§4.2 静磁场的矢势及其微分方程和边值关系

§4.2 静磁场的矢势及其微分方程和边值关系

一、几种简单电流分布的静磁场

§4.2 静磁场的矢势及其微分方程和边值关系

一、几种简单电流分布的静磁场

稳定电流产生静磁场：

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}') \times \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

§4.2 静磁场的矢势及其微分方程和边值关系

一、几种简单电流分布的静磁场

稳定电流产生静磁场：

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

其中：$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$

§ 4.2 静磁场的矢势及其微分方程和边值关系

一、几种简单电流分布的静磁场

稳定电流产生静磁场：

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

其中：$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$

$$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau'$$

§ 4.2 静磁场的矢势及其微分方程和边值关系

一、几种简单电流分布的静磁场

稳定电流产生静磁场：

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

其中：$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$

$$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau'$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla \times A(\vec{\boldsymbol{r}})$$

§ 4.2 静磁场的矢势及其微分方程和边值关系

一、几种简单电流分布的静磁场

稳定电流产生静磁场：

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{R}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

其中：$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times A(\vec{r})$$

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0\, I_{\text{enc}}$$

§ 4.2 静磁场的矢势及其微分方程和边值关系

一、几种简单电流分布的静磁场

稳定电流产生静磁场：

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}') \times \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

其中：$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'$

$$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\,\mathrm{d}\tau'$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla \times A(\vec{\boldsymbol{r}})$$

$$\oint \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \mu_0 I_{\mathrm{enc}}$$

例 1：求面电流密度为 $\vec{\alpha}$ 的无穷大平面在空间产生的磁场。

比较：面电荷密度为 σ_q 的无穷大平面在空间产生的电场。

§ 4.2 静磁场的矢势及其微分方程和边值关系

一、几种简单电流分布的静磁场

稳定电流产生静磁场：

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}') \times \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

其中：$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'$

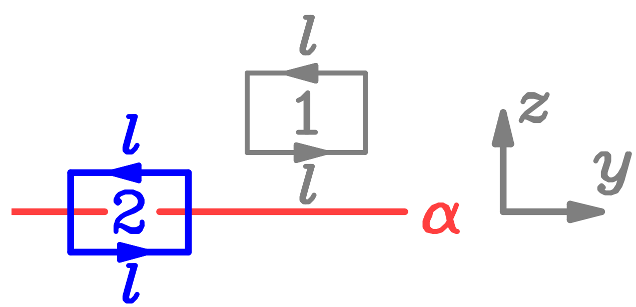
$$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\,\mathrm{d}\tau'$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla \times A(\vec{\boldsymbol{r}})$$

$$\oint \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

例 1：求面电流密度为 $\vec{\alpha}$ 的无穷大平面在空间产生的磁场。

比较：面电荷密度为 σ_q 的无穷大平面在空间产生的电场。



§ 4.2 静磁场的矢势及其微分方程和边值关系

一、几种简单电流分布的静磁场

稳定电流产生静磁场：

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{R}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

其中：$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau'$$

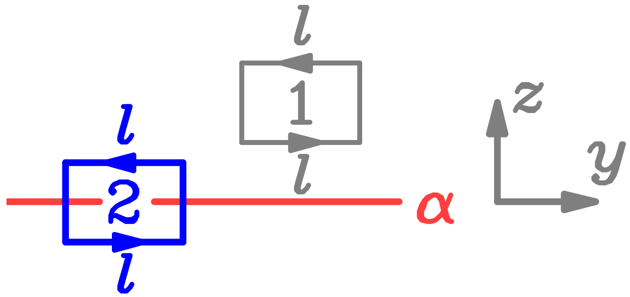
$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times A(\vec{r})$$

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0\, I_{\text{enc}}$$

例 1：求面电流密度为 $\vec{\alpha}$ 的无穷大平面在空间产生的磁场。

比较：面电荷密度为 σ_q 的无穷大平面在空间产生的电场。

设平面为 xy 平面，$\vec{\alpha}$ 沿 $\hat{e}_x$ 方向：$\vec{\alpha} = \alpha\,\hat{e}_x$



§ 4.2 静磁场的矢势及其微分方程和边值关系

一、几种简单电流分布的静磁场

稳定电流产生静磁场：

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

其中：$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$

$$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau'$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla \times A(\vec{\boldsymbol{r}})$$

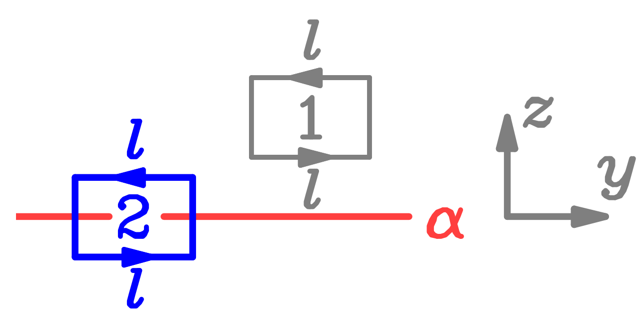
$$\oint \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \mu_0\, I_{\text{enc}}$$

例 1：求面电流密度为 $\vec{\alpha}$ 的无穷大平面在空间产生的磁场。

比较：面电荷密度为 σ_q 的无穷大平面在空间产生的电场。

设平面为 xy 平面，$\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ 沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_x$ 方向：$\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \alpha\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$

对面电流：$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \frac{\vec{\boldsymbol{\alpha}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\,\mathrm{d}\sigma'$



§ 4.2 静磁场的矢势及其微分方程和边值关系

一、几种简单电流分布的静磁场

稳定电流产生静磁场：

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

其中：$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$

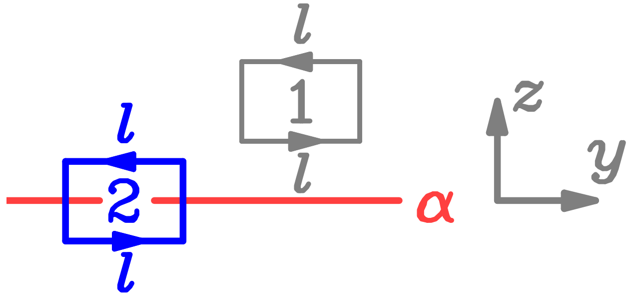
$$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau'$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla \times A(\vec{\boldsymbol{r}})$$

$$\oint \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \mu_0\, I_{\mathrm{enc}}$$

例 1：求面电流密度为 $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ 的无穷大平面在空间产生的磁场。

比较：面电荷密度为 σ_q 的无穷大平面在空间产生的电场。



设平面为 xy 平面，$\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ 沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_x$ 方向：$\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \alpha\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$

对面电流：$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \frac{\vec{\boldsymbol{\alpha}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\,\mathrm{d}\sigma'$

$\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ 沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_x$ 方向，故 $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_x$ 方向。

§ 4.2 静磁场的矢势及其微分方程和边值关系

一、几种简单电流分布的静磁场

稳定电流产生静磁场：

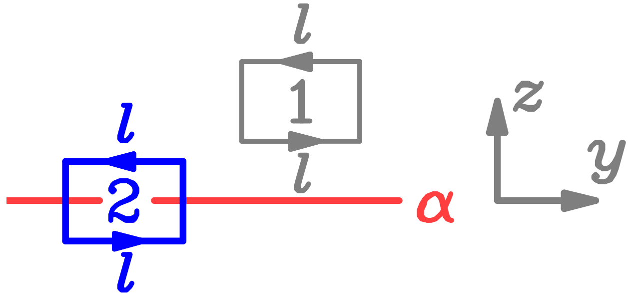
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{R}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau' \qquad \text{其中：} \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau' \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times A(\vec{r})$$

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0\, I_{\text{enc}}$$

例 1：求面电流密度为 $\vec{\alpha}$ 的无穷大平面在空间产生的磁场。

比较：面电荷密度为 σ_q 的无穷大平面在空间产生的电场。



设平面为 xy 平面，$\vec{\alpha}$ 沿 $\hat{e}_x$ 方向：$\vec{\alpha} = \alpha\,\hat{e}_x$

对面电流：$\vec{A}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \frac{\vec{\alpha}(\vec{r}\,')}{R}\,\mathrm{d}\sigma'$

$\vec{\alpha}$ 沿 $\hat{e}_x$ 方向，故 $\vec{A}(\vec{r})$ 沿 $\hat{e}_x$ 方向。$\vec{A}(\vec{r}) = A(\vec{r})\,\hat{e}_x$

§4.2 静磁场的矢势及其微分方程和边值关系

一、几种简单电流分布的静磁场

稳定电流产生静磁场：

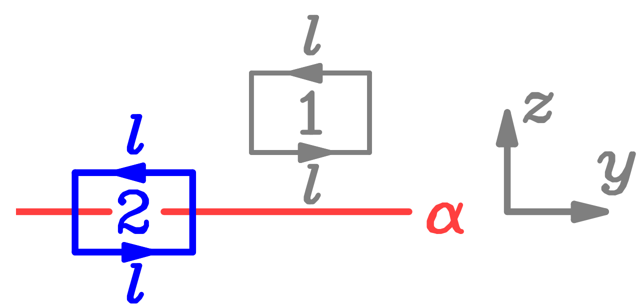
$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau' \qquad \text{其中：}\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$$

$$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau' \qquad \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla\times A(\vec{\boldsymbol{r}})$$

$$\oint \vec{\boldsymbol{B}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \mu_0\, I_{\text{enc}}$$

例 1：求面电流密度为 $\vec{\alpha}$ 的无穷大平面在空间产生的磁场。

比较：面电荷密度为 σ_q 的无穷大平面在空间产生的电场。



设平面为 xy 平面，$\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ 沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_x$ 方向：$\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \alpha\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$

对面电流：$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \frac{\vec{\boldsymbol{\alpha}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\,\mathrm{d}\sigma'$

$\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ 沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_x$ 方向，故 $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_x$ 方向。$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = A(\vec{\boldsymbol{r}})\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$

$\hat{\boldsymbol{e}}_x$，$\hat{\boldsymbol{e}}_y$ 方向都是无穷大，故由对称性知 $A(\vec{\boldsymbol{r}})$ 只与 z 有关

§ 4.2 静磁场的矢势及其微分方程和边值关系

一、几种简单电流分布的静磁场

稳定电流产生静磁场：

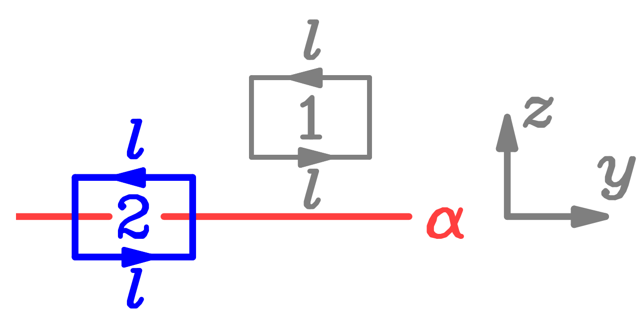
$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \times \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau' \qquad \text{其中：} \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$$

$$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau' \qquad \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla \times A(\vec{\boldsymbol{r}})$$

$$\oint \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \mu_0\, I_{\text{enc}}$$

例 1：求面电流密度为 $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ 的无穷大平面在空间产生的磁场。

比较：面电荷密度为 σ_q 的无穷大平面在空间产生的电场。



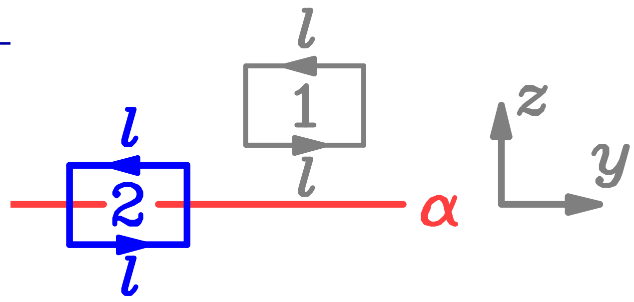
设平面为 xy 平面，$\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ 沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_x$ 方向：$\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \alpha\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$

对面电流：$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \frac{\vec{\boldsymbol{\alpha}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\,\mathrm{d}\sigma'$

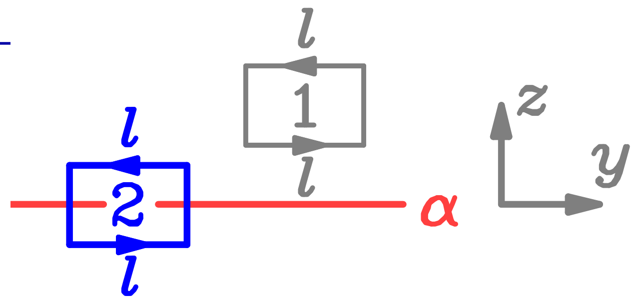
$\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ 沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_x$ 方向，故 $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_x$ 方向。$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = A(\vec{\boldsymbol{r}})\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$

$\hat{\boldsymbol{e}}_x$，$\hat{\boldsymbol{e}}_y$ 方向都是无穷大，故由对称性知 $A(\vec{\boldsymbol{r}})$ 只与 z 有关　$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = A(z)\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$

Let there be light

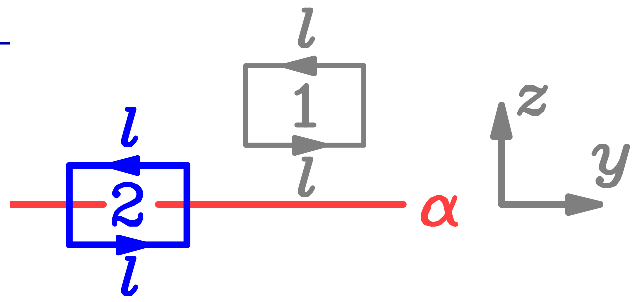


Let there be light



$$\vec{A}(\vec{r}) = A(z)\,\hat{e}_x,$$

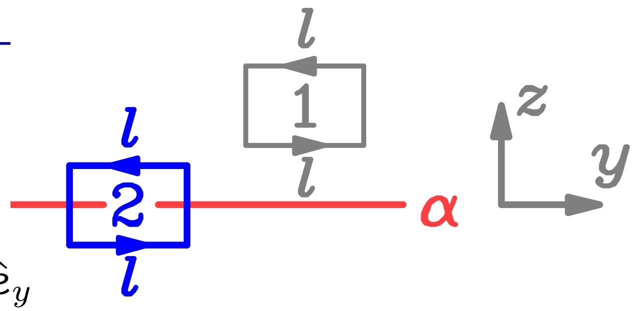
Let there be light



$$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = A(z)\,\hat{\boldsymbol{e}}_x,$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_x & \hat{\boldsymbol{e}}_y & \hat{\boldsymbol{e}}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A(z) & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

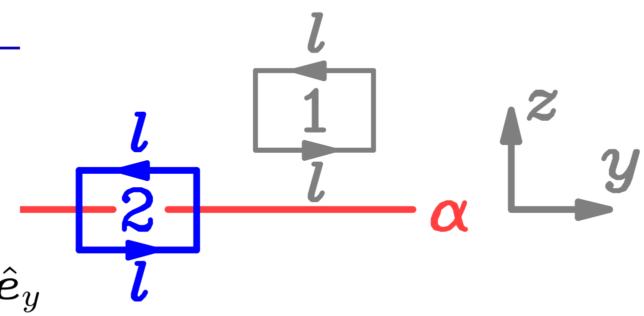
Let there be light



$$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = A(z)\,\hat{\boldsymbol{e}}_x,$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \nabla\times\vec{\boldsymbol{A}} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_x & \hat{\boldsymbol{e}}_y & \hat{\boldsymbol{e}}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial A(z)}{\partial z}\,\hat{\boldsymbol{e}}_y = B(z)\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

Let there be light

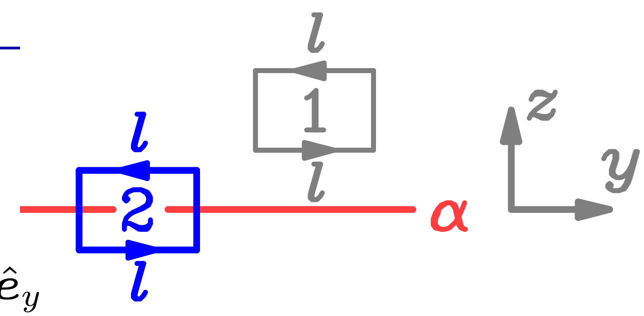


$$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = A(z)\,\hat{\boldsymbol{e}}_x,$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \nabla\times\vec{\boldsymbol{A}} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_x & \hat{\boldsymbol{e}}_y & \hat{\boldsymbol{e}}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial A(z)}{\partial z}\,\hat{\boldsymbol{e}}_y = B(z)\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

对回路 1 应用安培环路定律 $\oint \vec{\boldsymbol{B}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \mu_0\, I_{\text{enc}}$ 得：$B(z) = B_0$　　(B_0 与 z 无关)

Let there be light



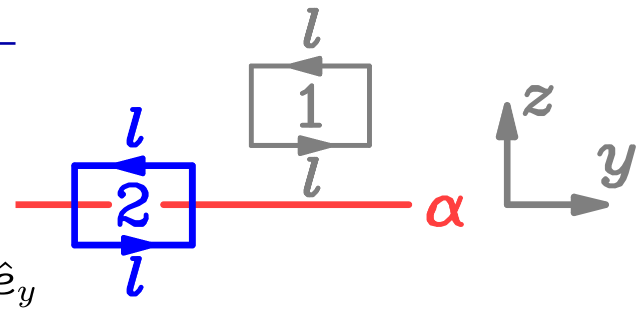
$$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = A(z)\,\hat{\boldsymbol{e}}_x,$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \nabla\times\vec{\boldsymbol{A}} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_x & \hat{\boldsymbol{e}}_y & \hat{\boldsymbol{e}}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial A(z)}{\partial z}\,\hat{\boldsymbol{e}}_y = B(z)\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

对回路 1 应用安培环路定律 $\oint \vec{\boldsymbol{B}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \mu_0\, I_{\text{enc}}$ 得：$B(z) = B_0$　　(B_0 与 z 无关)

对回路 2 应用安培环路定律 $\oint \vec{\boldsymbol{B}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \mu_0\, I_{\text{enc}}$ 得：$2Bl = \mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0 \alpha l$

Let there be light



$$\vec{A}(\vec{r}) = A(z)\,\hat{e}_x,$$

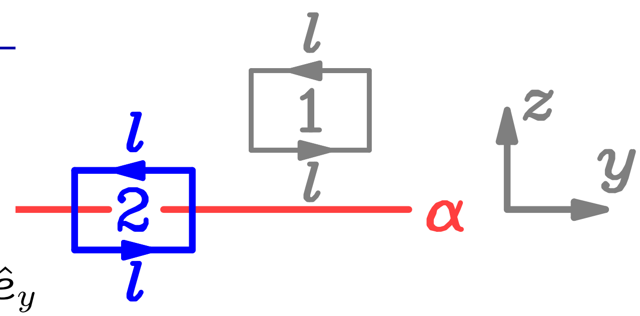
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial A(z)}{\partial z}\,\hat{e}_y = B(z)\,\hat{e}_y$$

