时，回路将上升。求 $B_c$。如回路上升 $h$，外磁场做了多少功？

磁力 $\quad F_{\text{mag}} = \int I\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = I\,B\,a$ 方向向上

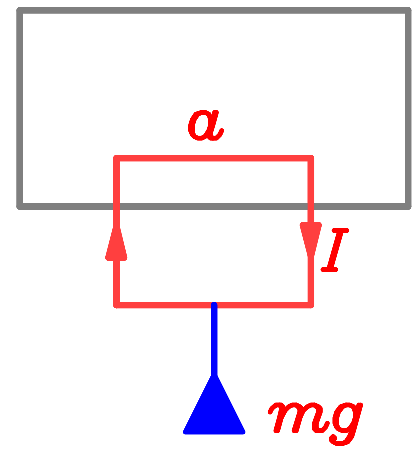
故： $\quad I\,B\,a > mg \quad \Rightarrow \quad B > B_c = \dfrac{mg}{aI}$

因为磁力总与电荷运动方向垂直

不管回路上升多少，外磁场不做功！磁力不做功！

# 五、例题

例 1：如图所示，灰色区有均匀磁场，其磁感应强度 $\vec{B}$ 指向纸内，保持红色回路有电流强度 $I$ 的电流并悬挂一重物 $mg$ 。当磁场强度增强至 $B_c$ 时，回路将上升。求 $B_c$。如回路上升 $h$，外磁场做了多少功？




磁力 $F_{\mathsf{mag}} = \int I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = I\,B\,a$ 方向向上

故： $I\,B\,a > mg \quad \Rightarrow \quad B > B_c = \dfrac{mg}{aI}$

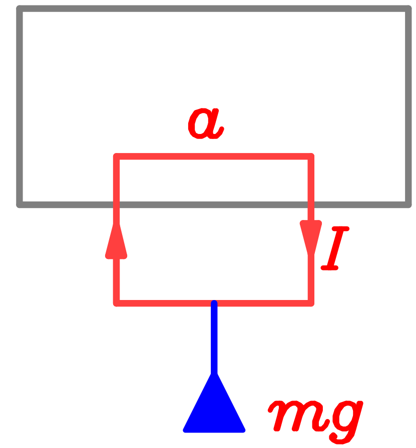
因为磁力总与电荷运动方向垂直

不管回路上升多少，外磁场不做功！磁力不做功！

但回路上升重力势能增加，必有做功过程。

## 五、例题

例 1：如图所示，灰色区有均匀磁场，其磁感应强度 $\vec{B}$ 指向纸内，保持红色回路有电流强度 $I$ 的电流并悬挂一重物 $mg$ 。当磁场强度增强至 $B_c$ 时，回路将上升。求 $B_c$。如回路上升 $h$，外磁场做了多少功？



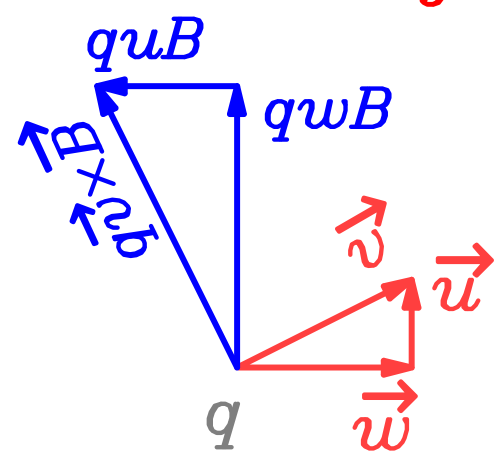

磁力 $\quad F_{\mathsf{mag}} = \int I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = I\,B\,a \quad$ 方向向上

故： $\quad I\,B\,a > mg \quad \Rightarrow \quad B > B_c = \dfrac{mg}{aI}$

因为磁力总与电荷运动方向垂直

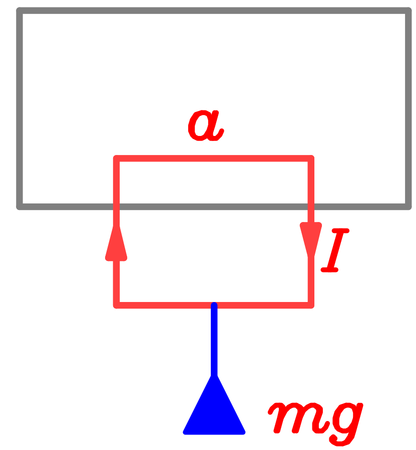
不管回路上升多少，外磁场不做功！磁力不做功！

但回路上升重力势能增加，必有做功过程。



# 五、例题

例 1：如图所示，灰色区有均匀磁场，其磁感应强度 $\vec{B}$ 指向纸内，保持红色回路有电流强度 $I$ 的电流并悬挂一重物 $mg$ 。当磁场强度增强至 $B_c$ 时，回路将上升。求 $B_c$。如回路上升 $h$，外磁场做了多少功？



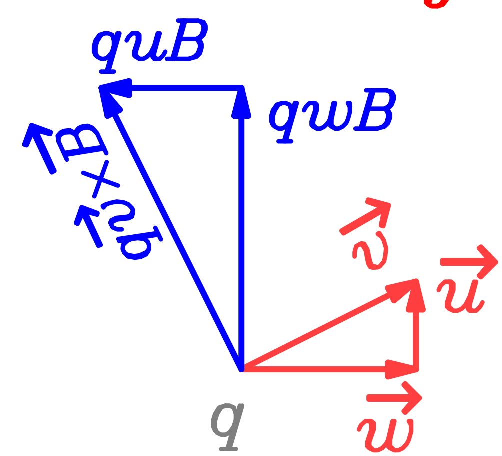

磁力 $\quad F_{\text{mag}} = \int I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = I\,B\,a$ 　方向向上