对回路 1 应用安培环路定律 $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0\, I_{\text{enc}}$ 得：$B(z) = B_0$　　(B_0 与 z 无关)

对回路 2 应用安培环路定律 $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0\, I_{\text{enc}}$ 得：$2Bl = \mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0 \alpha l$

从而：$\vec{B} = \begin{cases} +\dfrac{1}{2}\mu_0\alpha\,\hat{e}_y & \text{for } z<0 \\ -\dfrac{1}{2}\mu_0\alpha\,\hat{e}_y & \text{for } z>0 \end{cases}$

Let there be light



$$\vec{A}(\vec{r}) = A(z)\,\hat{e}_x,$$

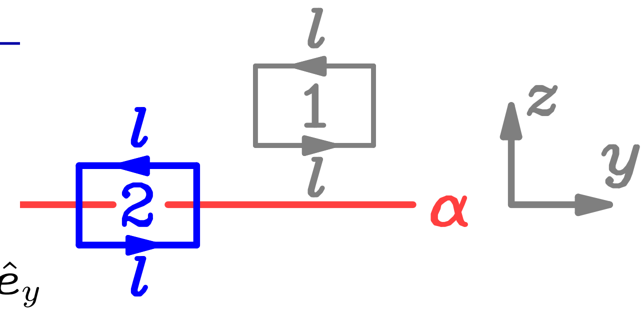
$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial A(z)}{\partial z}\,\hat{e}_y = B(z)\,\hat{e}_y$$

对回路 1 应用安培环路定律 $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0\, I_{\mathrm{enc}}$ 得：$B(z) = B_0$ 　　(B_0 与 z 无关)

对回路 2 应用安培环路定律 $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0\, I_{\mathrm{enc}}$ 得：$2Bl = \mu_0 I_{\mathrm{enc}} = \mu_0\alpha l$

从而：$\vec{B} = \begin{cases} +\dfrac{1}{2}\mu_0\alpha\,\hat{e}_y & \text{for } z<0 \\ -\dfrac{1}{2}\mu_0\alpha\,\hat{e}_y & \text{for } z>0 \end{cases}$ 　　比较：$\vec{E} = \begin{cases} +\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\epsilon_0}\sigma_q\,\hat{e}_z & \text{for } z<0 \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\epsilon_0}\sigma_q\,\hat{e}_z & \text{for } z>0 \end{cases}$

Let there be light



$$\vec{A}(\vec{r}) = A(z)\,\hat{e}_x,$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial A(z)}{\partial z}\,\hat{e}_y = B(z)\,\hat{e}_y$$

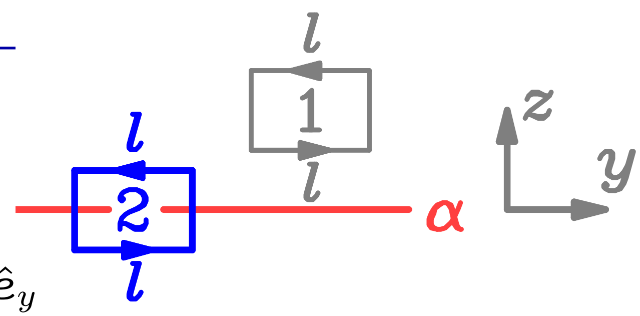
对回路 1 应用安培环路定律 $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0\, I_{\text{enc}}$ 得：$B(z) = B_0$ $\quad$ (B_0 与 z 无关)

对回路 2 应用安培环路定律 $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0\, I_{\text{enc}}$ 得：$2Bl = \mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0 \alpha l$

从而：$\vec{B} = \begin{cases} +\dfrac{1}{2}\mu_0\alpha\,\hat{e}_y & \text{for } z<0 \\ -\dfrac{1}{2}\mu_0\alpha\,\hat{e}_y & \text{for } z>0 \end{cases}$ $\qquad$ 比较：$\vec{E} = \begin{cases} +\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\epsilon_0}\sigma_q\,\hat{e}_z & \text{for } z<0 \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\epsilon_0}\sigma_q\,\hat{e}_z & \text{for } z>0 \end{cases}$

例 2：两平行无穷大平板，均匀带电$\pm\sigma_q$，以速度 $\vec{v} = v\,\hat{e}_x$ 运动，求(1) 空间磁场；(2) 作用于上平板单位面积的磁力；(3) 当速度多大时，磁力等于电力。

Let there be light



$$\vec{A}(\vec{r}) = A(z)\,\hat{e}_x,$$

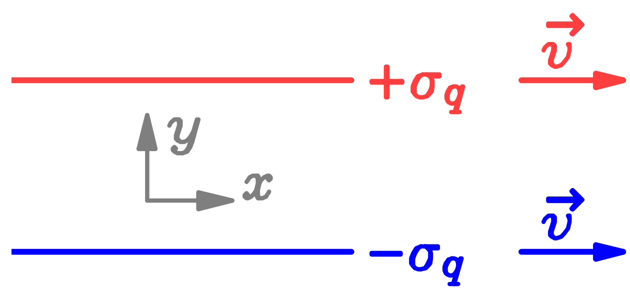
$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial A(z)}{\partial z}\,\hat{e}_y = B(z)\,\hat{e}_y$$

对回路 1 应用安培环路定律 $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}$ 得：$B(z) = B_0$　　(B_0 与 z 无关)

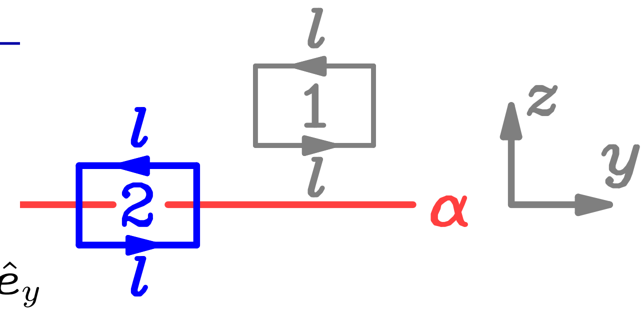
对回路 2 应用安培环路定律 $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}$ 得：$2Bl = \mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0\alpha l$

从而：$\vec{B} = \begin{cases} +\dfrac{1}{2}\mu_0\alpha\,\hat{e}_y & \text{for } z<0 \\ -\dfrac{1}{2}\mu_0\alpha\,\hat{e}_y & \text{for } z>0 \end{cases}$　　比较：$\vec{E} = \begin{cases} +\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\epsilon_0}\sigma_q\,\hat{e}_z & \text{for } z<0 \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\epsilon_0}\sigma_q\,\hat{e}_z & \text{for } z>0 \end{cases}$

例 2：两平行无穷大平板，均匀带电$\pm\sigma_q$，以速度 $\vec{v} = v\,\hat{e}_x$ 运动，求(1) 空间磁场；(2) 作用于上平板单位面积的磁力；(3) 当速度多大时，磁力等于电力。



Let there be light



$\vec{A}(\vec{r}) = A(z)\,\hat{e}_x,$

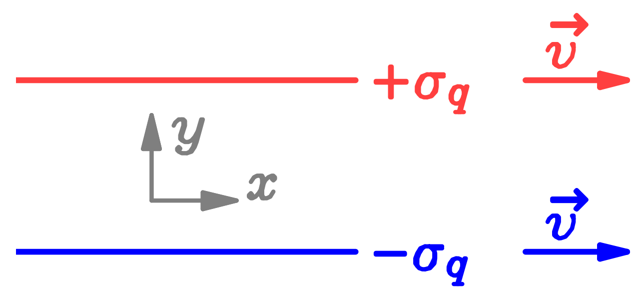
$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial A(z)}{\partial z}\,\hat{e}_y = B(z)\,\hat{e}_y$$

对回路 1 应用安培环路定律 $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0\, I_{\text{enc}}$ 得：$B(z) = B_0$ （B_0 与 z 无关）

对回路 2 应用安培环路定律 $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0\, I_{\text{enc}}$ 得：$2Bl = \mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0\alpha l$

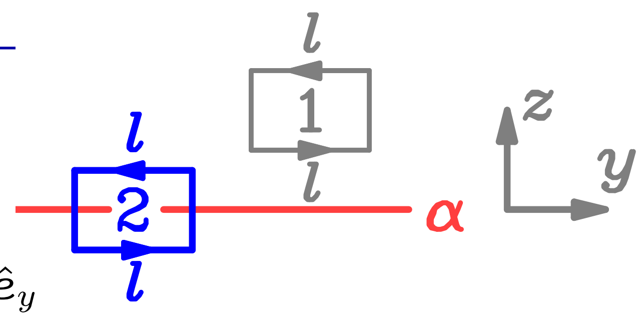
从而：$\vec{B} = \begin{cases} +\dfrac{1}{2}\,\mu_0\alpha\,\hat{e}_y & \text{for } z<0 \\ -\dfrac{1}{2}\,\mu_0\alpha\,\hat{e}_y & \text{for } z>0 \end{cases}$　　比较：$\vec{E} = \begin{cases} +\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\epsilon_0}\,\sigma_q\,\hat{e}_z & \text{for } z<0 \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\epsilon_0}\,\sigma_q\,\hat{e}_z & \text{for } z>0 \end{cases}$

例 2：两平行无穷大平板，均匀带电$\pm\sigma_q$，以速度 $\vec{v} = v\,\hat{e}_x$ 运动，求(1) 空间磁场；(2) 作用于上平板单位面积的磁力；(3) 当速度多大时，磁力等于电力。



(1)　由例题 1 知，两板之间，上下两平板产生的磁场相加，空间其余部分，两板的磁场相消

Let there be light



$$\vec{A}(\vec{r}) = A(z)\,\hat{e}_x,$$

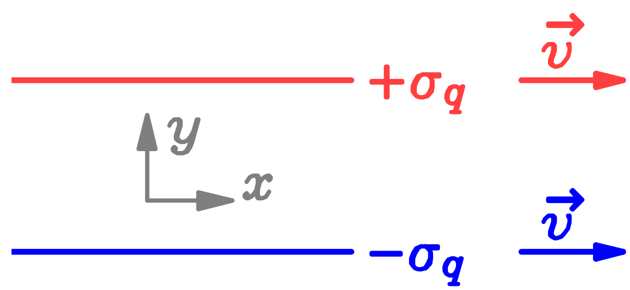
$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial A(z)}{\partial z}\,\hat{e}_y = B(z)\,\hat{e}_y$$

对回路 1 应用安培环路定律 $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0\, I_{\text{enc}}$ 得：$B(z) = B_0$ （B_0 与 z 无关）

对回路 2 应用安培环路定律 $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0\, I_{\text{enc}}$ 得：$2Bl = \mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0 \alpha l$

从而：$\vec{B} = \begin{cases} +\dfrac{1}{2}\mu_0\alpha\,\hat{e}_y & \text{for } z<0 \\ -\dfrac{1}{2}\mu_0\alpha\,\hat{e}_y & \text{for } z>0 \end{cases}$ 比较：$\vec{E} = \begin{cases} +\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\epsilon_0}\sigma_q\,\hat{e}_z & \text{for } z<0 \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\epsilon_0}\sigma_q\,\hat{e}_z & \text{for } z>0 \end{cases}$

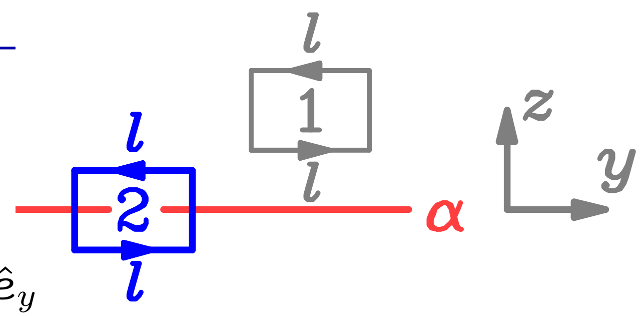
例 2：两平行无穷大平板，均匀带电$\pm\sigma_q$，以速度 $\vec{v} = v\,\hat{e}_x$ 运动，求(1) 空间磁场；(2) 作用于上平板单位面积的磁力；(3) 当速度多大时，磁力等于电力。



(1) 由例题 1 知，两板之间，上下两平板产生的磁场相加，空间其余部分，两板的磁场相消

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0\,\sigma_q\,v\,(-\,\hat{e}_z) & \text{两板之间} \\ 0 & \text{其余部分} \end{cases}$$

Let there be light



$$\vec{A}(\vec{r}) = A(z)\,\hat{e}_x,$$

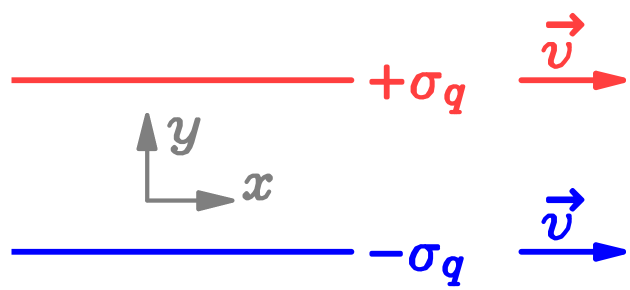
$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial A(z)}{\partial z}\,\hat{e}_y = B(z)\,\hat{e}_y$$

对回路 1 应用安培环路定律 $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0\, I_{\text{enc}}$ 得：$B(z) = B_0$ （B_0 与 z 无关）

对回路 2 应用安培环路定律 $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0\, I_{\text{enc}}$ 得：$2Bl = \mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0\alpha l$

从而：$\vec{B} = \begin{cases} +\dfrac{1}{2}\mu_0\alpha\,\hat{e}_y & \text{for } z<0 \\ -\dfrac{1}{2}\mu_0\alpha\,\hat{e}_y & \text{for } z>0 \end{cases}$ 比较：$\vec{E} = \begin{cases} +\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\epsilon_0}\sigma_q\,\hat{e}_z & \text{for } z<0 \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\epsilon_0}\sigma_q\,\hat{e}_z & \text{for } z>0 \end{cases}$

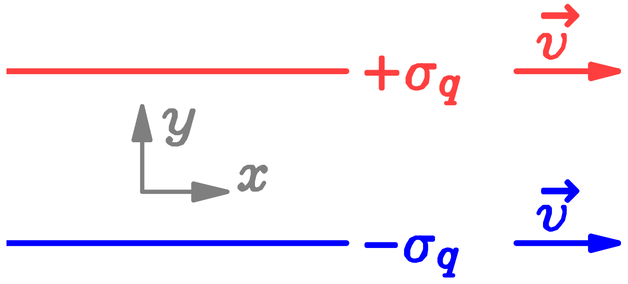
例 2：两平行无穷大平板，均匀带电$\pm\sigma_q$，以速度 $\vec{v} = v\,\hat{e}_x$ 运动，求(1) 空间磁场；(2) 作用于上平板单位面积的磁力；(3) 当速度多大时，磁力等于电力。

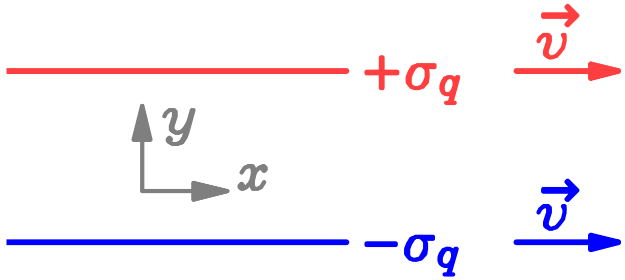


(1) 由例题 1 知，两板之间，上下两平板产生的磁场相加，空间其余部分，两板的磁场相消

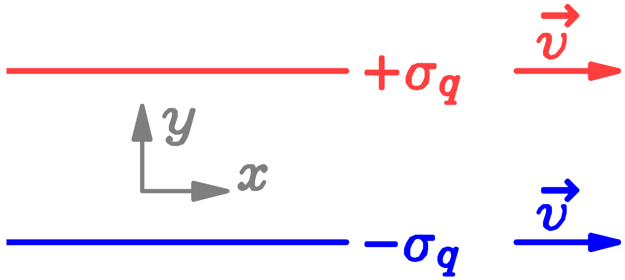
$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0\,\sigma_q\,v\,(-\hat{e}_z) & \text{两板之间} \\ 0 & \text{其余部分} \end{cases} \qquad \alpha = \sigma_q\,v$$

Let there be light





(2) 下平板产生的磁场：$\vec{\boldsymbol{B}}_2 = \frac{1}{2}\mu_0\,\sigma_q\,v\,(-\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$

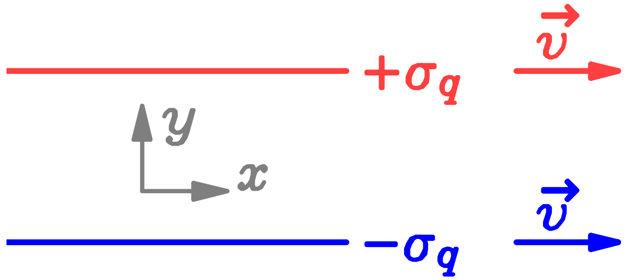


(2) 下平板产生的磁场：$\vec{B}_2 = \frac{1}{2}\mu_0\,\sigma_q\,v\,(-\,\hat{e}_z)$

上平板受到的磁力：$\mathrm{d}\vec{F} = \vec{\alpha}\,\mathrm{d}\sigma \times \vec{B}_2$

$$= \sigma_q v\,\hat{e}_x\,\mathrm{d}\sigma \times \frac{1}{2}\mu_0\,\sigma_q\,v\,(-\,\hat{e}_z)$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0\sigma_q^2 v^2\,\hat{e}_y\,\mathrm{d}\sigma$$



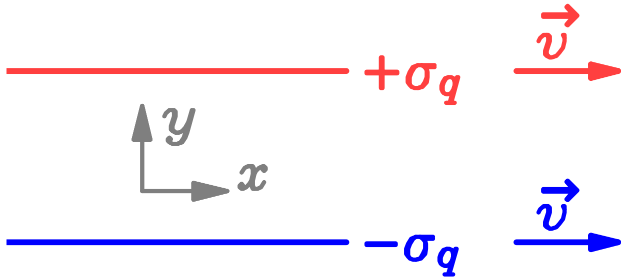
(2) 下平板产生的磁场：$\vec{B}_2 = \frac{1}{2}\mu_0\, \sigma_q\, v\, (-\, \hat{e}_z)$

上平板受到的磁力：$\mathrm{d}\vec{F} = \vec{\alpha}\, \mathrm{d}\sigma \times \vec{B}_2$

$$= \sigma_q v\, \hat{e}_x\, \mathrm{d}\sigma \times \frac{1}{2}\mu_0\, \sigma_q\, v\, (-\, \hat{e}_z)$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 \sigma_q^2 v^2\, \hat{e}_y\, \mathrm{d}\sigma$$

上平板单位面积受到的磁力：$\vec{f}_m = \dfrac{1}{2}\mu_0 \sigma_q^2 v^2\, \hat{e}_y$ 斥力



(2) 下平板产生的磁场：$\vec{\boldsymbol{B}}_2 = \frac{1}{2}\mu_0\,\sigma_q\,v\,(-\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$

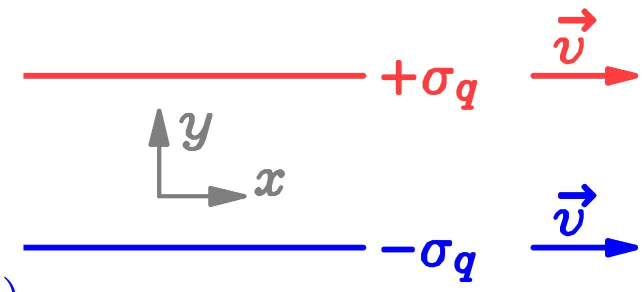
上平板受到的磁力：$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{\alpha}}\,\mathrm{d}\sigma \times \vec{\boldsymbol{B}}_2$

$$= \sigma_q v\,\hat{\boldsymbol{e}}_x\,\mathrm{d}\sigma \times \tfrac{1}{2}\mu_0\,\sigma_q\,v\,(-\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$$

$$= \tfrac{1}{2}\mu_0\sigma_q^2 v^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_y\,\mathrm{d}\sigma$$

上平板单位面积受到的磁力：$\vec{\boldsymbol{f}}_m = \dfrac{1}{2}\mu_0\sigma_q^2 v^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$ 斥力

下平板产生的电场：$\vec{\boldsymbol{E}}_2 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\epsilon_0}\,\sigma_q\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$



(2) 下平板产生的磁场：$\vec{B}_2 = \frac{1}{2}\mu_0\,\sigma_q\,v\,(-\,\hat{e}_z)$

上平板受到的磁力：$\mathrm{d}\vec{F} = \vec{\alpha}\,\mathrm{d}\sigma \times \vec{B}_2$

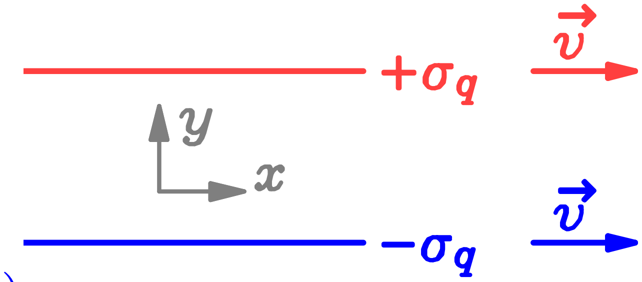
$$= \sigma_q v\,\hat{e}_x\,\mathrm{d}\sigma \times \tfrac{1}{2}\mu_0\,\sigma_q\,v\,(-\,\hat{e}_z)$$

$$= \tfrac{1}{2}\mu_0\sigma_q^2 v^2\,\hat{e}_y\,\mathrm{d}\sigma$$

上平板单位面积受到的磁力：$\vec{f}_m = \dfrac{1}{2}\mu_0\sigma_q^2 v^2\,\hat{e}_y$ 斥力

下平板产生的电场：$\vec{E}_2 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\epsilon_0}\,\sigma_q\,\hat{e}_y$

上平板单位面积受到的电力：$\vec{f}_e = \sigma_q\vec{E}_2 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\epsilon_0}\,\sigma_q^2\,\hat{e}_y$ 吸力



(2) 下平板产生的磁场：$\vec{\boldsymbol{B}}_2 = \frac{1}{2}\mu_0\,\sigma_q\,v\,(-\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$

上平板受到的磁力：$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{\alpha}}\,\mathrm{d}\sigma \times \vec{\boldsymbol{B}}_2$

$$= \sigma_q v\,\hat{\boldsymbol{e}}_x\,\mathrm{d}\sigma \times \tfrac{1}{2}\mu_0\,\sigma_q\,v\,(-\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$$

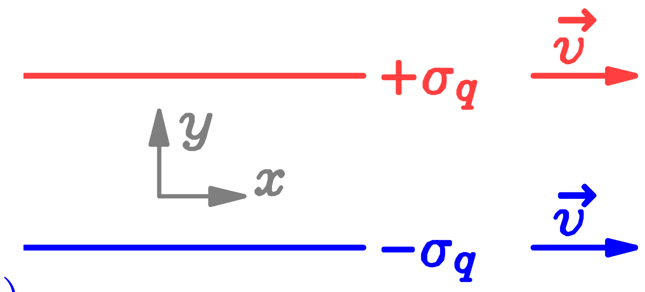
$$= \tfrac{1}{2}\mu_0\sigma_q^2 v^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_y\,\mathrm{d}\sigma$$

上平板单位面积受到的磁力：$\vec{\boldsymbol{f}}_m = \dfrac{1}{2}\mu_0\sigma_q^2 v^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$ 斥力

下平板产生的电场：$\vec{\boldsymbol{E}}_2 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\epsilon_0}\,\sigma_q\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$

上平板单位面积受到的电力：$\vec{\boldsymbol{f}}_e = \sigma_q\vec{\boldsymbol{E}}_2 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\epsilon_0}\,\sigma_q^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$ 吸力

(3) $f_m = f_e \quad \Longrightarrow \quad v = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = c$ (光速)



(2) 下平板产生的磁场：$\vec{B}_2 = \frac{1}{2}\mu_0\,\sigma_q\,v\,(-\,\hat{e}_z)$

上平板受到的磁力：$\mathrm{d}\vec{F} = \vec{\alpha}\,\mathrm{d}\sigma \times \vec{B}_2$

$$= \sigma_q v\,\hat{e}_x\,\mathrm{d}\sigma \times \tfrac{1}{2}\mu_0\,\sigma_q\,v\,(-\,\hat{e}_z)$$

$$= \tfrac{1}{2}\mu_0\sigma_q^2 v^2\,\hat{e}_y\,\mathrm{d}\sigma$$

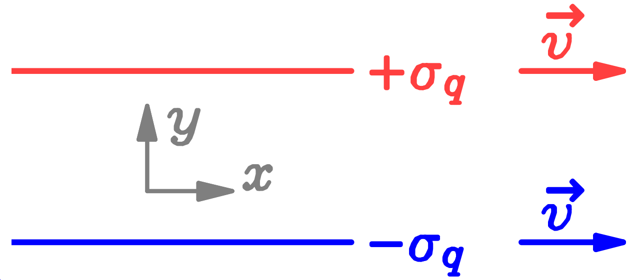
上平板单位面积受到的磁力：$\vec{f}_m = \dfrac{1}{2}\mu_0\sigma_q^2 v^2\,\hat{e}_y$ 斥力

下平板产生的电场：$\vec{E}_2 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\epsilon_0}\sigma_q\,\hat{e}_y$

上平板单位面积受到的电力：$\vec{f}_e = \sigma_q\vec{E}_2 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\epsilon_0}\sigma_q^2\,\hat{e}_y$ 吸力

(3) $f_m = f_e \quad \Longrightarrow \quad v = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = c$ (光速)

由于尚没有发现磁荷，磁场以及磁力来源于电荷的运动，一般情况下，磁力远小于电力



(2) 下平板产生的磁场：$\vec{B}_2 = \frac{1}{2}\mu_0\,\sigma_q\,v\,(-\,\hat{e}_z)$

上平板受到的磁力：$\mathrm{d}\vec{F} = \vec{\alpha}\,\mathrm{d}\sigma \times \vec{B}_2$

$$= \sigma_q v\,\hat{e}_x\,\mathrm{d}\sigma \times \tfrac{1}{2}\mu_0\,\sigma_q\,v\,(-\,\hat{e}_z)$$

$$= \tfrac{1}{2}\mu_0\sigma_q^2 v^2\,\hat{e}_y\,\mathrm{d}\sigma$$

上平板单位面积受到的磁力：$\vec{f}_m = \dfrac{1}{2}\mu_0\sigma_q^2 v^2\,\hat{e}_y$ 斥力

下平板产生的电场：$\vec{E}_2 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\epsilon_0}\sigma_q\,\hat{e}_y$

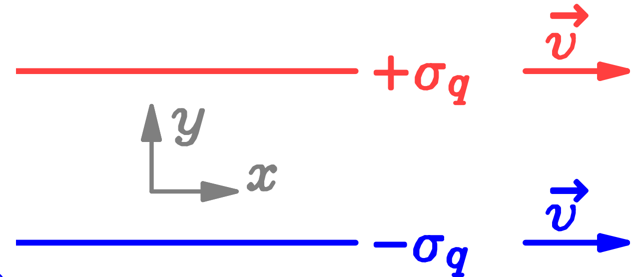
上平板单位面积受到的电力：$\vec{f}_e = \sigma_q\vec{E}_2 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\epsilon_0}\sigma_q^2\,\hat{e}_y$ 吸力

(3) $f_m = f_e \quad\Longrightarrow\quad v = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = c$ (光速)

由于尚没有发现磁荷，磁场以及磁力来源于电荷的运动，一般情况下，磁力远小于电力

物理图像： 磁力是运动电荷感受到的（另一些）运动电荷的场的作用

而电磁场的特征速度是光速 c，因此磁力与电力之比：$f_m/f_e \sim v^2/c^2$



(2) 下平板产生的磁场：$\vec{B}_2 = \frac{1}{2}\mu_0\,\sigma_q\,v\,(-\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$

上平板受到的磁力：$\mathrm{d}\vec{F} = \vec{\alpha}\,\mathrm{d}\sigma \times \vec{B}_2$

$$= \sigma_q v\,\hat{\boldsymbol{e}}_x\,\mathrm{d}\sigma \times \frac{1}{2}\mu_0\,\sigma_q\,v\,(-\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0\sigma_q^2 v^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_y\,\mathrm{d}\sigma$$

上平板单位面积受到的磁力：$\vec{f}_m = \dfrac{1}{2}\mu_0\sigma_q^2 v^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$ 斥力

下平板产生的电场：$\vec{E}_2 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\epsilon_0}\sigma_q\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$

上平板单位面积受到的电力：$\vec{f}_e = \sigma_q\vec{E}_2 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\epsilon_0}\sigma_q^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$ 吸力

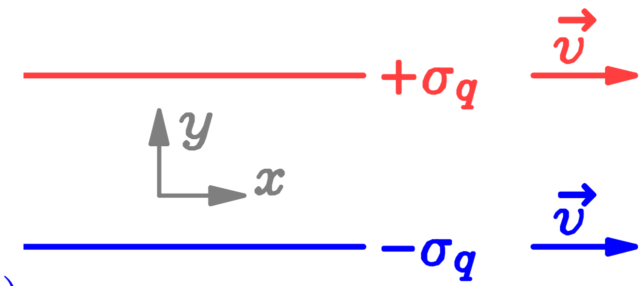
(3) $f_m = f_e \quad\Longrightarrow\quad v = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = c$ (光速)

由于尚没有发现磁荷，磁场以及磁力来源于电荷的运动，一般情况下，磁力远小于电力

物理图像： 磁力是运动电荷感受到的（另一些）运动电荷的场的作用

而电磁场的特征速度是光速 c，因此磁力与电力之比：$f_m/f_e \sim v^2/c^2$

一般情况下 $f_m \ll f_e$，仅当运动速度接近光速时，磁力才与电力可相比拟



(2) 下平板产生的磁场：$\vec{B}_2 = \frac{1}{2}\mu_0\,\sigma_q\,v\,(-\,\hat{e}_z)$

上平板受到的磁力：$\mathrm{d}\vec{F} = \vec{\alpha}\,\mathrm{d}\sigma \times \vec{B}_2$

$$= \sigma_q v\,\hat{e}_x\,\mathrm{d}\sigma \times \tfrac{1}{2}\mu_0\,\sigma_q\,v\,(-\,\hat{e}_z)$$

$$= \tfrac{1}{2}\mu_0\sigma_q^2 v^2\,\hat{e}_y\,\mathrm{d}\sigma$$

上平板单位面积受到的磁力：$\vec{f}_m = \dfrac{1}{2}\mu_0\sigma_q^2 v^2\,\hat{e}_y$ 斥力

下平板产生的电场：$\vec{E}_2 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\epsilon_0}\sigma_q\,\hat{e}_y$

上平板单位面积受到的电力：$\vec{f}_e = \sigma_q\vec{E}_2 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\epsilon_0}\sigma_q^2\,\hat{e}_y$ 吸力

(3) $f_m = f_e \quad\Longrightarrow\quad v = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = c$ (光速)

由于尚没有发现磁荷，磁场以及磁力来源于电荷的运动，一般情况下，磁力远小于电力

物理图像： 磁力是运动电荷感受到的（另一些）运动电荷的场的作用

而电磁场的特征速度是光速 c，因此磁力与电力之比：$f_m/f_e \sim v^2/c^2$

一般情况下 $f_m \ll f_e$，仅当运动速度接近光速时，磁力才与电力可相比拟

注： 本题中，面电荷密度是指在实验室观察的面电荷密度，

例 3：(1) 设每个金属铜原子提供两个自由电子，估算铜的自由电荷密度；(2) 在直径 1mm 的铜线上通有 1A 的电流，在经典图象中求电子平均运动速度；(3) 求两根相距 1cm 通有 1A 电流的铜线之间的相互吸引力；(4) 如果能除去铜线中不动的正离子，求上述两根铜线的排斥力。

例 3：(1) 设每个金属铜原子提供两个自由电子，估算铜的自由电荷密度；(2) 在直径 1mm 的铜线上通有 1A 的电流，在经典图象中求电子平均运动速度；(3) 求两根相距 1cm 通有 1A 电流的铜线之间的相互吸引力；(4) 如果能除去铜线中不动的正离子，求上述两根铜线的排斥力。

Avogadro's 常数：$N = 6 \times 10^{23}$　　电子电量：$e = 1.6 \times 10^{-19} C$

例 3：(1) 设每个金属铜原子提供两个自由电子，估算铜的自由电荷密度；(2) 在直径 1mm 的铜线上通有 1A 的电流，在经典图象中求电子平均运动速度；(3) 求两根相距 1cm 通有 1A 电流的铜线之间的相互吸引力；(4) 如果能除去铜线中不动的正离子，求上述两根铜线的排斥力。

Avogadro's 常数：$N = 6 \times 10^{23}$ 电子电量：$e = 1.6 \times 10^{-19} C$

铜的密度：$d = 9g/cm^3$ 原子量：$m = 64$ 电子质量：$m_e = 9.11 \times 10^{-31} kg$

例 3：(1) 设每个金属铜原子提供两个自由电子，估算铜的自由电荷密度；(2) 在直径 1mm 的铜线上通有 1A 的电流，在经典图象中求电子平均运动速度；(3) 求两根相距 1cm 通有 1A 电流的铜线之间的相互吸引力；(4) 如果能除去铜线中不动的正离子，求上述两根铜线的排斥力。

Avogadro's 常数：$N = 6 \times 10^{23}$　　电子电量：$e = 1.6 \times 10^{-19} C$

铜的密度：$d = 9 g/cm^3$　　原子量：$m = 64$　　电子质量：$m_e = 9.11 \times 10^{-31} kg$

铜的自由电荷密度　　$\rho = \dfrac{d}{m} N 2e = 2.7 \times 10^4 C/cm^3$

例 3：(1) 设每个金属铜原子提供两个自由电子，估算铜的自由电荷密度；(2) 在直径 1mm 的铜线上通有 1A 的电流，在经典图象中求电子平均运动速度；(3) 求两根相距 1cm 通有 1A 电流的铜线之间的相互吸引力；(4) 如果能除去铜线中不动的正离子，求上述两根铜线的排斥力。

Avogadro's 常数：$N = 6 \times 10^{23}$　　电子电量：$e = 1.6 \times 10^{-19} C$

铜的密度：$d = 9 g/cm^3$　　原子量：$m = 64$　　电子质量：$m_e = 9.11 \times 10^{-31} kg$

铜的自由电荷密度　　$\rho = \dfrac{d}{m} N 2e = 2.7 \times 10^4 C/cm^3$

$$j = \frac{I}{\pi r^2} = \rho v \qquad \Longrightarrow \qquad v = \frac{I}{\pi r^2 \rho} = 4.7 \times 10^{-3} cm/s$$

例 3：(1) 设每个金属铜原子提供两个自由电子，估算铜的自由电荷密度；(2) 在直径 1mm 的铜线上通有 1A 的电流，在经典图象中求电子平均运动速度；(3) 求两根相距 1cm 通有 1A 电流的铜线之间的相互吸引力；(4) 如果能除去铜线中不动的正离子，求上述两根铜线的排斥力。

Avogadro's 常数：$N = 6 \times 10^{23}$　　电子电量：$e = 1.6 \times 10^{-19} C$

铜的密度：$d = 9g/cm^3$　　原子量：$m = 64$　　电子质量：$m_e = 9.11 \times 10^{-31} kg$

铜的自由电荷密度　　$\rho = \dfrac{d}{m} N 2e = 2.7 \times 10^4 C/cm^3$

$$j = \frac{I}{\pi r^2} = \rho v \qquad \Longrightarrow \qquad v = \frac{I}{\pi r^2 \rho} = 4.7 \times 10^{-3} cm/s$$

铜线的相互吸引力　(磁力)

$$f_m = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{a} = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi}\frac{1}{0.01} = 2 \times 10^{-5} N/m$$

例 3：(1) 设每个金属铜原子提供两个自由电子，估算铜的自由电荷密度；(2) 在直径 1mm 的铜线上通有 1A 的电流，在经典图象中求电子平均运动速度；(3) 求两根相距 1cm 通有 1A 电流的铜线之间的相互吸引力；(4) 如果能除去铜线中不动的正离子，求上述两根铜线的排斥力。

Avogadro's 常数：$N = 6 \times 10^{23}$　　电子电量：$e = 1.6 \times 10^{-19} C$

铜的密度：$d = 9 g/cm^3$　　原子量：$m = 64$　　电子质量：$m_e = 9.11 \times 10^{-31} kg$

铜的自由电荷密度　　$\rho = \dfrac{d}{m} N 2e = 2.7 \times 10^4 C/cm^3$

$j = \dfrac{I}{\pi r^2} = \rho v \quad \Longrightarrow \quad v = \dfrac{I}{\pi r^2 \rho} = 4.7 \times 10^{-3} cm/s$

铜线的相互吸引力　(磁力)　$f_m = \dfrac{\mu_0}{2\pi} \dfrac{I_1 I_2}{a} = \dfrac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi} \dfrac{1}{0.01} = 2 \times 10^{-5} N/m$

除去正离子带电铜线斥力　(电力)　$f_e = \dfrac{1}{2\pi\epsilon_0} \dfrac{\lambda_1 \lambda_2}{a} = \dfrac{1}{2\pi\epsilon_0} \dfrac{1}{v^2} \dfrac{I_1 I_2}{a} = \dfrac{\mu_0}{2\pi} \dfrac{c^2}{v^2} \dfrac{I_1 I_2}{a} = \dfrac{c^2}{v^2} f_m$

例 3：(1) 设每个金属铜原子提供两个自由电子，估算铜的自由电荷密度；(2) 在直径 1mm 的铜线上通有 1A 的电流，在经典图象中求电子平均运动速度；(3) 求两根相距 1cm 通有 1A 电流的铜线之间的相互吸引力；(4) 如果能除去铜线中不动的正离子，求上述两根铜线的排斥力。