故： $\quad I\,B\,a > mg \quad \Rightarrow \quad B > B_c = \dfrac{mg}{aI}$

因为磁力总与电荷运动方向垂直

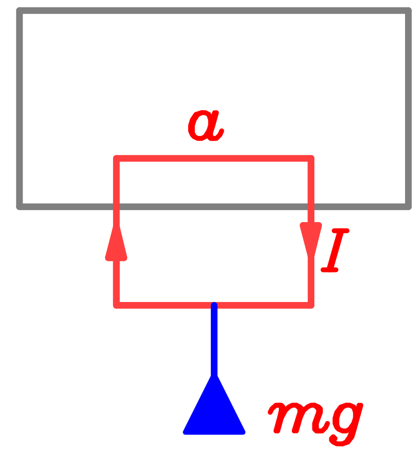
**不管回路上升多少，外磁场不做功！磁力不做功！**

但回路上升重力势能增加，必有做功过程。




回路上升时电荷的运动速度如图所示

# 五、例题




例 1：如图所示，灰色区有均匀磁场，其磁感应强度 $\vec{B}$ 指向纸内，保持红色回路有电流强度 $I$ 的电流并悬挂一重物 $mg$ 。当磁场强度增强至 $B_c$ 时，回路将上升。求 $B_c$。如回路上升 $h$，外磁场做了多少功？

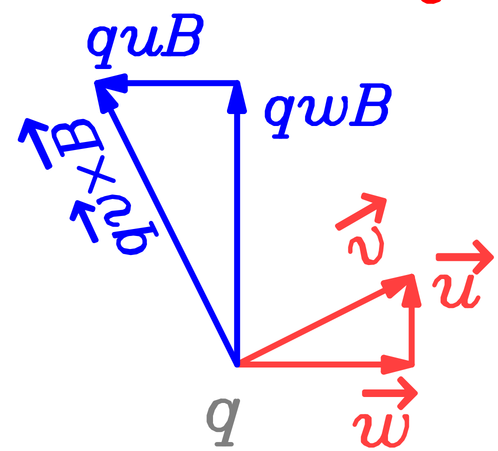
磁力 $F_{\mathrm{mag}} = \int I\, \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = I\, B\, a$ 方向向上

故： $I\, B\, a > mg \quad \Rightarrow \quad B > B_c = \dfrac{mg}{aI}$

因为磁力总与电荷运动方向垂直

不管回路上升多少，外磁场不做功！磁力不做功！

但回路上升重力势能增加，必有做功过程。

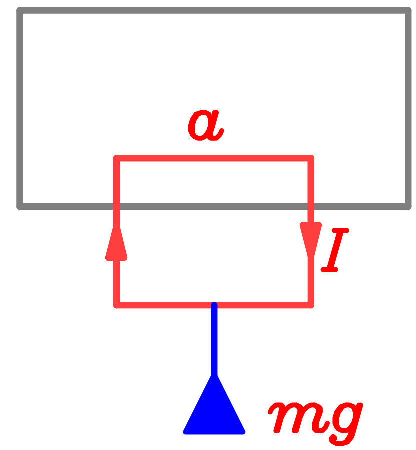



回路上升时电荷的运动速度如图所示

电荷速度 $\vec{v}$ = 水平方向 $\vec{w}$ + 垂直方向$\vec{u}$

## 五、例题

例 1：如图所示，灰色区有均匀磁场，其磁感应强度 $\vec{B}$ 指向纸内，保持红色回路有电流强度 $I$ 的电流并悬挂一重物 $mg$ 。当磁场强度增强至 $B_c$ 时，回路将上升。求 $B_c$。如回路上升 $h$，外磁场做了多少功？



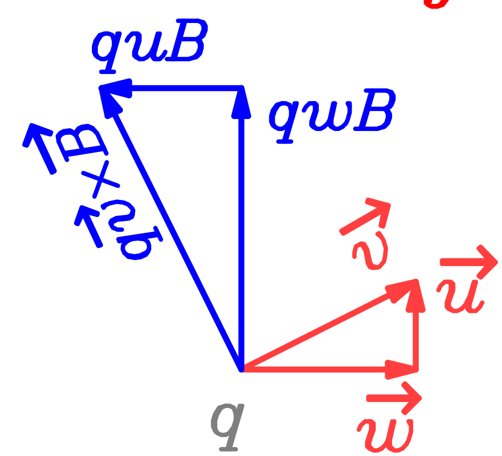

磁力 $\quad F_{\text{mag}} = \int I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = I\,B\,a$ 方向向上

故： $\quad I\,B\,a > mg \quad \Rightarrow \quad B > B_c = \dfrac{mg}{aI}$

因为磁力总与电荷运动方向垂直

**不管回路上升多少，外磁场不做功！磁力不做功！**

但回路上升重力势能增加，必有做功过程。




回路上升时电荷的运动速度如图所示

电荷速度 $\vec{v}$ = 水平方向 $\vec{w}$ + 垂直方向 $\vec{u}$

磁力 $\vec{F}_{\text{mag}} = q\,\vec{v}\times\vec{B}$ = 垂直方向 $q\,\vec{w}\times\vec{B}$ + 水平方向 $q\,\vec{u}\times\vec{B}$

对于回路兰色段 $a$,

对于回路兰色段 $a$，

其垂直方向受力为

对于回路兰色段 $a$，

其垂直方向受力为

$$F_\perp = \underbrace{(\lambda a)}_{q} wB = \underbrace{(\lambda w)}_{I} B\,a = IB\,a$$

(其中 $\lambda$ 为电荷线密度)

对于回路兰色段 $a$，

其垂直方向受力为

$$F_{\perp} = \underbrace{(\lambda a)}_{q} wB = \underbrace{(\lambda w)}_{I} B\,a = I B\,a$$

(其中 $\lambda$ 为电荷线密度)

水平方向受力为

$$F_{\parallel} = \underbrace{(\lambda a)}_{q} uB = (\lambda u)\,B\,a$$

对于回路兰色段 $a$，

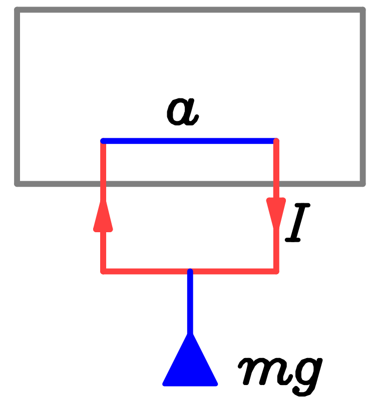
其垂直方向受力为

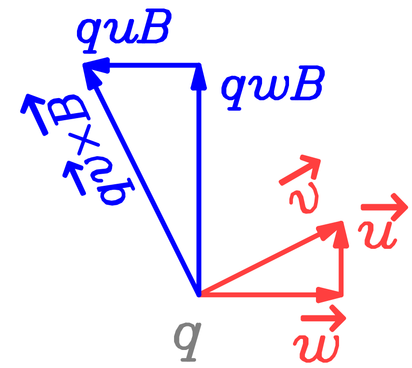
$$F_{\perp} = \underbrace{(\lambda a)}_{q} wB = \underbrace{(\lambda w)}_{I} B\,a = I B\,a$$

(其中 $\lambda$ 为电荷线密度)

水平方向受力为

$$F_{\parallel} = \underbrace{(\lambda a)}_{q} uB = (\lambda u)\,B\,a$$




即回路上升时，回路上的电荷受到额外的水平力 $F_{\parallel} = (\lambda u)\,B\,a$

对于回路兰色段 $a$，

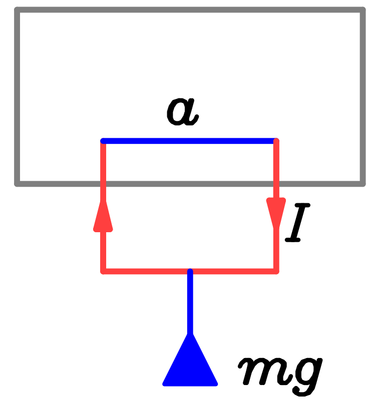
其垂直方向受力为

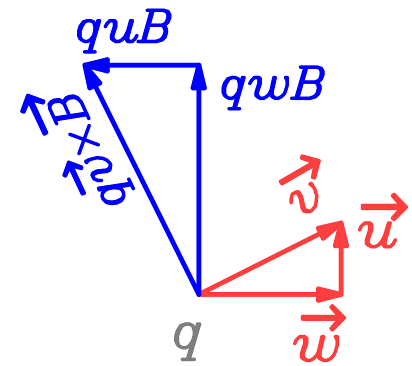
$$F_\perp = \underbrace{(\lambda a)}_{q} wB = \underbrace{(\lambda w)}_{I} B\,a = I B\,a$$

(其中 $\lambda$ 为电荷线密度)

水平方向受力为

$$F_\parallel = \underbrace{(\lambda a)}_{q} uB = (\lambda u)\,B\,a$$

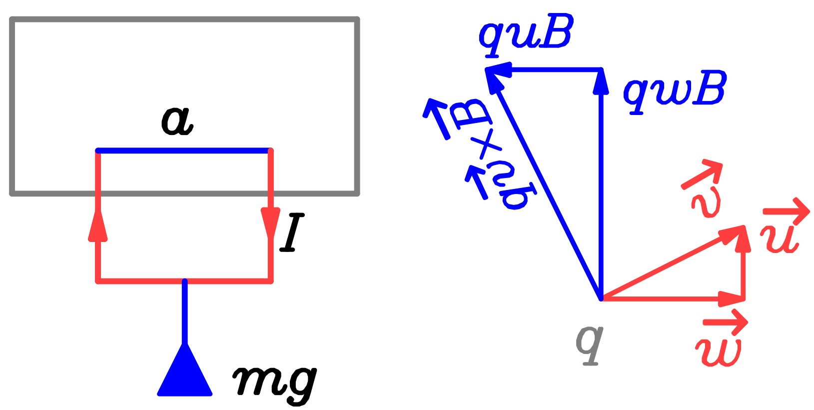



即回路上升时，回路上的电荷受到额外的水平力 $F_\parallel = (\lambda u)\,B\,a$

为保持回路电流 $I$ 恒定，$\mathrm{d}t$ 时间内，回路的外源（如电池）须克服此额外水平力多做功 $W_{ext}$

对于回路兰色段 $a$，




其垂直方向受力为

$$F_\perp = \underbrace{(\lambda a)}_{q} wB = \underbrace{(\lambda w)}_{I} B\,a = I B\,a$$

(其中 $\lambda$ 为电荷线密度)

水平方向受力为

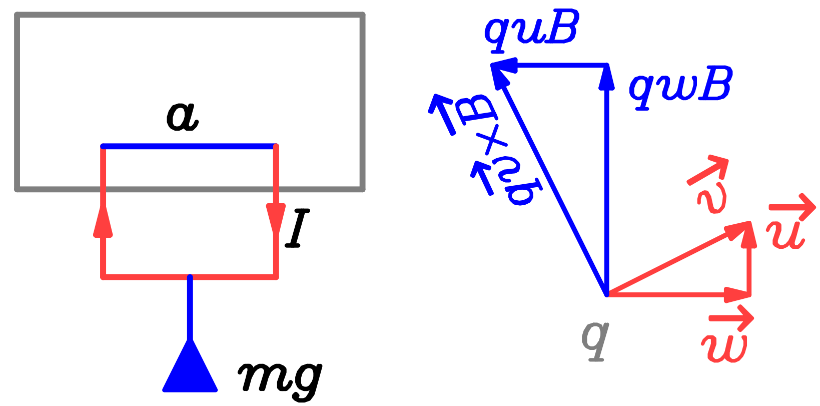
$$F_\parallel = \underbrace{(\lambda a)}_{q} uB = (\lambda u)\,B\,a$$

即回路上升时，回路上的电荷受到额外的水平力 $F_\parallel = (\lambda u)\,B\,a$

为保持回路电流 $I$ 恒定，$\mathrm{d}t$ 时间内，回路的外源（如电池）须克服此额外水平力多做功 $W_{ext}$

保持回路电流 $I$ 恒定，即应保持电荷的水平速度恒为 $w$

对于回路兰色段 $a$，




其垂直方向受力为

$$F_{\perp} = \underbrace{(\lambda a)}_{q} wB = \underbrace{(\lambda w)}_{I} B\, a = I B\, a$$

(其中 $\lambda$ 为电荷线密度)

水平方向受力为

$$F_{\parallel} = \underbrace{(\lambda a)}_{q} uB = (\lambda u)\, B\, a$$

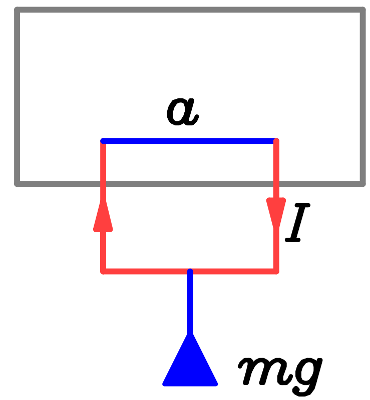
即回路上升时，回路上的电荷受到额外的水平力 $F_{\parallel} = (\lambda u)\, B\, a$