Avogadro's 常数：$N = 6 \times 10^{23}$　　电子电量：$e = 1.6 \times 10^{-19} C$

铜的密度：$d = 9 g/cm^3$　　原子量：$m = 64$　　电子质量：$m_e = 9.11 \times 10^{-31} kg$

铜的自由电荷密度

$$\rho = \frac{d}{m} N 2e = 2.7 \times 10^4 C/cm^3$$

$$j = \frac{I}{\pi r^2} = \rho v \qquad \Longrightarrow \qquad v = \frac{I}{\pi r^2 \rho} = 4.7 \times 10^{-3} cm/s$$

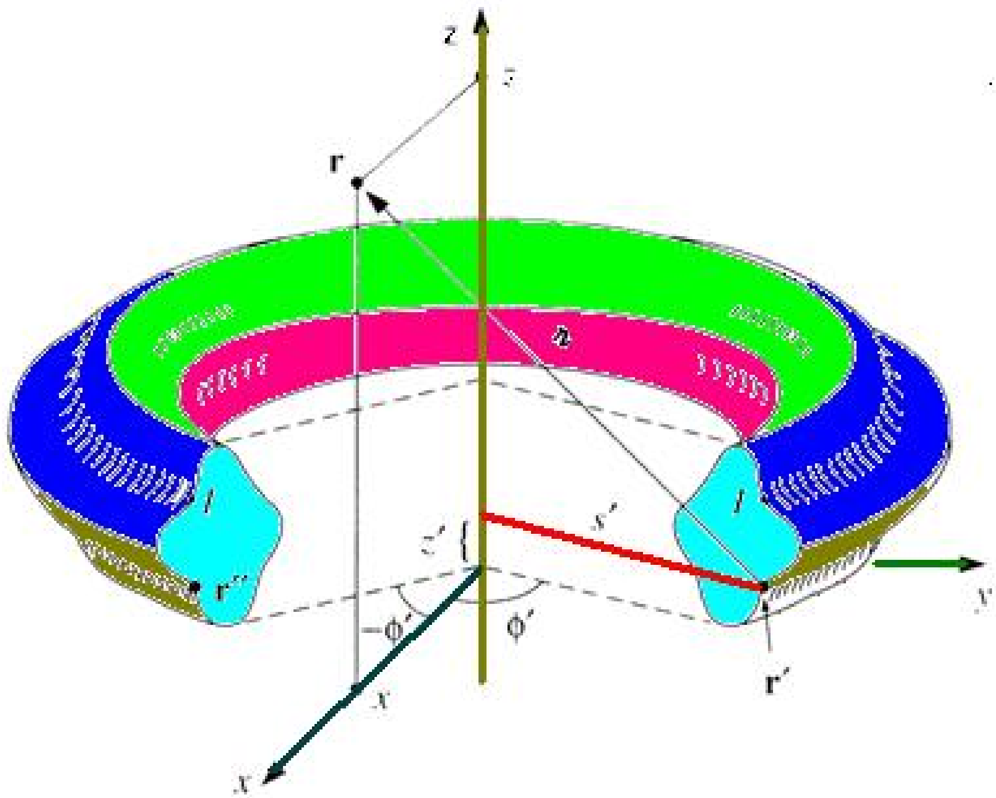
铜线的相互吸引力　(磁力)

$$f_m = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{a} = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi} \frac{1}{0.01} = 2 \times 10^{-5} N/m$$

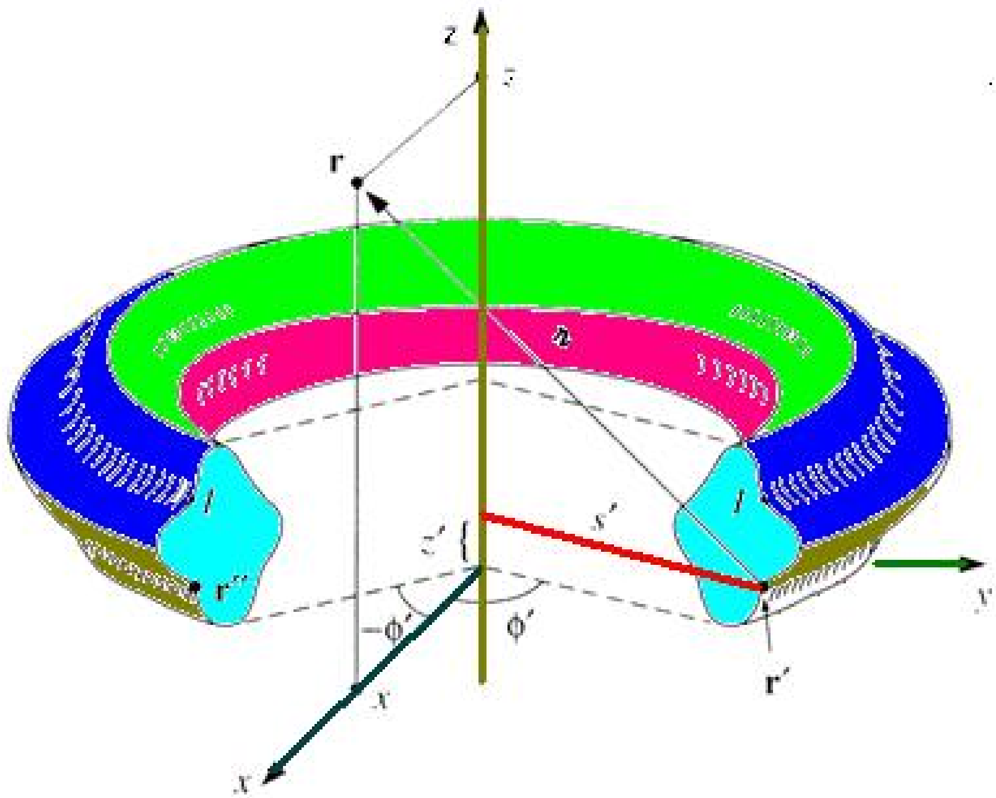
除去正离子带电铜线斥力　(电力)

$$f_e = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{a} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{v^2} \frac{I_1 I_2}{a} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{c^2}{v^2} \frac{I_1 I_2}{a} = \frac{c^2}{v^2} f_m$$

$$f_e = 8 \times 10^{20} N/m \qquad f_e = \frac{c^2}{v^2} f_m \gg f_m$$


z
z
r
a
I
I
z'
s'
r''
r'
−φ'
φ'
x
x
y

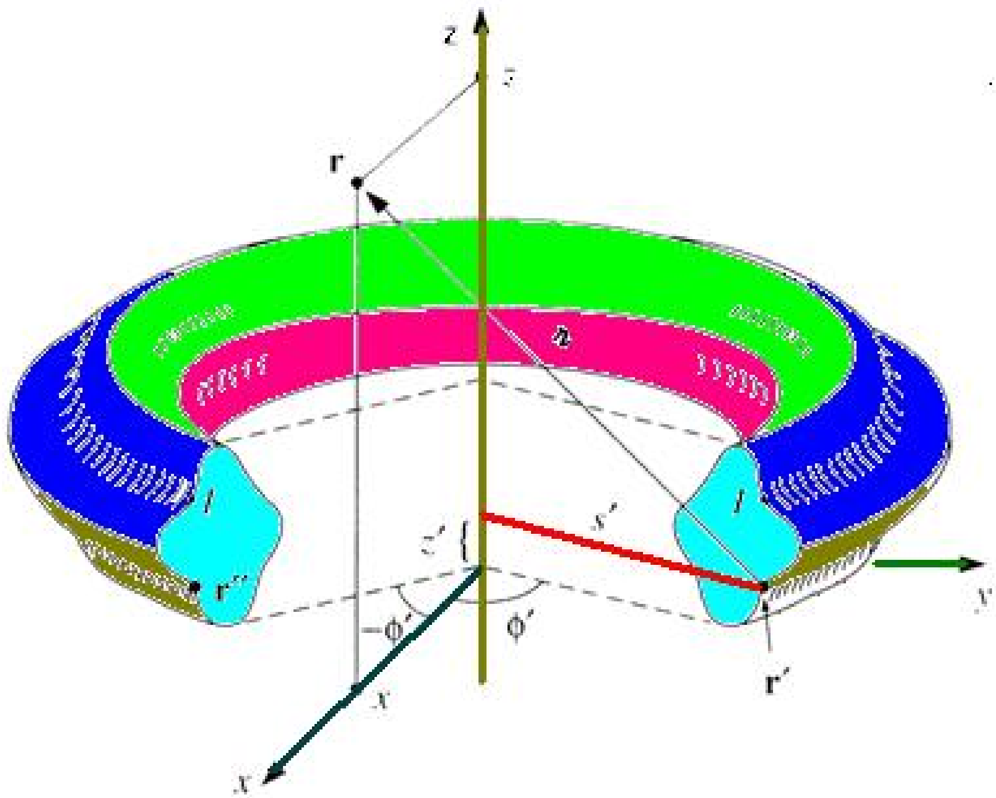
例 4：求如图圆环形螺线线圈内部的磁场（截面任意）



例 4：求如图圆环形螺线线圈内部的磁场（截面任意）

由于体系有绕 z 轴的旋转对称性

只须求 xz 平面内的磁场

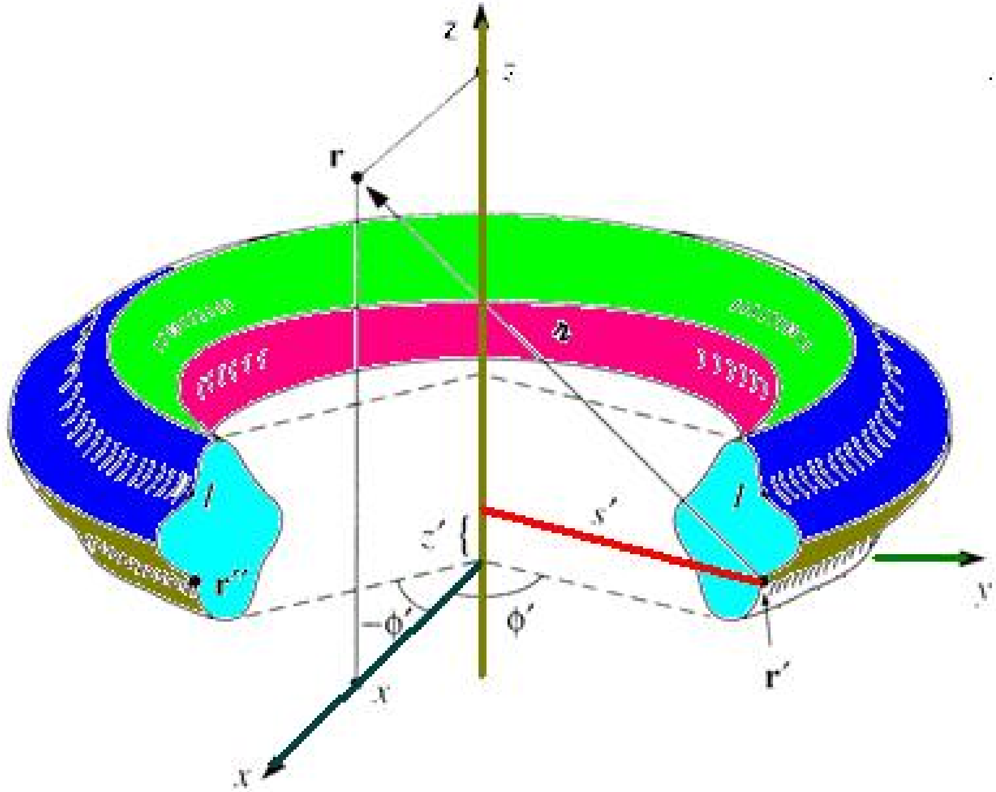


例 4：求如图圆环形螺线线圈内部的磁场（截面任意）

由于体系有绕 z 轴的旋转对称性

只须求 xz 平面内的磁场

取柱坐标：(s, ϕ, z)



例4：求如图圆环形螺线线圈内部的磁场（截面任意）

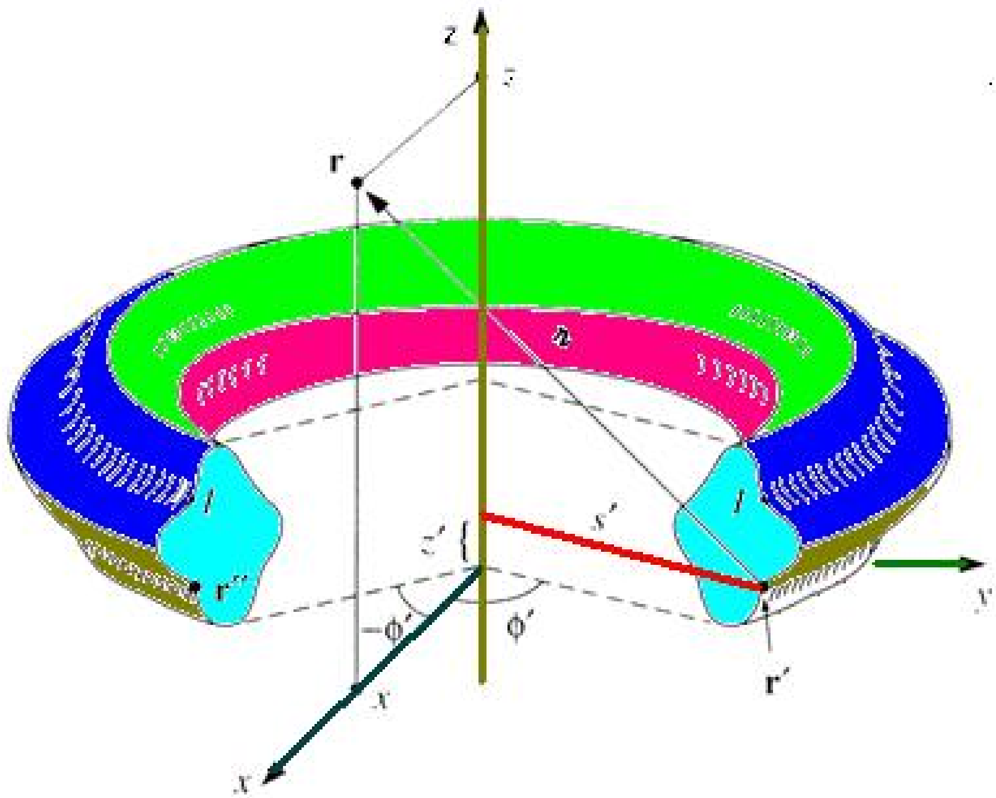
由于体系有绕 z 轴的旋转对称性

只须求 xz 平面内的磁场

取柱坐标：(s, ϕ, z)

$\vec{\boldsymbol{r}}'$ 处一小段电流在 xz 平面内 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 处的磁场为：

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}}_{\vec{\boldsymbol{r}}'} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}, \quad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'$$



例 4：求如图圆环形螺线线圈内部的磁场（截面任意）

由于体系有绕 z 轴的旋转对称性

只须求 xz 平面内的磁场

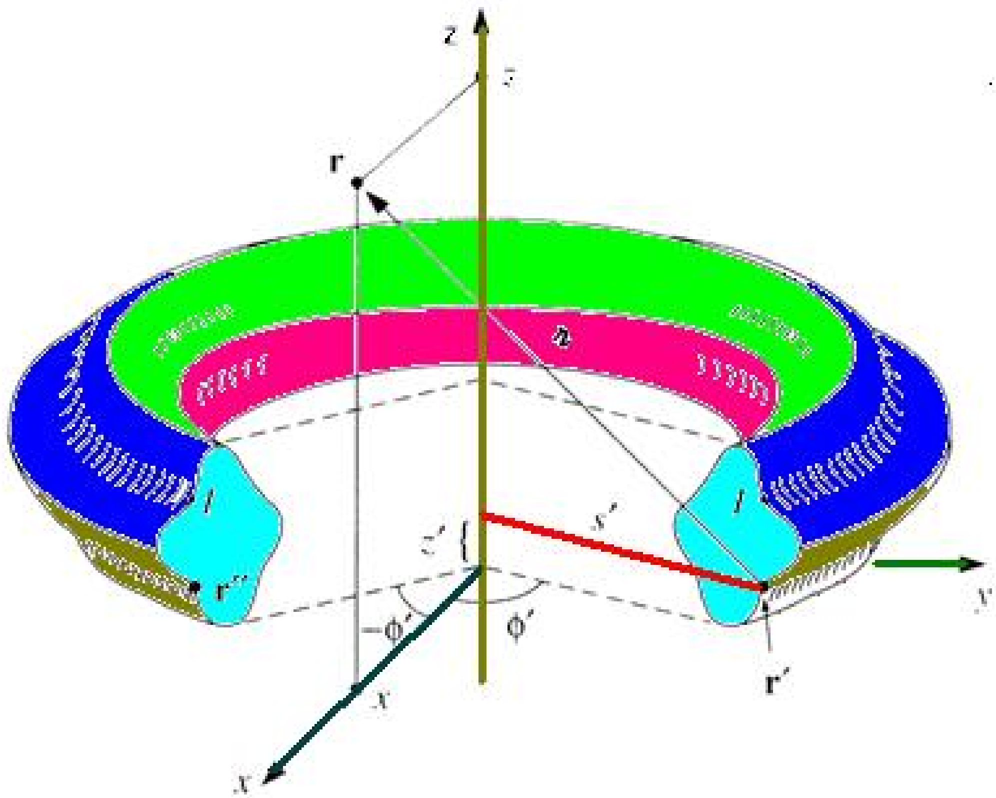
取柱坐标：(s, ϕ, z)

$\vec{r}'$ 处一小段电流在 xz 平面内 $\vec{r}$ 处的磁场为：

$$\mathrm{d}\vec{B}_{\vec{r}'} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{R}}{R^3}, \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

由于线圈密绕

故小电流方向可看成没有 $\hat{e}_\phi$ 分量



例 4：求如图圆环形螺线线圈内部的磁场（截面任意）

由于体系有绕 z 轴的旋转对称性

只须求 xz 平面内的磁场

取柱坐标：(s, ϕ, z)