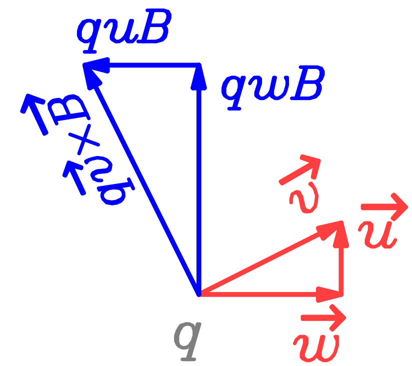
为保持回路电流 $I$ 恒定，$\mathrm{d}t$ 时间内，回路的外源（如电池）须克服此额外水平力多做功 $W_{ext}$

保持回路电流 $I$ 恒定，即应保持电荷的水平速度恒为 $w$

故在 $\mathrm{d}t$ 时间内，电荷水平运动了 $w\,\mathrm{d}t$，外源多做了功 $W_{ext} = F_{\parallel}\, w\,\mathrm{d}t = \lambda u B a w\,\mathrm{d}t$

对于回路兰色段 $a$，




其垂直方向受力为

$$F_\perp = \underbrace{(\lambda a)}_{q} wB = \underbrace{(\lambda w)}_{I} B\, a = I B\, a$$

(其中 $\lambda$ 为电荷线密度)

水平方向受力为

$$F_\parallel = \underbrace{(\lambda a)}_{q} uB = (\lambda u)\, B\, a$$

即回路上升时，回路上的电荷受到额外的水平力 $F_\parallel = (\lambda u)\, B\, a$

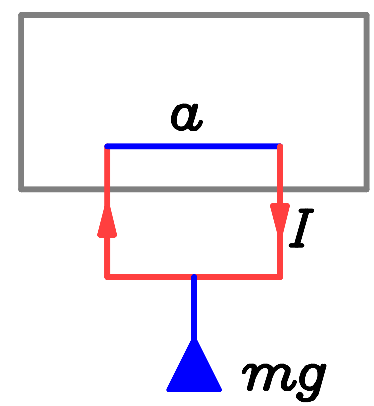
为保持回路电流 $I$ 恒定，$\mathrm{d}t$ 时间内，回路的外源（如电池）须克服此额外水平力多做功 $W_{ext}$

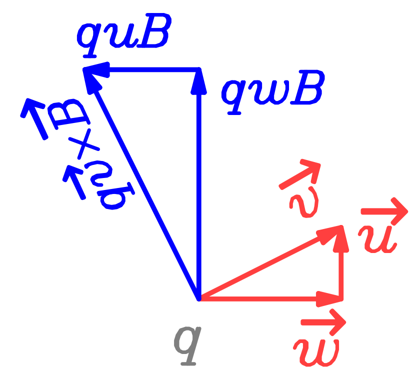
保持回路电流 $I$ 恒定，即应保持电荷的水平速度恒为 $w$

故在 $\mathrm{d}t$ 时间内，电荷水平运动了 $w\,\mathrm{d}t$，外源多做了功 $W_{ext} = F_\parallel\, w\,\mathrm{d}t = \lambda u B a w\,\mathrm{d}t$

$$W_{ext} = F_\parallel\, w\mathrm{d}t = (\lambda u B a)\, w\mathrm{d}t = (\lambda w)\, B\, a\, (u\mathrm{d}t) = \underbrace{I\, B\, a}_{F_\perp}\, \Delta h = F_\perp\, \Delta h$$

对于回路兰色段 $a$，




其垂直方向受力为

$$F_\perp = \underbrace{(\lambda a)}_{q} wB = \underbrace{(\lambda w)}_{I} B\,a = I B\,a$$

(其中 $\lambda$ 为电荷线密度)

水平方向受力为

$$F_\parallel = \underbrace{(\lambda a)}_{q} uB = (\lambda u)\,B\,a$$

即回路上升时，回路上的电荷受到额外的水平力 $F_\parallel = (\lambda u)\,B\,a$

为保持回路电流 $I$ 恒定，$\mathrm{d}t$ 时间内，回路的外源（如电池）须克服此额外水平力多做功 $W_{ext}$

保持回路电流 $I$ 恒定，即应保持电荷的水平速度恒为 $w$

故在 $\mathrm{d}t$ 时间内，电荷水平运动了 $w\,\mathrm{d}t$，外源多做了功 $W_{ext} = F_\parallel\, w\,\mathrm{d}t = \lambda u B a w\,\mathrm{d}t$

$$W_{ext} = F_\parallel\, w\mathrm{d}t = (\lambda u B a)\, w\mathrm{d}t = (\lambda w)\,B\,a\,(u\mathrm{d}t) = \underbrace{I\,B\,a}_{F_\perp}\,\Delta h = F_\perp\,\Delta h$$

即：保持回路电流 $I$ 恒定，回路上升 $\Delta h$，外源作了 $F_\perp\,\Delta h$ 的功，好像是磁力做的功。

对于回路兰色段 $a$，

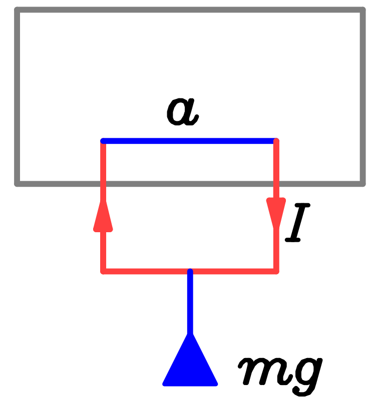
其垂直方向受力为

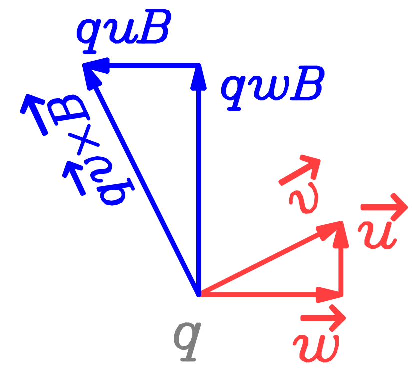
$$F_\perp = \underbrace{(\lambda a)}_{q} wB = \underbrace{(\lambda w)}_{I} B\,a = I B\,a$$

(其中 $\lambda$ 为电荷线密度)

水平方向受力为

$$F_\parallel = \underbrace{(\lambda a)}_{q} uB = (\lambda u)\,B\,a$$




即回路上升时，回路上的电荷受到额外的水平力 $F_\parallel = (\lambda u)\,B\,a$

为保持回路电流 $I$ 恒定，$\mathrm{d}t$ 时间内，回路的外源（如电池）须克服此额外水平力多做功 $W_{ext}$

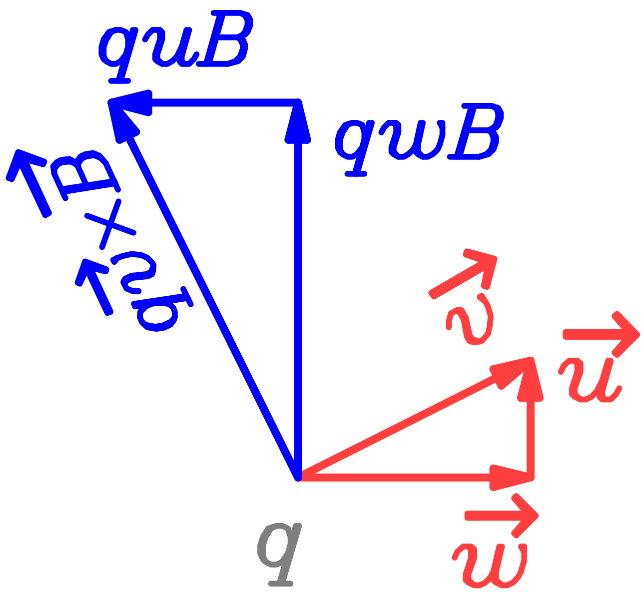
保持回路电流 $I$ 恒定，即应保持电荷的水平速度恒为 $w$

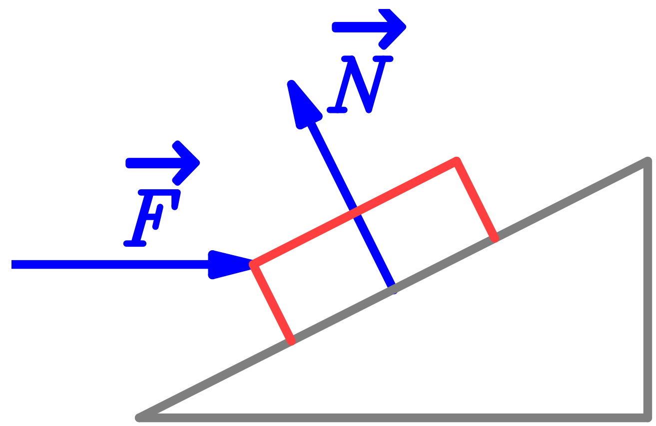
故在 $\mathrm{d}t$ 时间内，电荷水平运动了 $w\,\mathrm{d}t$，外源多做了功 $W_{ext} = F_\parallel\, w\,\mathrm{d}t = \lambda u B a w\,\mathrm{d}t$

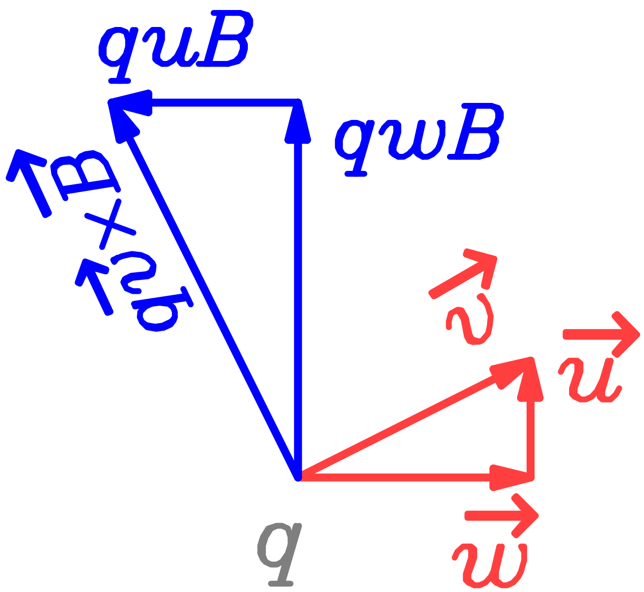
$$W_{ext} = F_\parallel\, w\mathrm{d}t = (\lambda u B a)\, w\mathrm{d}t = (\lambda w)\,B\,a\,(u\mathrm{d}t) = \underbrace{I\,B\,a}_{F_\perp}\,\Delta h = F_\perp\,\Delta h$$

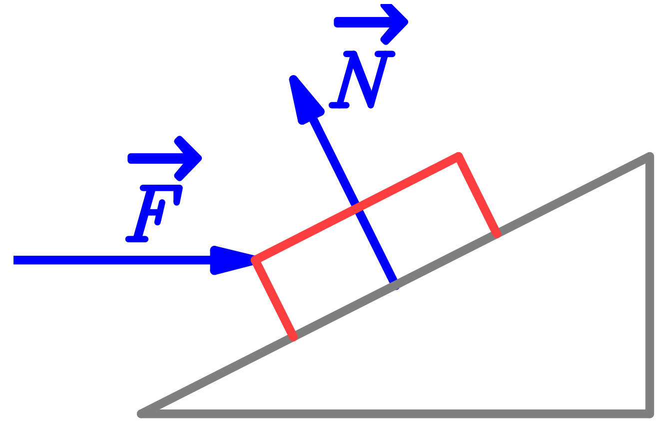
即：保持回路电流 $I$ 恒定，回路上升 $\Delta h$，外源作了 $F_\perp\,\Delta h$ 的功，好像是磁力做的功。