$\vec{r}'$ 处一小段电流在 xz 平面内 $\vec{r}$ 处的磁场为：

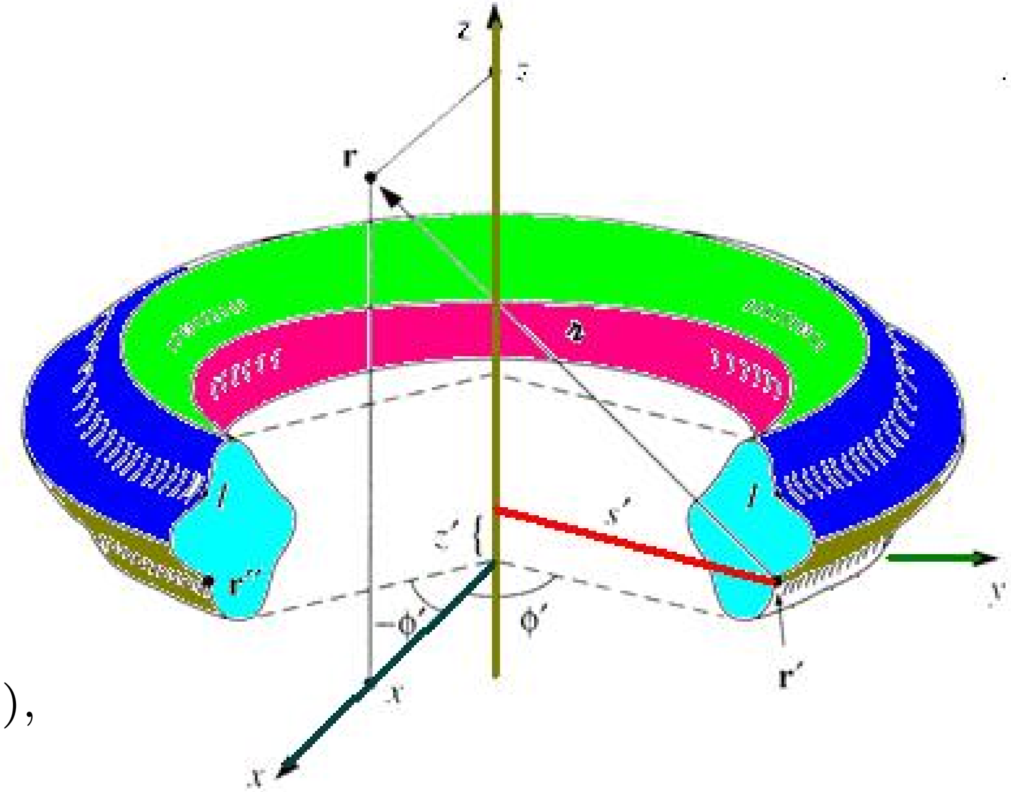
$$\mathrm{d}\vec{B}_{\vec{r}'} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{R}}{R^3}, \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

由于线圈密绕

故小电流方向可看成没有 $\hat{e}_\phi$ 分量

在直角坐标下，有：

$\vec{r} = (x, 0, z), \quad \vec{r}' = (s'\cos\phi', s'\sin\phi', z'),$



例4：求如图圆环形螺线线圈内部的磁场（截面任意）

由于体系有绕 z 轴的旋转对称性

只须求 xz 平面内的磁场

取柱坐标：(s, ϕ, z)

$\vec{r}'$ 处一小段电流在 xz 平面内 $\vec{r}$ 处的磁场为：

$$\mathrm{d}\vec{B}_{\vec{r}'} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{R}}{R^3}, \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

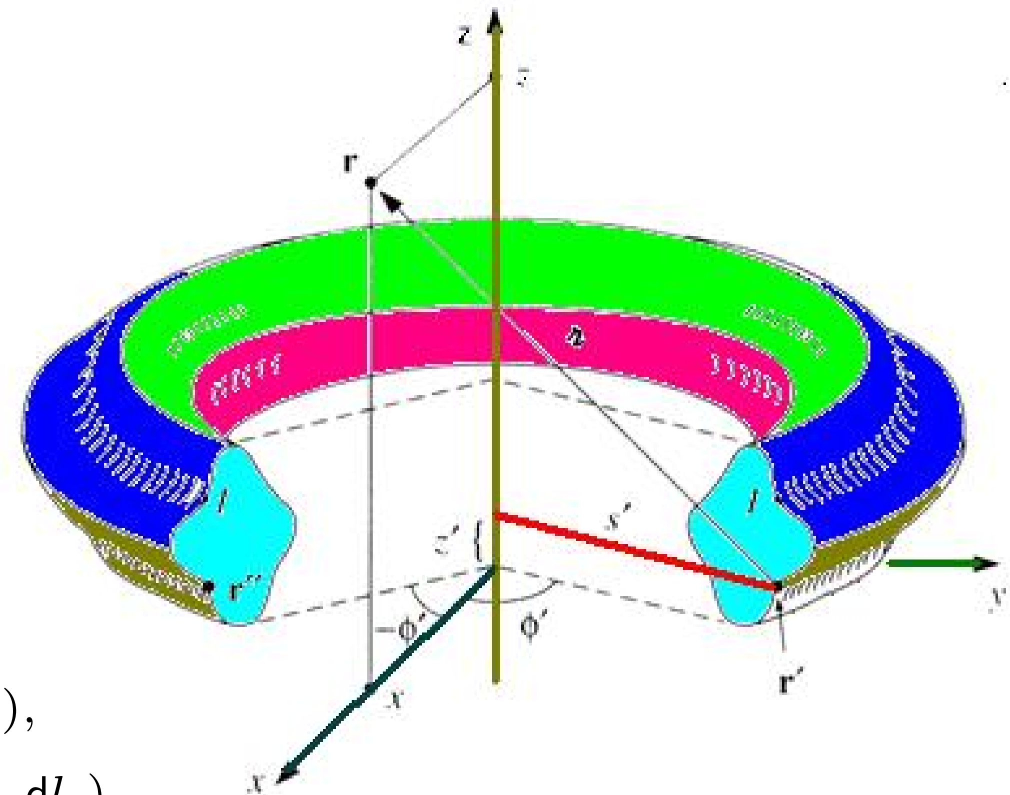
由于线圈密绕

故小电流方向可看成没有 $\hat{e}_\phi$ 分量

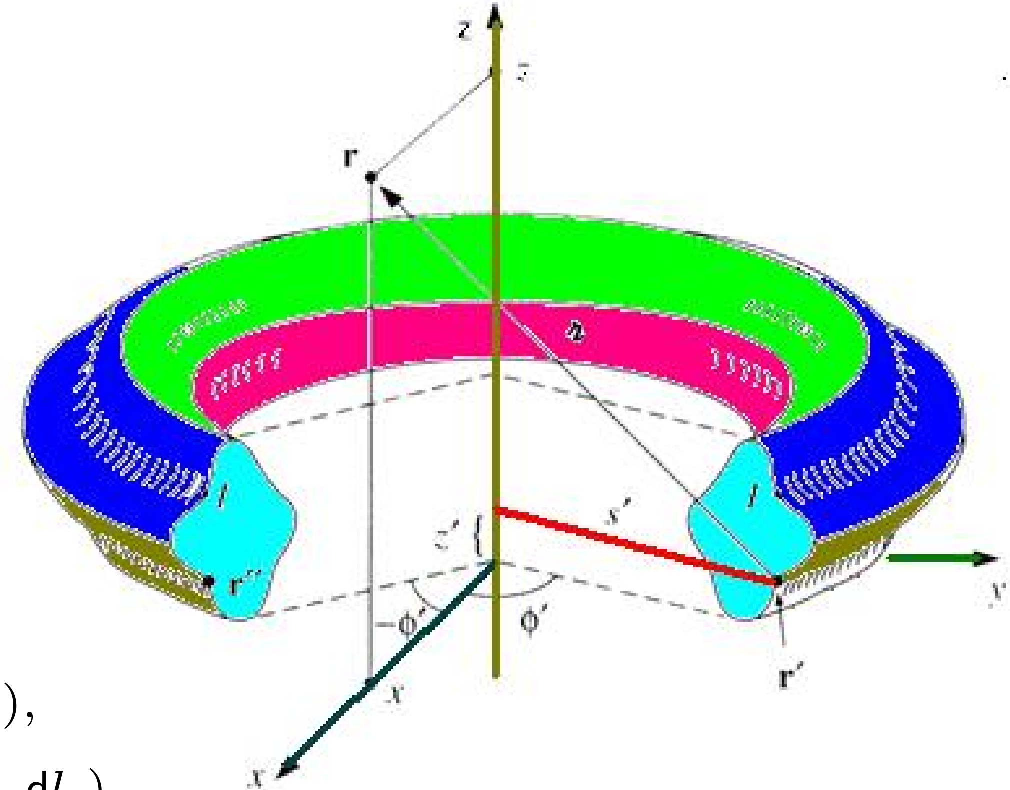
在直角坐标下，有：

$$\vec{r} = (x, 0, z), \quad \vec{r}' = (s'\cos\phi', s'\sin\phi', z'),$$

$$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}l_s\,\hat{e}_s + \mathrm{d}l_z\,\hat{e}_z = (\mathrm{d}l_s\cos\phi', \mathrm{d}l_s\sin\phi', \mathrm{d}l_z)$$



例 4：求如图圆环形螺线线圈内部的磁场（截面任意）



由于体系有绕 z 轴的旋转对称性

只须求 xz 平面内的磁场

取柱坐标：(s, ϕ, z)

$\boldsymbol{r}'$ 处一小段电流在 xz 平面内 $\boldsymbol{r}$ 处的磁场为：

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}}_{\vec{\boldsymbol{r}}'} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}, \quad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'$$

由于线圈密绕

故小电流方向可看成没有 $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ 分量

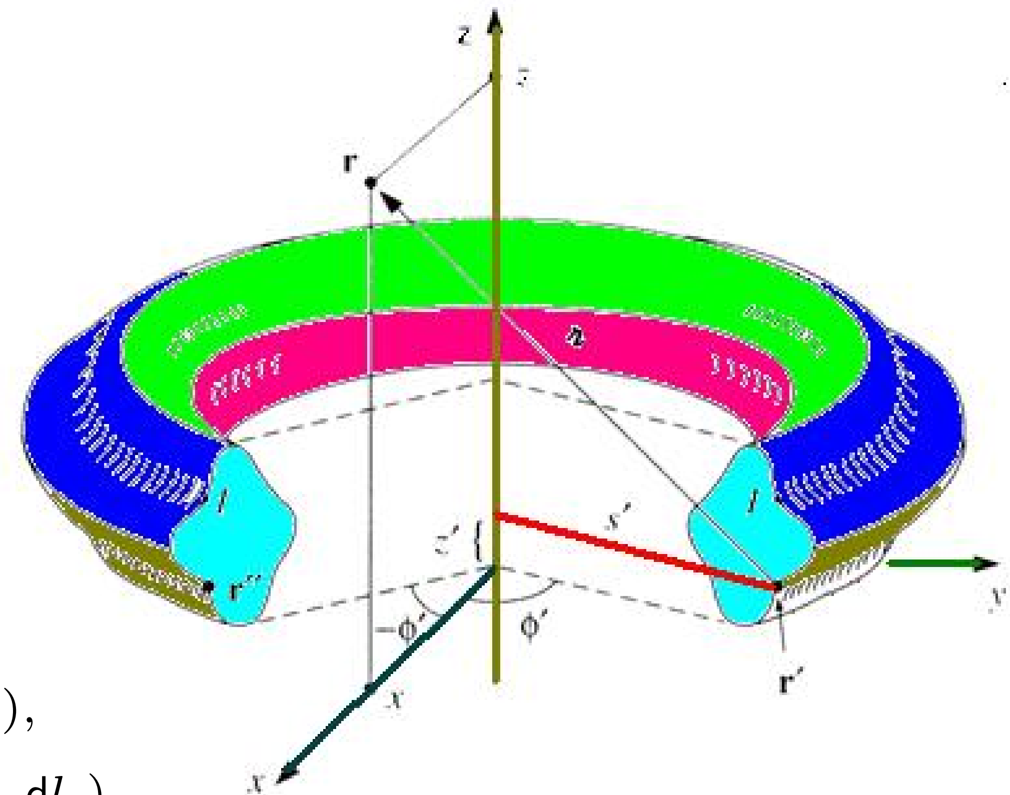
在直角坐标下，有：

$$\vec{\boldsymbol{r}} = (x, 0, z), \quad \vec{\boldsymbol{r}}' = (s' \cos\phi', s' \sin\phi', z'),$$

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \mathrm{d}l_s\, \hat{\boldsymbol{e}}_s + \mathrm{d}l_z\, \hat{\boldsymbol{e}}_z = (\mathrm{d}l_s \cos\phi', \mathrm{d}l_s \sin\phi', \mathrm{d}l_z)$$

$$\text{故，}\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}}_{\vec{\boldsymbol{r}}'} = \frac{\mu_0\, I}{4\pi R^3}\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{R}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_x & \hat{\boldsymbol{e}}_y & \hat{\boldsymbol{e}}_z \\ \mathrm{d}l_s \cos\phi' & \mathrm{d}l_s \sin\phi' & \mathrm{d}l_z \\ x - s' \cos\phi' & -s' \sin\phi' & z - z' \end{vmatrix}$$

例 4：求如图圆环形螺线线圈内部的磁场（截面任意）



由于体系有绕 z 轴的旋转对称性

只须求 xz 平面内的磁场

取柱坐标：(s, ϕ, z)

$\vec{r}'$ 处一小段电流在 xz 平面内 $\vec{r}$ 处的磁场为：

$$\mathrm{d}\vec{B}_{\vec{r}'} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{R}}{R^3}, \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

由于线圈密绕

故小电流方向可看成没有 $\hat{e}_\phi$ 分量

在直角坐标下，有：

$$\vec{r} = (x, 0, z), \quad \vec{r}' = (s'\cos\phi', s'\sin\phi', z'),$$

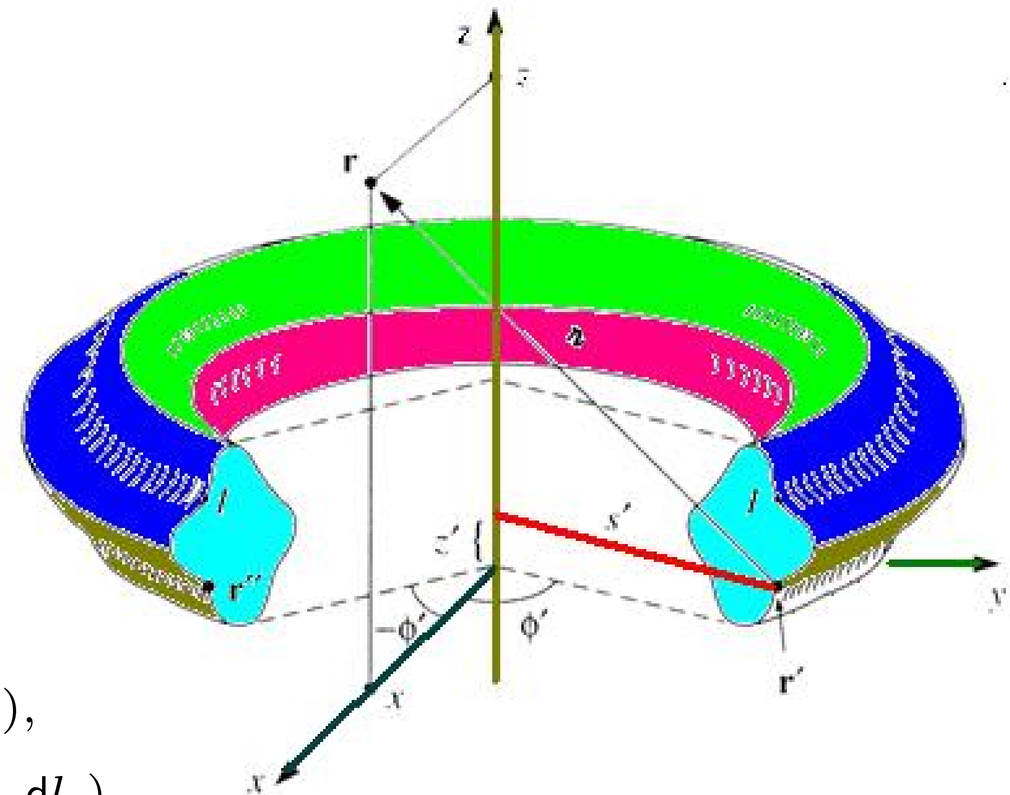
$$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}l_s\,\hat{e}_s + \mathrm{d}l_z\,\hat{e}_z = (\mathrm{d}l_s\cos\phi', \mathrm{d}l_s\sin\phi', \mathrm{d}l_z)$$

$$故，\mathrm{d}\vec{B}_{\vec{r}'} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \mathrm{d}l_s\cos\phi' & \mathrm{d}l_s\sin\phi' & \mathrm{d}l_z \\ x - s'\cos\phi' & -s'\sin\phi' & z - z' \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\Big\{\hat{e}_y\left[\mathrm{d}l_z(x - s'\cos\phi') - \mathrm{d}l_s(z - z')\cos\phi'\right]$$

$$+\ \hat{e}_x\left[\mathrm{d}l_s(z - z') + s'\mathrm{d}l_z\right]\sin\phi' - \hat{e}_z\left[\mathrm{d}l_s x\sin\phi'\right]\Big\}$$

例 4：求如图圆环形螺线线圈内部的磁场（截面任意）



由于体系有绕 z 轴的旋转对称性

只须求 xz 平面内的磁场

取柱坐标：(s, ϕ, z)

$\boldsymbol{r}'$ 处一小段电流在 xz 平面内 $\boldsymbol{r}$ 处的磁场为：

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}}_{\vec{\boldsymbol{r}}'} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}, \quad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'$$

由于线圈密绕

故小电流方向可看成没有 $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ 分量

在直角坐标下，有：

$$\vec{\boldsymbol{r}} = (x, 0, z), \quad \vec{\boldsymbol{r}}' = (s'\cos\phi', s'\sin\phi', z'),$$

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \mathrm{d}l_s\,\hat{\boldsymbol{e}}_s + \mathrm{d}l_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z = (\mathrm{d}l_s\cos\phi', \mathrm{d}l_s\sin\phi', \mathrm{d}l_z)$$

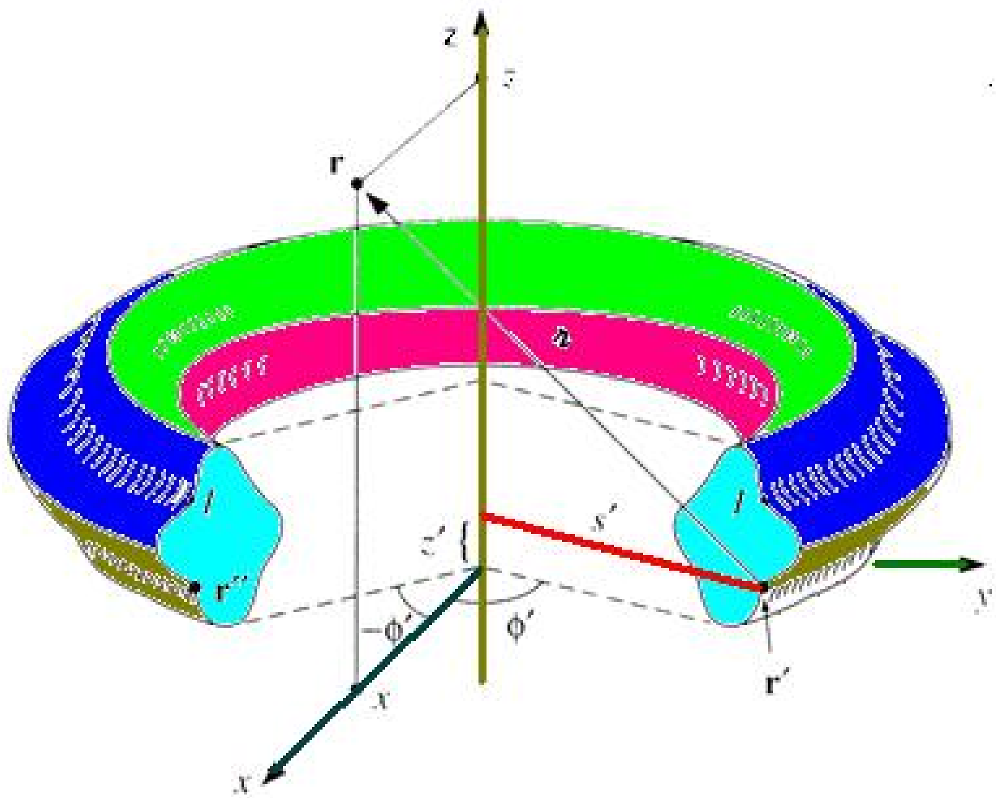
故，$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}}_{\vec{\boldsymbol{r}}'} = \frac{\mu_0\, I}{4\pi R^3}\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{R}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_x & \hat{\boldsymbol{e}}_y & \hat{\boldsymbol{e}}_z \\ \mathrm{d}l_s\cos\phi' & \mathrm{d}l_s\sin\phi' & \mathrm{d}l_z \\ x - s'\cos\phi' & -s'\sin\phi' & z - z' \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\Big\{\hat{\boldsymbol{e}}_y\left[\mathrm{d}l_z(x - s'\cos\phi') - \mathrm{d}l_s(z - z')\cos\phi'\right]$$