无磁力时回路不会上升，而回路上升又不是因为磁力做功，如何理解？

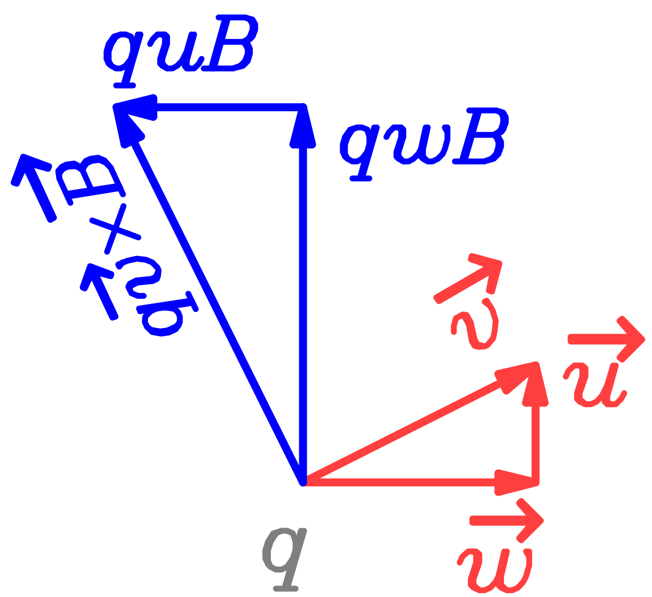

$qu\!B$
$qwB$
$q\vec{u}\times\vec{B}$
$\vec{v}$
$\vec{u}$
$q$
$\vec{w}$

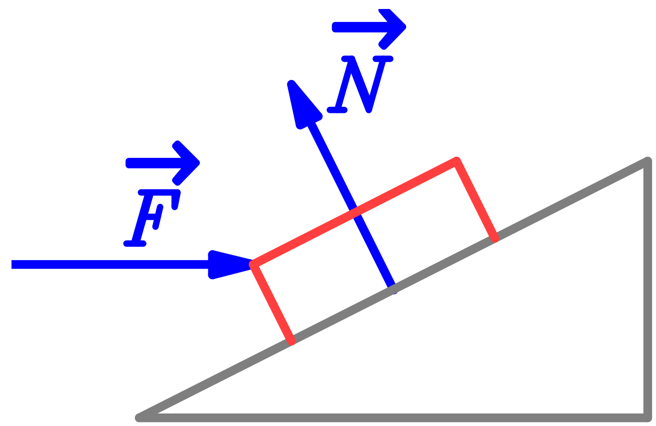

$\vec{N}$
$\vec{F}$



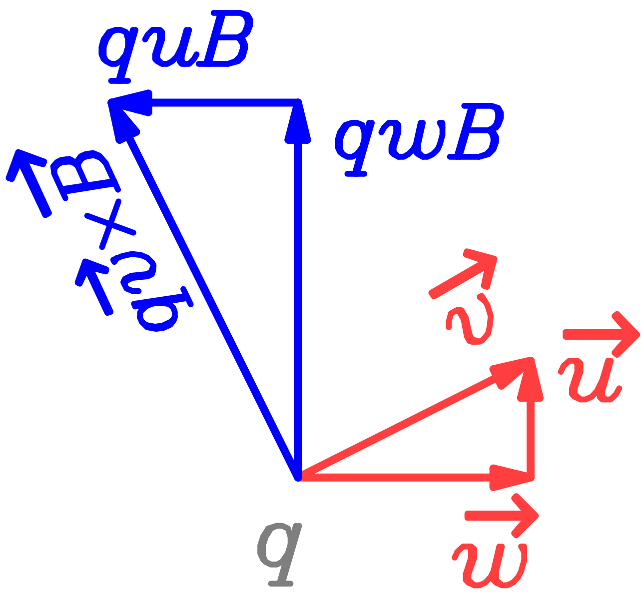

力学中的类比：

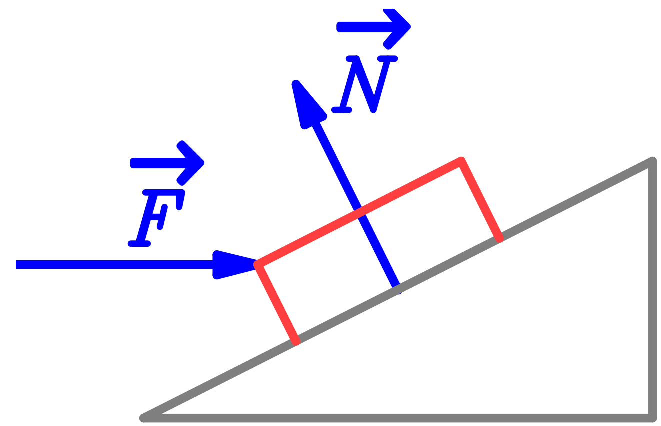



力学中的类比：

右图中，当推力 $\vec{F}$ 使物体沿光滑斜面向上运动时，弹力 $\vec{N}$ 垂直于运动方向，不做功，但是，如果没有弹力，由于推力沿水平方向，物体不可能向上运动。弹力的作用，使合力改变方向。



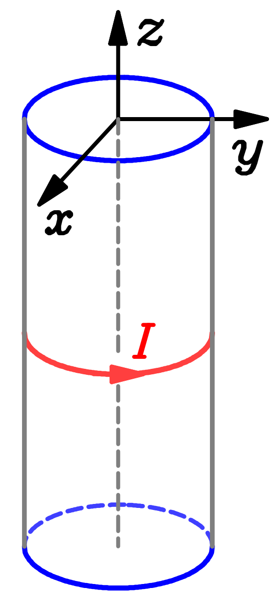

力学中的类比：

右图中，当推力 $\vec{F}$ 使物体沿光滑斜面向上运动时，弹力 $\vec{N}$ 垂直于运动方向，不做功，但是，如果没有弹力，由于推力沿水平方向，物体不可能向上运动。弹力的作用，使合力改变方向。

类似地，磁力不做功，其作用也是改变合力的方向。

例 2：半径为 $a$ 的无限长螺线管，单位长度绕有 $n$ 匝电线，电线上有电流 $I$，求空间的矢势。

例 2：半径为 $a$ 的无限长螺线管，单位长度绕有 $n$ 匝电线，电线上有电流 $I$，求空间的矢势。

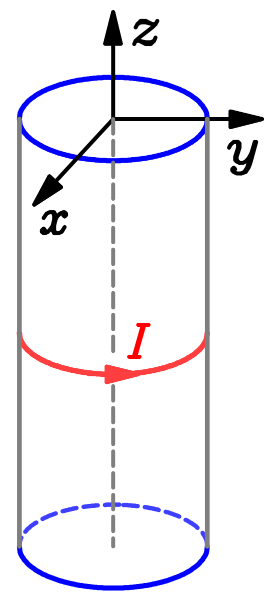



设螺线管轴向沿 $z$，由对称性知，空间磁感应强度

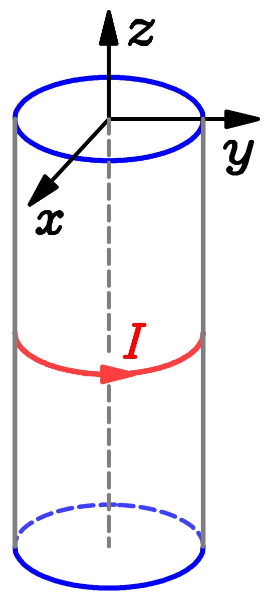
例 2：半径为 $a$ 的无限长螺线管，单位长度绕有 $n$ 匝电线，电线上有电流 $I$，求空间的矢势。