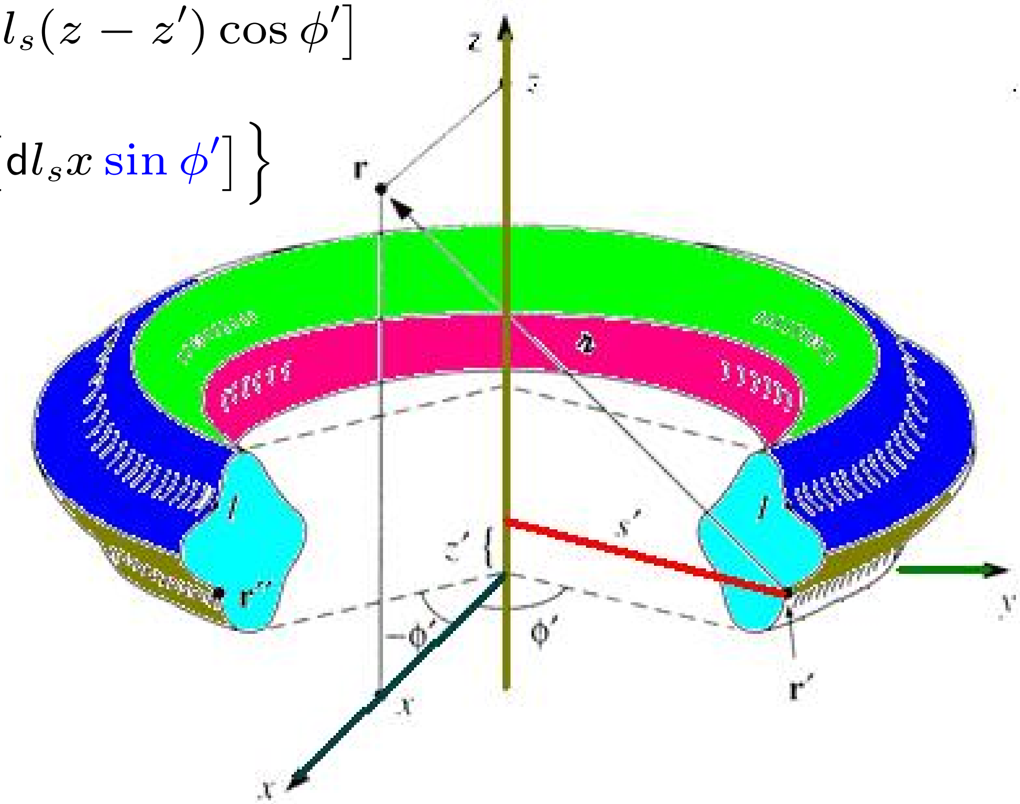
$$+\ \hat{\boldsymbol{e}}_x\left[\mathrm{d}l_s(z - z') + s'\mathrm{d}l_z\right]\sin\phi' - \hat{\boldsymbol{e}}_z\left[\mathrm{d}l_s x\sin\phi'\right]\Big\}$$

由对称性，有一段处在 (s', ϕ', z') 的电流，必有一段处在 $(s', -\phi', z')$ 的电流

Let there be light



$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}}_{\vec{\boldsymbol{r}}'} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\Big\{\, \hat{\boldsymbol{e}}_y \left[\mathrm{d}l_z(x - s'\cos\phi') - \mathrm{d}l_s(z - z')\cos\phi'\right] + \hat{\boldsymbol{e}}_x \left[\mathrm{d}l_s(z - z') + s'\mathrm{d}l_z\right]\sin\phi' - \hat{\boldsymbol{e}}_z \left[\mathrm{d}l_s x \sin\phi'\right]\Big\}$$



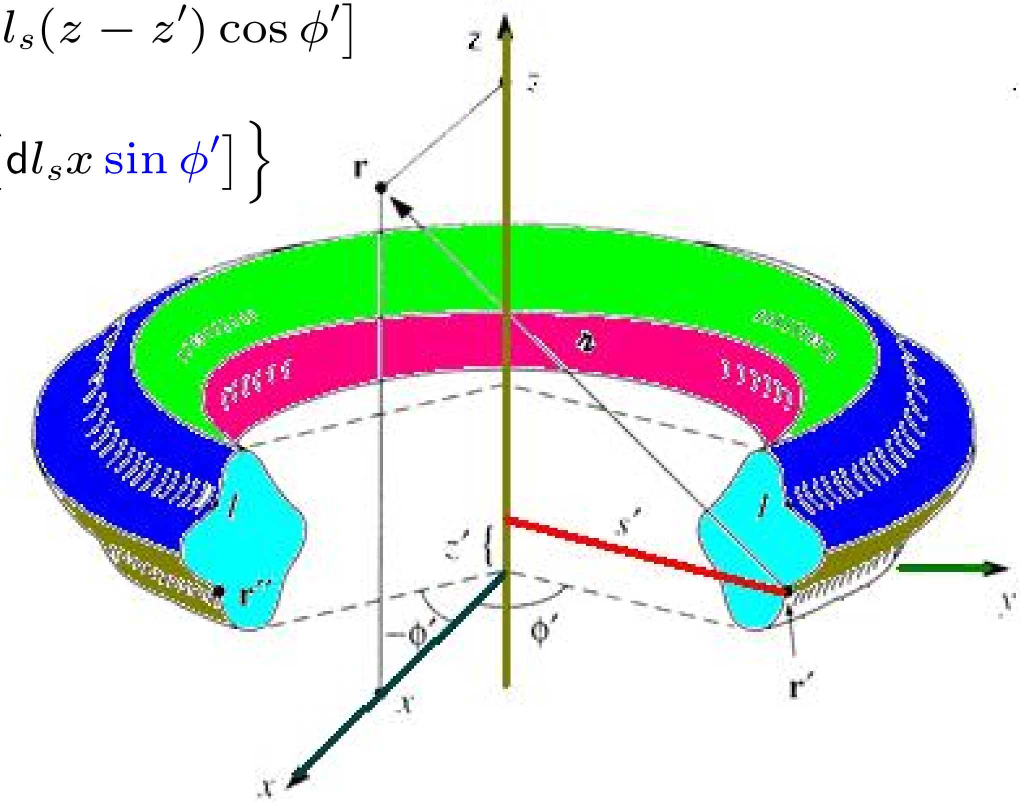
$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}}_{\vec{r}'} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\Big\{\ \hat{\boldsymbol{e}}_y\left[\mathrm{d}l_z(x-s'\cos\phi') - \mathrm{d}l_s(z-z')\cos\phi'\right]$$

$$+\ \hat{\boldsymbol{e}}_x\left[\mathrm{d}l_s(z-z') + s'\mathrm{d}l_z\right]\sin\phi' -\ \hat{\boldsymbol{e}}_z\left[\mathrm{d}l_s x\sin\phi'\right]\Big\}$$

由对称性，有一段处在 (s', ϕ', z') 的电流

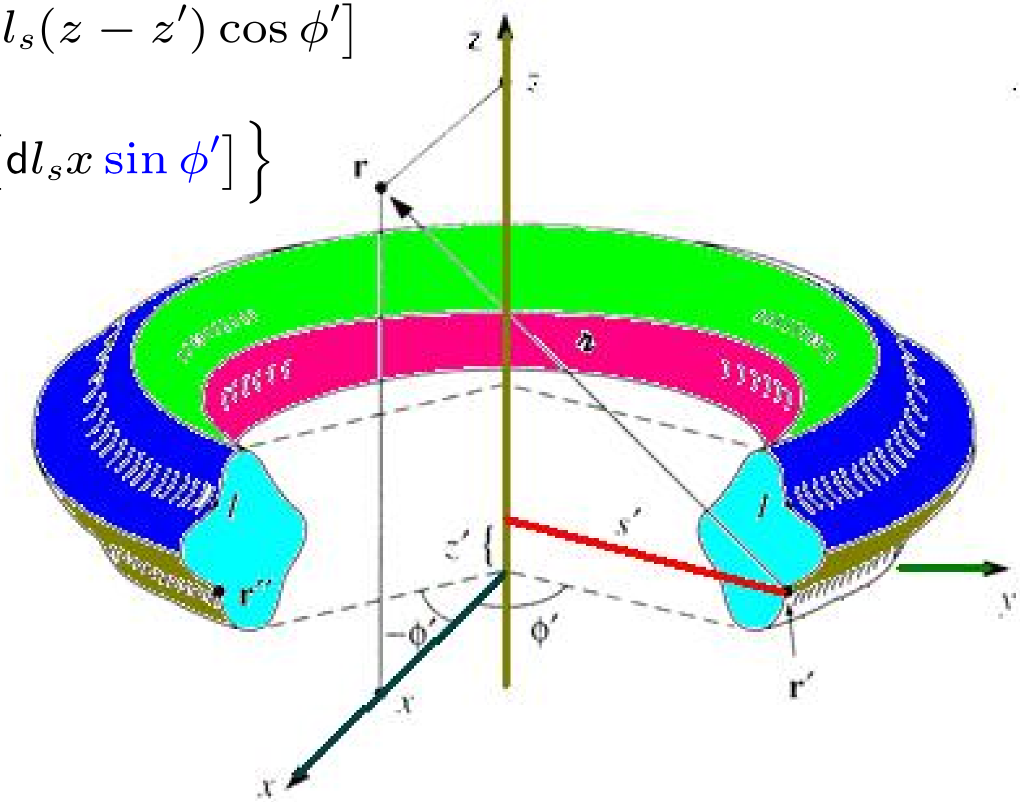
必有一段处在 $(s', -\phi', z')$ 的电流

且这两段电流的 $\mathrm{d}l_s$ 相同，由于存在 $\sin\phi'$



$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}}_{\vec{r}\,'} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\Big\{\, \hat{\boldsymbol{e}}_y\left[\mathrm{d}l_z(x - s'\cos\phi') - \mathrm{d}l_s(z - z')\cos\phi'\right]$$

$$+\ \hat{\boldsymbol{e}}_x\left[\mathrm{d}l_s(z - z') + s'\mathrm{d}l_z\right]\sin\phi' -\ \hat{\boldsymbol{e}}_z\left[\mathrm{d}l_s x\sin\phi'\right]\Big\}$$



由对称性，有一段处在 (s', ϕ', z') 的电流

必有一段处在 $(s', -\phi', z')$ 的电流

且这两段电流的 $\mathrm{d}l_s$ 相同，由于存在 $\sin\phi'$

这两段电流对 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 的 x 和 z 分量贡献相消

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}}_{\vec{r}\,'} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\Big\{\, \hat{\boldsymbol{e}}_y \left[\mathrm{d}l_z(x - s'\cos\phi') - \mathrm{d}l_s(z - z')\cos\phi'\right]$$

$$+\ \hat{\boldsymbol{e}}_x \left[\mathrm{d}l_s(z - z') + s'\mathrm{d}l_z\right]\sin\phi' -\ \hat{\boldsymbol{e}}_z \left[\mathrm{d}l_s x \sin\phi'\right]\Big\}$$

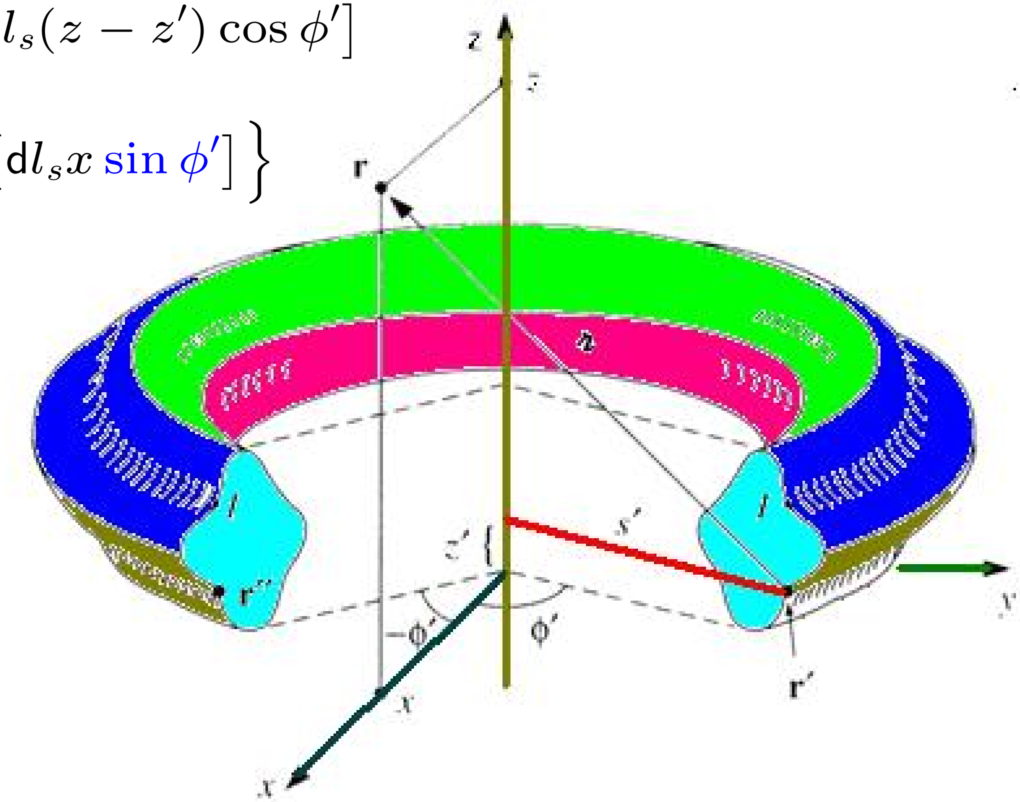
由对称性，有一段处在 (s', ϕ', z') 的电流

必有一段处在 $(s', -\phi', z')$ 的电流

且这两段电流的 $\mathrm{d}l_s$ 相同，由于存在 $\sin\phi'$

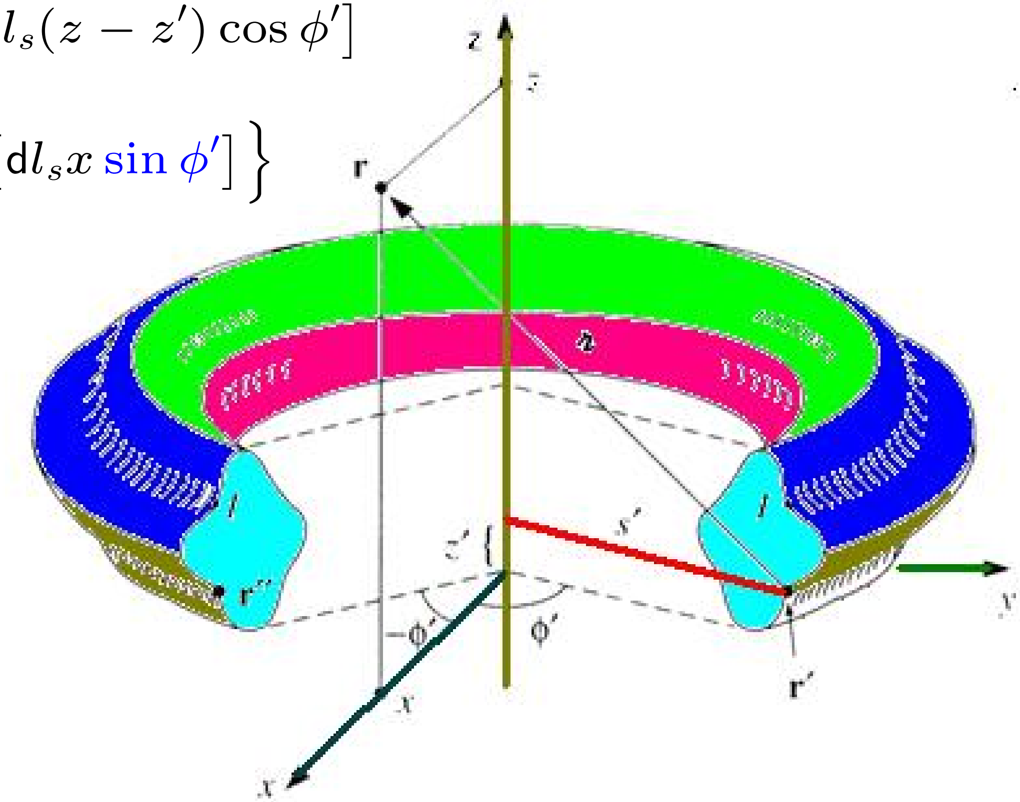
这两段电流对 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 的 x 和 z 分量贡献相消

即，$\vec{\boldsymbol{B}}$ 的 x 和 z 分量为零，只有 y 分量



$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}}_{\vec{r}\,'} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\Big\{\ \hat{\boldsymbol{e}}_y\left[\mathrm{d}l_z(x - s'\cos\phi') - \mathrm{d}l_s(z - z')\cos\phi'\right]$$

$$+\ \hat{\boldsymbol{e}}_x\left[\mathrm{d}l_s(z - z') + s'\mathrm{d}l_z\right]\sin\phi' -\ \hat{\boldsymbol{e}}_z\left[\mathrm{d}l_s x\sin\phi'\right]\Big\}$$



由对称性，有一段处在 (s', ϕ', z') 的电流

必有一段处在 $(s', -\phi', z')$ 的电流

且这两段电流的 $\mathrm{d}l_s$ 相同，由于存在 $\sin\phi'$

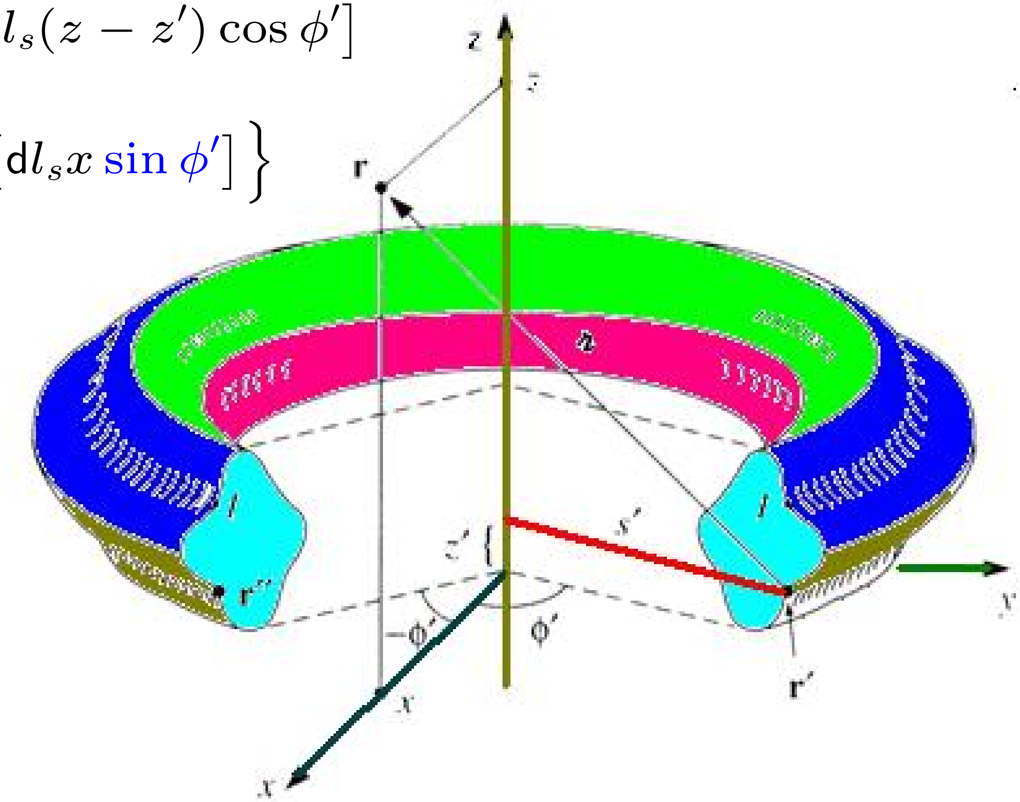
这两段电流对 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 的 x 和 z 分量贡献相消

即，$\vec{\boldsymbol{B}}$ 的 x 和 z 分量为零，只有 y 分量

$\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{B}}$ 沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ 方向。

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}}_{\vec{r}\,'} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\Big\{\,\hat{\boldsymbol{e}}_y\left[\mathrm{d}l_z(x-s'\cos\phi') - \mathrm{d}l_s(z-z')\cos\phi'\right]$$

$$+\ \hat{\boldsymbol{e}}_x\left[\mathrm{d}l_s(z-z') + s'\mathrm{d}l_z\right]\sin\phi' -\ \hat{\boldsymbol{e}}_z\left[\mathrm{d}l_s x\sin\phi'\right]\Big\}$$



由对称性，有一段处在 (s', ϕ', z') 的电流

必有一段处在 $(s', -\phi', z')$ 的电流

且这两段电流的 $\mathrm{d}l_s$ 相同，由于存在 $\sin\phi'$

这两段电流对 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 的 x 和 z 分量贡献相消

即，$\vec{\boldsymbol{B}}$ 的 x 和 z 分量为零，只有 y 分量

$\Longrightarrow$ $\quad\vec{\boldsymbol{B}}$ 沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ 方向。

在线圈内作一环路，应用安培定律即得：

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}}_{\vec{r}\,'} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\Big\{\ \hat{\boldsymbol{e}}_y\left[\mathrm{d}l_z(x - s'\cos\phi') - \mathrm{d}l_s(z - z')\cos\phi'\right]$$

$$+\ \hat{\boldsymbol{e}}_x\left[\mathrm{d}l_s(z - z') + s'\mathrm{d}l_z\right]\sin\phi' -\ \hat{\boldsymbol{e}}_z\left[\mathrm{d}l_s x\sin\phi'\right]\Big\}$$

由对称性，有一段处在 (s', ϕ', z') 的电流

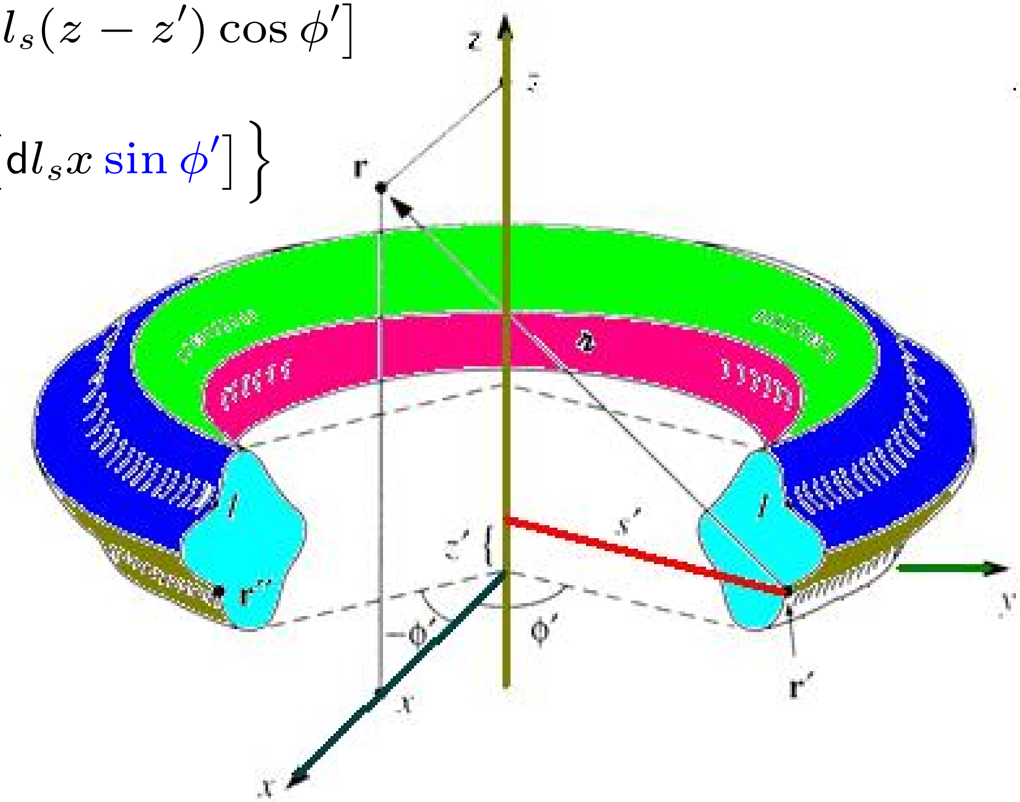
必有一段处在 $(s', -\phi', z')$ 的电流

且这两段电流的 $\mathrm{d}l_s$ 相同，由于存在 $\sin\phi'$

这两段电流对 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 的 x 和 z 分量贡献相消

即，$\vec{\boldsymbol{B}}$ 的 x 和 z 分量为零，只有 y 分量

$\Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{B}}$ 沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ 方向。

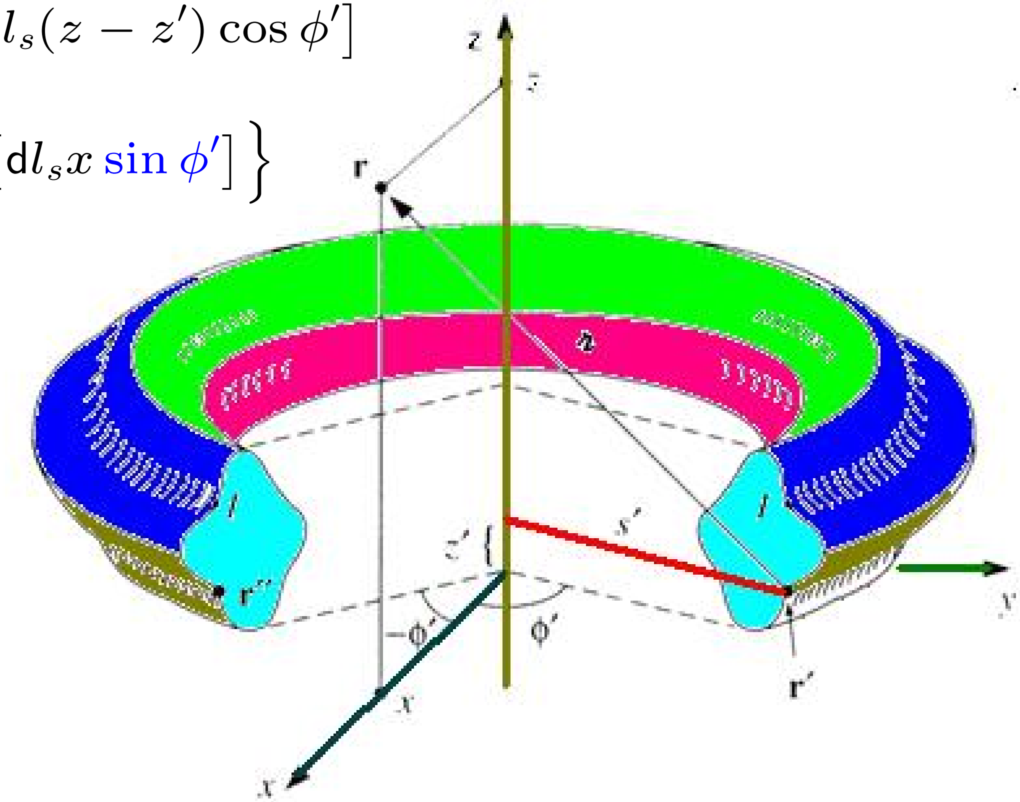


在线圈内作一环路，应用安培定律即得：

线圈内：$\vec{\boldsymbol{B}} = \dfrac{\mu_0 N I}{2\pi s}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$，　N 为圆环中线圈总匝数，同理可得

线圈外：$\vec{\boldsymbol{B}} = 0$

$$\mathrm{d}\vec{B}_{\vec{r}'} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\Big\{\, \hat{e}_y\left[\mathrm{d}l_z(x - s'\cos\phi') - \mathrm{d}l_s(z - z')\cos\phi'\right]$$
$$+\ \hat{e}_x\left[\mathrm{d}l_s(z - z') + s'\mathrm{d}l_z\right]\sin\phi' \;-\; \hat{e}_z\left[\mathrm{d}l_s x \sin\phi'\right]\Big\}$$



由对称性，有一段处在 (s', ϕ', z') 的电流

必有一段处在 $(s', -\phi', z')$ 的电流

且这两段电流的 $\mathrm{d}l_s$ 相同，由于存在 $\sin\phi'$

这两段电流对 $\vec{B}$ 的 x 和 z 分量贡献相消

即，$\vec{B}$ 的 x 和 z 分量为零，只有 y 分量

$\Longrightarrow$ $\vec{B}$ 沿 $\hat{e}_\phi$ 方向。

在线圈内作一环路，应用安培定律即得：

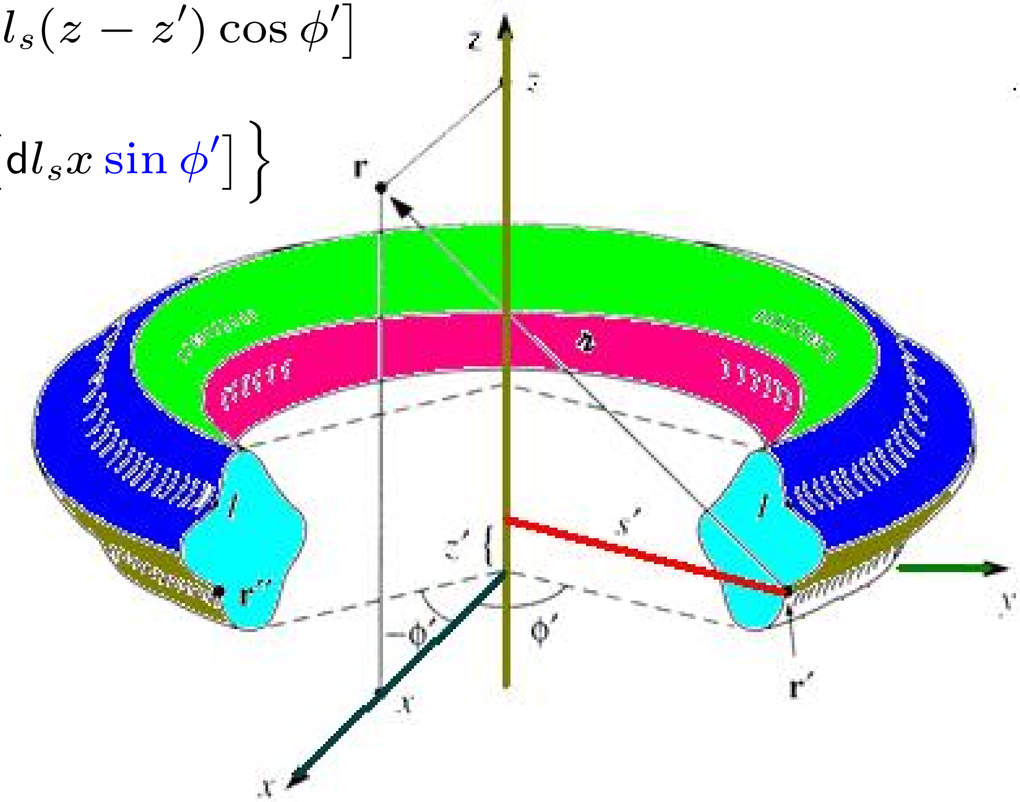
线圈内：$\vec{B} = \dfrac{\mu_0 N I}{2\pi s}\,\hat{e}_\phi$， N 为圆环中线圈总匝数，同理可得

线圈外：$\vec{B} = 0$

当圆环半径趋于无穷大时，即为长直螺线管情况， 这时：$\dfrac{N}{2\pi s} = n$：单位长度线圈匝数

$$\mathrm{d}\vec{B}_{\vec{r}'} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\Big\{\, \hat{e}_y \left[\mathrm{d}l_z(x - s'\cos\phi') - \mathrm{d}l_s(z-z')\cos\phi'\right]$$

$$+\ \hat{e}_x\left[\mathrm{d}l_s(z-z') + s'\mathrm{d}l_z\right]\sin\phi' - \ \hat{e}_z\left[\mathrm{d}l_s x\sin\phi'\right]\Big\}$$



由对称性，有一段处在 (s', ϕ', z') 的电流

必有一段处在 $(s', -\phi', z')$ 的电流

且这两段电流的 $\mathrm{d}l_s$ 相同，由于存在 $\sin\phi'$

这两段电流对 $\vec{B}$ 的 x 和 z 分量贡献相消

即，$\vec{B}$ 的 x 和 z 分量为零，只有 y 分量

$\Longrightarrow$ $\vec{B}$ 沿 $\hat{e}_\phi$ 方向。

在线圈内作一环路，应用安培定律即得：

线圈内：$\vec{B} = \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi s}\,\hat{e}_\phi$， N 为圆环中线圈总匝数，同理可得

线圈外：$\vec{B} = 0$

当圆环半径趋于无穷大时，即为长直螺线管情况， 这时：$\dfrac{N}{2\pi s} = n$：单位长度线圈匝数

长直螺线管管内磁场：$B = \mu_0 n I$ 管外：$\vec{B} = 0$， 与螺线管截面形状无关

二、静磁场的矢势及其微分方程和边值关系

二、静磁场的矢势及其微分方程和边值关系

矢势

二、静磁场的矢势及其微分方程和边值关系

矢势

由矢量场理论得知：

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}$$

二、静磁场的矢势及其微分方程和边值关系

矢势

由矢量场理论得知：

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}$$

几点说明：

二、静磁场的矢势及其微分方程和边值关系

矢势

由矢量场理论得知：

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

几点说明：

1. 对一般磁场也可引入矢势

二、静磁场的矢势及其微分方程和边值关系

矢势

由矢量场理论得知：

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

几点说明：

1. 对一般磁场也可引入矢势
2. 对有限电流分布的静磁场，

   矢势 $\vec{A}$ 为：$\vec{A}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$

二、静磁场的矢势及其微分方程和边值关系

矢势

由矢量场理论得知：

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

几点说明：

1. 对一般磁场也可引入矢势
2. 对有限电流分布的静磁场，

   矢势 $\vec{A}$ 为：$\vec{A}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$

   满足库仑规范：$\nabla \cdot \vec{A} = 0$，

   且已经假定无穷远处 $\vec{A} = 0$。

二、静磁场的矢势及其微分方程和边值关系

矢势

由矢量场理论得知：

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

几点说明：

1. 对一般磁场也可引入矢势
2. 对有限电流分布的静磁场，

   矢势 $\vec{A}$ 为：$\vec{A}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \displaystyle\int \dfrac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \mathrm{d}\tau'$

   满足库仑规范：$\nabla \cdot \vec{A} = 0$，

   且已经假定无穷远处 $\vec{A} = 0$。

3. 矢势的物理意义：单位正电荷的电磁相互作用动量

二、静磁场的矢势及其微分方程和边值关系

矢势

由矢量场理论得知：

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

几点说明：

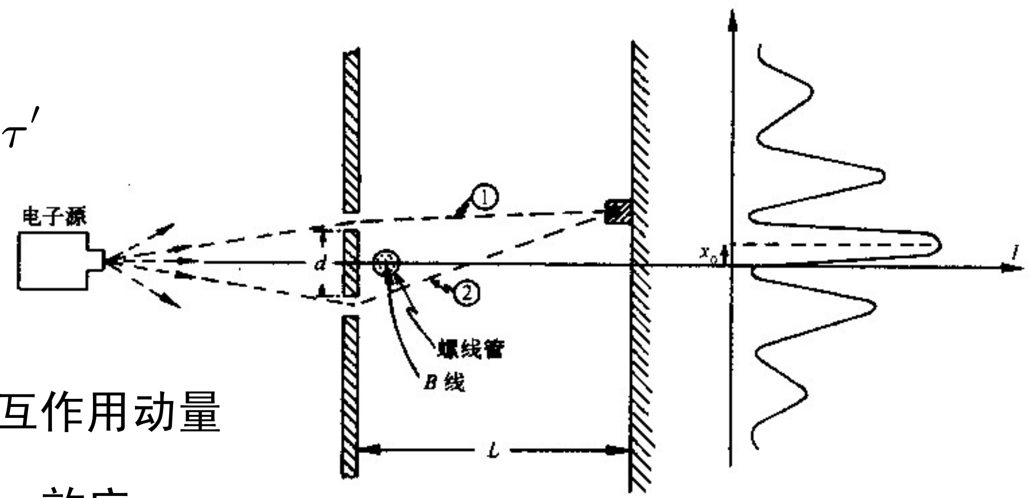
1. 对一般磁场也可引入矢势
2. 对有限电流分布的静磁场，

   矢势 $\vec{A}$ 为：$\vec{A}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$

   满足库仑规范：$\nabla \cdot \vec{A} = 0$，

   且已经假定无穷远处 $\vec{A} = 0$。

3. 矢势的物理意义：单位正电荷的电磁相互作用动量
4. 矢势的可观察物理效应：Aharonov-Bohm 效应 (参见教材 p52 §2.7)



矢势满足的微分方程

对线性、各向同性、均匀介质区，有

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{j}}_f, \qquad \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$$