设螺线管轴向沿 $z$，由对称性知，空间磁感应强度

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \begin{cases} \mu_0 n I\, \hat{\boldsymbol{e}}_z & s < a \quad \text{螺线管内} \\ 0 & s > a \quad \text{螺线管外} \quad s = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$



例 2：半径为 $a$ 的无限长螺线管，单位长度绕有 $n$ 匝电线，电线上有电流 $I$，求空间的矢势。

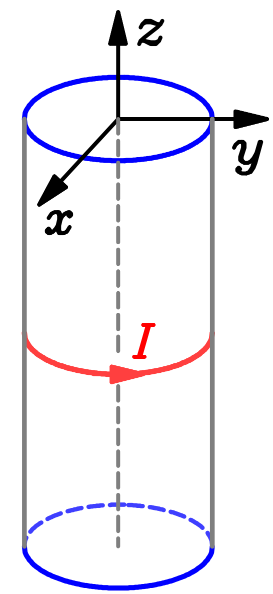



设螺线管轴向沿 $z$，由对称性知，空间磁感应强度

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 n I\,\hat{\boldsymbol{e}}_z & s < a \quad \text{螺线管内} \\ 0 & s > a \quad \text{螺线管外} \end{cases} \qquad s = \sqrt{x^2 + y^2}$$

已知 $\vec{B}$，易求矢势 $\vec{A}$。

例 2：半径为 $a$ 的无限长螺线管，单位长度绕有 $n$ 匝电线，电线上有电流 $I$，求空间的矢势。




设螺线管轴向沿 $z$，由对称性知，空间磁感应强度

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 n I\,\hat{\boldsymbol{e}}_z & s < a \quad \text{螺线管内} \\ 0 & s > a \quad \text{螺线管外} \end{cases} \qquad s = \sqrt{x^2 + y^2}$$

已知 $\vec{B}$，易求矢势 $\vec{A}$。

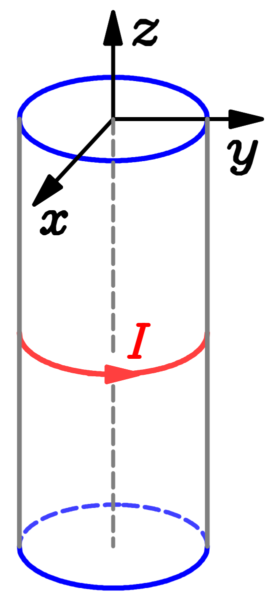
另外，比较方程

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

例 2：半径为 $a$ 的无限长螺线管，单位长度绕有 $n$ 匝电线，电线上有电流 $I$，求空间的矢势。

设螺线管轴向沿 $z$，由对称性知，空间磁感应强度

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 n I\, \hat{\boldsymbol{e}}_z & s < a \quad \text{螺线管内} \\ 0 & s > a \quad \text{螺线管外} \end{cases} \qquad s = \sqrt{x^2 + y^2}$$

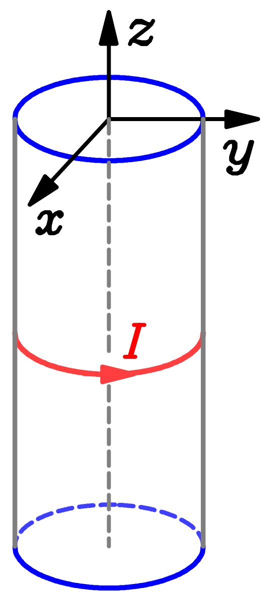



已知 $\vec{B}$，易求矢势 $\vec{A}$。

另外，比较方程

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} &= \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{A} &= 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

例 2：半径为 $a$ 的无限长螺线管，单位长度绕有 $n$ 匝电线，电线上有电流 $I$，求空间的矢势。




设螺线管轴向沿 $z$，由对称性知，空间磁感应强度

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 n I\, \hat{\boldsymbol{e}}_z & s < a \quad \text{螺线管内} \\ 0 & s > a \quad \text{螺线管外} \qquad s = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

已知 $\vec{B}$，易求矢势 $\vec{A}$。

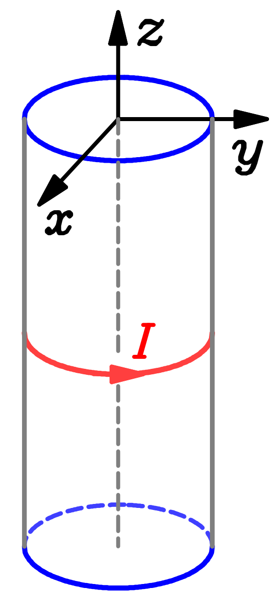
另外，比较方程

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} &= \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{A} &= 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

类似于 $\vec{j}$ 视为 $\vec{B}$ 的源，$\vec{B}$ 可视为 $\vec{A}$ 的源。

例 2：半径为 $a$ 的无限长螺线管，单位长度绕有 $n$ 匝电线，电线上有电流 $I$，求空间的矢势。

设螺线管轴向沿 $z$，由对称性知，空间磁感应强度




$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 n I\, \hat{e}_z & s < a \quad \text{螺线管内} \\ 0 & s > a \quad \text{螺线管外} \qquad s = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

已知 $\vec{B}$，易求矢势 $\vec{A}$。

另外，比较方程 $\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} &= \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{A} &= 0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$

类似于 $\vec{j}$ 视为 $\vec{B}$ 的源，$\vec{B}$ 可视为 $\vec{A}$ 的源。

若知某电流分布 $\vec{j}$ 的 $\vec{B} = \vec{f}(\vec{j})$

则相同分布的 $\vec{B}$ 所对应的 $\vec{A}$ 为：$\vec{A} = \vec{f}(\vec{B}/\mu_0)$。代换：$\vec{j} \Longrightarrow \vec{B}/\mu_0$

一根无限长流有均匀电流的半径为 $a$ 的直导线，有　　取柱坐标 $(s, \phi, z)$

一根无限长流有均匀电流的半径为 $a$ 的直导线，有　　取柱坐标 $(s, \phi, z)$

$$\vec{\boldsymbol{j}} = \left\{ \begin{array}{ll} j_0\, \hat{\boldsymbol{e}}_z & s < a \\ 0 & s > a \end{array} \right\}$$

一根无限长流有均匀电流的半径为 $a$ 的直导线，有　　取柱坐标 $(s, \phi, z)$

$$\vec{\boldsymbol{j}} = \left\{ \begin{array}{ll} j_0 \hat{\boldsymbol{e}}_z & s < a \\ 0 & s > a \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{B}} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 j_0 s}{2} \hat{\boldsymbol{e}}_\phi & s < a \\[2ex] \dfrac{\mu_0 j_0 a^2}{2s} \hat{\boldsymbol{e}}_\phi & s > a \end{cases}$$

一根无限长流有均匀电流的半径为 $a$ 的直导线，有　　取柱坐标 $(s, \phi, z)$

$$\vec{\boldsymbol{j}} = \left\{ \begin{array}{ll} j_0 \,\hat{\boldsymbol{e}}_z & s < a \\ 0 & s > a \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{B}} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 j_0 s}{2}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi & s < a \\ \dfrac{\mu_0 j_0 a^2}{2s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi & s > a \end{cases}$$

变换：$\vec{\boldsymbol{j}} \Longrightarrow \vec{\boldsymbol{B}}/\mu_0$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \left\{ \begin{array}{ll} B_0 \,\hat{\boldsymbol{e}}_z & s < a \\ 0 & s > a \end{array} \right\}$$

一根无限长流有均匀电流的半径为 $a$ 的直导线，有　　取柱坐标 $(s, \phi, z)$

$$\vec{j} = \left\{ \begin{array}{ll} j_0\,\hat{e}_z & s < a \\ 0 & s > a \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad \vec{B} = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\mu_0 j_0 s}{2}\,\hat{e}_\phi & s < a \\ \dfrac{\mu_0 j_0 a^2}{2s}\,\hat{e}_\phi & s > a \end{array} \right.$$

变换：$\vec{j} \Longrightarrow \vec{B}/\mu_0$

$$\vec{B} = \left\{ \begin{array}{ll} B_0\,\hat{e}_z & s < a \\ 0 & s > a \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad \vec{A} = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{B_0 s}{2}\,\hat{e}_\phi = \dfrac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r} & s < a \\ \dfrac{B_0 a^2}{2s}\,\hat{e}_\phi & s > a \end{array} \right.$$

一根无限长流有均匀电流的半径为 $a$ 的直导线，有　　取柱坐标 $(s, \phi, z)$

$$\vec{j} = \left\{ \begin{array}{ll} j_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z & s < a \\ 0 & s > a \end{array} \right\} \Longrightarrow \vec{B} = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\mu_0 j_0 s}{2}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi & s < a \\ \dfrac{\mu_0 j_0 a^2}{2s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi & s > a \end{array} \right.$$

变换：$\vec{j} \Longrightarrow \vec{B}/\mu_0$

$$\vec{B} = \left\{ \begin{array}{ll} B_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z & s < a \\ 0 & s > a \end{array} \right\} \Longrightarrow \vec{A} = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{B_0 s}{2}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \dfrac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r} & s < a \\ \dfrac{B_0 a^2}{2s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi & s > a \end{array} \right.$$

管内为均匀磁场，故均匀磁场 $\vec{B} = B_0\,\hat{e}_z$ 的矢势 $\vec{A}$ 可表为

一根无限长流有均匀电流的半径为 $a$ 的直导线，有　取柱坐标 $(s, \phi, z)$

$$\vec{j} = \left\{ \begin{array}{ll} j_0\,\hat{e}_z & s < a \\ 0 & s > a \end{array} \right\} \Longrightarrow \vec{B} = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\mu_0 j_0 s}{2}\,\hat{e}_\phi & s < a \\ \dfrac{\mu_0 j_0 a^2}{2s}\,\hat{e}_\phi & s > a \end{array} \right.$$

变换：$\vec{j} \Longrightarrow \vec{B}/\mu_0$

$$\vec{B} = \left\{ \begin{array}{ll} B_0\,\hat{e}_z & s < a \\ 0 & s > a \end{array} \right\} \Longrightarrow \vec{A} = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{B_0 s}{2}\,\hat{e}_\phi = \dfrac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r} & s < a \\ \dfrac{B_0 a^2}{2s}\,\hat{e}_\phi & s > a \end{array} \right.$$

管内为均匀磁场，故均匀磁场 $\vec{B} = B_0\,\hat{e}_z$ 的矢势 $\vec{A}$ 可表为

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$$

一根无限长流有均匀电流的半径为 $a$ 的直导线，有　　取柱坐标 $(s, \phi, z)$

$$\vec{j} = \left\{ \begin{array}{ll} j_0\,\hat{e}_z & s < a \\ 0 & s > a \end{array} \right\} \Longrightarrow \vec{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 j_0 s}{2}\,\hat{e}_\phi & s < a \\ \dfrac{\mu_0 j_0 a^2}{2s}\,\hat{e}_\phi & s > a \end{cases}$$

变换：$\vec{j} \Longrightarrow \vec{B}/\mu_0$

$$\vec{B} = \left\{ \begin{array}{ll} B_0\,\hat{e}_z & s < a \\ 0 & s > a \end{array} \right\} \Longrightarrow \vec{A} = \begin{cases} \dfrac{B_0 s}{2}\,\hat{e}_\phi = \dfrac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r} & s < a \\ \dfrac{B_0 a^2}{2s}\,\hat{e}_\phi & s > a \end{cases}$$

管内为均匀磁场，故均匀磁场 $\vec{B} = B_0\,\hat{e}_z$ 的矢势 $\vec{A}$ 可表为

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$$

验证：

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{2}\nabla \times (\vec{B} \times \vec{r}) = \frac{1}{2}\left[\vec{B}(\nabla \cdot \vec{r}) - (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{r}\right] = \frac{1}{2}\left[3\vec{B} - \vec{B} \cdot (\nabla \vec{r})\right] = \vec{B}$$