矢势满足的微分方程

对线性、各向同性、均匀介质区，有

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{j}}_f, \qquad \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$$

从而

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}} \quad = \mu \vec{\boldsymbol{j}}_f$$

矢势满足的微分方程

对线性、各向同性、均匀介质区，有

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{j}}_f, \qquad \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$$

从而

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{\boldsymbol{B}} &= \mu \vec{\boldsymbol{j}}_f \\ \nabla \times \vec{\boldsymbol{B}} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) \end{aligned}$$

矢势满足的微分方程

对线性、各向同性、均匀介质区，有

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{j}}_f, \qquad \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$$

从而

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}} &= \mu \vec{\boldsymbol{j}}_f \\
\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) \\
&= \nabla(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}}) - \nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}}
\end{aligned}$$

矢势满足的微分方程

对线性、各向同性、均匀介质区，有

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}=\vec{\boldsymbol{j}}_f,\qquad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0$$

从而

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}&=\mu\vec{\boldsymbol{j}}_f\\ \nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}&=\nabla\times(\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}})\\ &=\nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}})-\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}\end{aligned}$$

对静磁场，通常选取库仑规范：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}=0$

矢势满足的微分方程

对线性、各向同性、均匀介质区，有

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}=\vec{\boldsymbol{j}}_f,\qquad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0$$

从而

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}&=\mu\vec{\boldsymbol{j}}_f\\ \nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}&=\nabla\times(\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}})\\ &=\nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}})-\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}\\ &=-\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}=\mu\vec{\boldsymbol{j}}_f\quad\Longrightarrow\quad\boxed{\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}=-\mu\vec{\boldsymbol{j}}_f}\end{aligned}$$

对静磁场，通常选取库仑规范：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}=0$

矢势满足的微分方程

对线性、各向同性、均匀介质区，有

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}=\vec{\boldsymbol{j}}_f,\qquad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0$$

从而

$$\begin{aligned}
\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}} &= \mu\vec{\boldsymbol{j}}_f\\
\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}} &= \nabla\times(\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}})\\
&= \nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}})-\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}\\
&= -\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}=\mu\vec{\boldsymbol{j}}_f \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}=-\mu\vec{\boldsymbol{j}}_f}
\end{aligned}$$

对静磁场，通常选取库仑规范：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}=0$

比较：$\nabla^2\varphi=-\dfrac{\rho_f}{\epsilon}$

矢势满足的微分方程

对线性、各向同性、均匀介质区，有

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f, \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

从而

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{B} &= \mu \vec{j}_f \\
\nabla \times \vec{B} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) \\
&= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}
\end{aligned}$$

对静磁场，通常选取库仑规范：$\nabla \cdot \vec{A} = 0$

$$= -\nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{j}_f \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{j}_f}$$

比较：$\nabla^2 \varphi = -\dfrac{\rho_f}{\epsilon}$

几点说明：

矢势满足的微分方程

对线性、各向同性、均匀介质区，有

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{j}}_f, \qquad \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$$

从而

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}} &= \mu \vec{\boldsymbol{j}}_f \\
\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) \\
&= \nabla(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}}) - \nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}} \\
&= -\nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}} = \mu \vec{\boldsymbol{j}}_f \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}} = -\mu \vec{\boldsymbol{j}}_f}
\end{aligned}$$

对静磁场，通常选取库仑规范：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = 0$

比较：$\nabla^2 \varphi = -\dfrac{\rho_f}{\epsilon}$

几点说明：

1. 与静电场方程相似，但条件不同 $\nabla^2 \varphi = -\rho_f/\epsilon$ 条件：均匀区

矢势满足的微分方程

对线性、各向同性、均匀介质区，有

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{j}}_f, \qquad \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$$

从而

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}} &= \mu \vec{\boldsymbol{j}}_f \\
\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) \\
&= \nabla(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}}) - \nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}} \\
&= -\nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}} = \mu \vec{\boldsymbol{j}}_f \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}} = -\mu \vec{\boldsymbol{j}}_f}
\end{aligned}$$

对静磁场，通常选取库仑规范：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = 0$

比较：$\nabla^2 \varphi = -\dfrac{\rho_f}{\epsilon}$

几点说明：

1. 与静电场方程相似，但条件不同

$\nabla^2 \varphi = -\rho_f/\epsilon$ 条件：均匀区

$\nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}} = -\mu \vec{\boldsymbol{j}}_f$ 条件：均匀区 + 库仑规范：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = 0$

矢势满足的微分方程

对线性、各向同性、均匀介质区，有

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f, \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

从而

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{B} &= \mu \vec{j}_f \\
\nabla \times \vec{B} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) \\
&= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \qquad \text{对静磁场，通常选取库仑规范：} \nabla \cdot \vec{A} = 0 \\
&= -\nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{j}_f \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{j}_f} \qquad \text{比较：} \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_f}{\epsilon}
\end{aligned}$$

几点说明：

1. 与静电场方程相似，但条件不同 $\nabla^2 \varphi = -\rho_f/\epsilon$ 条件：均匀区
   $\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{j}_f$ 条件：均匀区 + 库仑规范：$\nabla \cdot \vec{A} = 0$
2. 仅在直角坐标系下，才可写成标量形式的分量方程 $\nabla^2 A_i = -\mu j_{fi}, \quad i = x, y, z$

矢势满足的微分方程

对线性、各向同性、均匀介质区，有

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}=\vec{\boldsymbol{j}}_f,\qquad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0$$

从而

$$\begin{aligned}
\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}} &= \mu\vec{\boldsymbol{j}}_f\\
\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}} &= \nabla\times(\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}})\\
&= \nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}})-\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}
\end{aligned}$$

对静磁场，通常选取库仑规范：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}=0$

$$=-\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}=\mu\vec{\boldsymbol{j}}_f\quad\Longrightarrow\quad\boxed{\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}=-\mu\vec{\boldsymbol{j}}_f}$$

比较：$\nabla^2\varphi=-\dfrac{\rho_f}{\epsilon}$

几点说明：

1. 与静电场方程相似，但条件不同

   $\nabla^2\varphi=-\rho_f/\epsilon$ 条件：均匀区

   $\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}=-\mu\vec{\boldsymbol{j}}_f$ 条件：均匀区 + 库仑规范：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}=0$

2. 仅在直角坐标系下，才可写成标量形式的分量方程 $\nabla^2A_i=-\mu j_{fi},\quad i=x,\,y,\,z$

   在其它坐标系，需解耦合微分方程，通常只有具有特殊对称性的电流分布才有解析解

矢势的边值关系

两种均匀介质区界面，有

$$\vec{\boldsymbol{n}} \times (\vec{\boldsymbol{H}}_2 - \vec{\boldsymbol{H}}_1) = \vec{\boldsymbol{\alpha}}$$

$$\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{B}}_2 - \vec{\boldsymbol{B}}_1) = 0$$

矢势的边值关系

两种均匀介质区界面，有

$$
\begin{aligned}
&\vec{\boldsymbol{n}} \times (\vec{\boldsymbol{H}}_2 - \vec{\boldsymbol{H}}_1) = \vec{\boldsymbol{\alpha}} \\
&\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{B}}_2 - \vec{\boldsymbol{B}}_1) = 0
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
&\vec{\boldsymbol{n}} \times \left[\frac{1}{\mu_2}(\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}_2) - \frac{1}{\mu_1}(\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}_1)\right] = \vec{\boldsymbol{\alpha}}_f \qquad (1) \\
&\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}_2 - \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}_1) = 0 \qquad (2)
\end{aligned}
$$

矢势的边值关系

两种均匀介质区界面，有

$$\vec{\boldsymbol{n}} \times (\vec{\boldsymbol{H}}_2 - \vec{\boldsymbol{H}}_1) = \vec{\boldsymbol{\alpha}} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\boldsymbol{n}} \times \left[\frac{1}{\mu_2}(\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}_2) - \frac{1}{\mu_1}(\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}_1)\right] = \vec{\boldsymbol{\alpha}}_f \tag{1}$$

$$\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{B}}_2 - \vec{\boldsymbol{B}}_1) = 0 \qquad \qquad \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}_2 - \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}_1) = 0 \tag{2}$$

ugly

对静磁场

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{B}}$$

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = 0$$

矢势的边值关系

两种均匀介质区界面，有

$$\begin{aligned} \vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1) &= \vec{\alpha} \\ \vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1) &= 0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \vec{n}\times\left[\frac{1}{\mu_2}(\nabla\times\vec{A}_2)-\frac{1}{\mu_1}(\nabla\times\vec{A}_1)\right] &= \vec{\alpha}_f \qquad (1) \\ \vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{A}_2-\nabla\times\vec{A}_1) &= 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

ugly

对静磁场

$$\begin{aligned} \nabla\times\vec{A} &= \vec{B} \\ \nabla\cdot\vec{A} &= 0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \vec{n}\times(\vec{A}_2-\vec{A}_1) &= 0 \\ \vec{n}\cdot(\vec{A}_2-\vec{A}_1) &= 0 \end{aligned}$$

矢势的边值关系

两种均匀介质区界面，有

$$\vec{\boldsymbol{n}} \times (\vec{\boldsymbol{H}}_2 - \vec{\boldsymbol{H}}_1) = \vec{\boldsymbol{\alpha}} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\boldsymbol{n}} \times \left[\frac{1}{\mu_2}(\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}_2) - \frac{1}{\mu_1}(\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}_1)\right] = \vec{\boldsymbol{\alpha}}_f \qquad (1)$$

$$\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{B}}_2 - \vec{\boldsymbol{B}}_1) = 0 \qquad \qquad \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}_2 - \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}_1) = 0 \qquad (2)$$

ugly

对静磁场

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{B}} \qquad \qquad \vec{\boldsymbol{n}} \times (\vec{\boldsymbol{A}}_2 - \vec{\boldsymbol{A}}_1) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\boldsymbol{A}}_2 = \vec{\boldsymbol{A}}_1 \qquad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = 0 \qquad \qquad \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{A}}_2 - \vec{\boldsymbol{A}}_1) = 0$$

取代 (2) 式　(why?)

矢势的边值关系

两种均匀介质区界面，有

$$\vec{\boldsymbol{n}} \times (\vec{\boldsymbol{H}}_2 - \vec{\boldsymbol{H}}_1) = \vec{\boldsymbol{\alpha}} \quad\Rightarrow\quad \vec{\boldsymbol{n}} \times \left[\frac{1}{\mu_2}(\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}_2) - \frac{1}{\mu_1}(\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}_1)\right] = \vec{\boldsymbol{\alpha}}_f \quad (1)$$

$$\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{B}}_2 - \vec{\boldsymbol{B}}_1) = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}_2 - \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}_1) = 0 \quad (2)$$

ugly

对静磁场

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{B}}, \quad \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{\boldsymbol{n}} \times (\vec{\boldsymbol{A}}_2 - \vec{\boldsymbol{A}}_1) = 0, \quad \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{A}}_2 - \vec{\boldsymbol{A}}_1) = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{\boldsymbol{A}}_2 = \vec{\boldsymbol{A}}_1 \quad (3)$$

取代 (2) 式 (why?)

能否进一步简化？

矢势的边值关系

两种均匀介质区界面，有

$$\begin{aligned}\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)&=\vec{\alpha}\\ \vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)&=0\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}\vec{n}\times\left[\frac{1}{\mu_2}(\nabla\times\vec{A}_2)-\frac{1}{\mu_1}(\nabla\times\vec{A}_1)\right]&=\vec{\alpha}_f &(1)\\ \vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{A}_2-\nabla\times\vec{A}_1)&=0 &(2)\end{aligned}$$

ugly

对静磁场

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{A}&=\vec{B}\\ \nabla\cdot\vec{A}&=0\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}\vec{n}\times(\vec{A}_2-\vec{A}_1)&=0\\ \vec{n}\cdot(\vec{A}_2-\vec{A}_1)&=0\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\vec{A}_2=\vec{A}_1\qquad(3)$$

取代 (2) 式　(why?)

能否进一步简化？对一般介质，$\vec{H}=\vec{B}/\mu_0-\vec{M}$，

矢势的边值关系

两种均匀介质区界面，有

$$\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{n}\times\left[\frac{1}{\mu_2}(\nabla\times\vec{A}_2)-\frac{1}{\mu_1}(\nabla\times\vec{A}_1)\right]=\vec{\alpha}_f \qquad (1)$$

$$\vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0 \qquad \qquad \vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{A}_2-\nabla\times\vec{A}_1)=0 \qquad (2)$$

ugly

对静磁场

$$\nabla\times\vec{A}=\vec{B} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{n}\times(\vec{A}_2-\vec{A}_1)=0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{A}_2=\vec{A}_1 \qquad (3)$$

$$\nabla\cdot\vec{A}=0 \qquad \qquad \vec{n}\cdot(\vec{A}_2-\vec{A}_1)=0$$

取代 (2) 式 (why?)

能否进一步简化？对一般介质，$\vec{H}=\vec{B}/\mu_0-\vec{M}$，

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0(\vec{j}_f+\vec{j}_M)$$ 利用 $\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}=-\nabla^2\vec{A}$

矢势的边值关系

两种均匀介质区界面，有

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{H}}_2-\vec{\boldsymbol{H}}_1)&=\vec{\boldsymbol{\alpha}}\\ \vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{B}}_2-\vec{\boldsymbol{B}}_1)&=0\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{n}}\times\left[\frac{1}{\mu_2}(\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}_2)-\frac{1}{\mu_1}(\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}_1)\right]&=\vec{\boldsymbol{\alpha}}_f &(1)\\ \vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}_2-\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}_1)&=0 &(2)\end{aligned}$$

ugly

对静磁场

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}&=\vec{\boldsymbol{B}}\\ \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}&=0\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{A}}_2-\vec{\boldsymbol{A}}_1)&=0\\ \vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{A}}_2-\vec{\boldsymbol{A}}_1)&=0\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\vec{\boldsymbol{A}}_2=\vec{\boldsymbol{A}}_1\qquad(3)$$

取代 (2) 式　(why?)

能否进一步简化？对一般介质，$\vec{\boldsymbol{H}}=\vec{\boldsymbol{B}}/\mu_0-\vec{\boldsymbol{M}}$，

$\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}=\mu_0(\vec{\boldsymbol{j}}_f+\vec{\boldsymbol{j}}_M)$　利用 $\nabla\times(\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}})=\nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}})-\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}=-\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}$

可得 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 满足：

$$\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}=-\mu_0(\vec{\boldsymbol{j}}_f+\vec{\boldsymbol{j}}_M)=-\mu_0(\vec{\boldsymbol{j}}_f+\nabla\times\vec{\boldsymbol{M}})$$

矢势的边值关系

两种均匀介质区界面，有

$$\begin{aligned} &\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{\alpha} \\ &\vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} &\vec{n}\times\left[\tfrac{1}{\mu_2}(\nabla\times\vec{A}_2)-\tfrac{1}{\mu_1}(\nabla\times\vec{A}_1)\right]=\vec{\alpha}_f \qquad (1) \\ &\vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{A}_2-\nabla\times\vec{A}_1)=0 \qquad (2) \end{aligned}$$

ugly

对静磁场

$$\begin{aligned} &\nabla\times\vec{A}=\vec{B} \\ &\nabla\cdot\vec{A}=0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} &\vec{n}\times(\vec{A}_2-\vec{A}_1)=0 \\ &\vec{n}\cdot(\vec{A}_2-\vec{A}_1)=0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \vec{A}_2=\vec{A}_1 \qquad (3)$$

取代 (2) 式 (why?)

能否进一步简化？对一般介质，$\vec{H}=\vec{B}/\mu_0-\vec{M}$，

$\nabla\times\vec{B}=\mu_0(\vec{j}_f+\vec{j}_M)$ 利用 $\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}=-\nabla^2\vec{A}$

可得 $\vec{A}$ 满足：

$$\nabla^2\vec{A}=-\mu_0(\vec{j}_f+\vec{j}_M)=-\mu_0(\vec{j}_f+\nabla\times\vec{M})=\nabla\cdot(\nabla\vec{A})$$

矢势的边值关系

两种均匀介质区界面，有

$$\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{\alpha} \quad\Rightarrow\quad \vec{n}\times\left[\frac{1}{\mu_2}(\nabla\times\vec{A}_2)-\frac{1}{\mu_1}(\nabla\times\vec{A}_1)\right]=\vec{\alpha}_f \qquad (1)$$

$$\vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{A}_2-\nabla\times\vec{A}_1)=0 \qquad (2)$$

ugly

对静磁场

$$\nabla\times\vec{A}=\vec{B},\quad \nabla\cdot\vec{A}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{n}\times(\vec{A}_2-\vec{A}_1)=0,\quad \vec{n}\cdot(\vec{A}_2-\vec{A}_1)=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{A}_2=\vec{A}_1 \qquad (3)$$

取代 (2) 式 (why?)

能否进一步简化？对一般介质，$\vec{H}=\vec{B}/\mu_0-\vec{M}$，

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0(\vec{j}_f+\vec{j}_M)$$

利用 $\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}=-\nabla^2\vec{A}$

可得 $\vec{A}$ 满足：

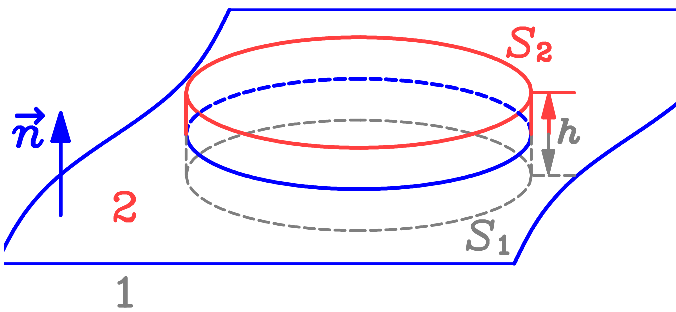
$$\nabla^2\vec{A}=-\mu_0(\vec{j}_f+\vec{j}_M)=-\mu_0(\vec{j}_f+\nabla\times\vec{M})=\nabla\cdot(\nabla\vec{A})$$

化成积分形式：

$$\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot(\nabla\vec{A})\,\mathrm{d}\sigma=-\mu_0\int\vec{j}_f\,\mathrm{d}\tau-\mu_0\oint\vec{n}\times\vec{M}\,\mathrm{d}\sigma$$

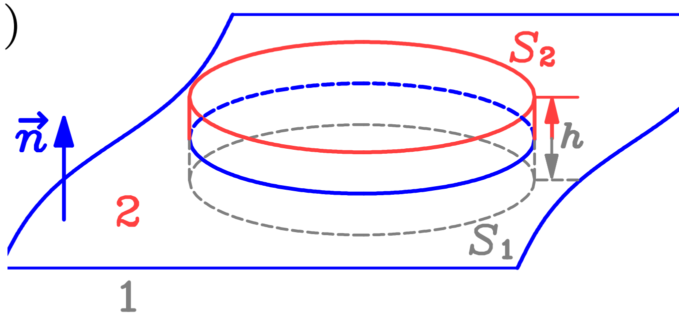
可得 $\vec{A}$ 满足：

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0(\vec{j}_f + \vec{j}_M) = -\mu_0(\vec{j}_f + \nabla \times \vec{M})$$



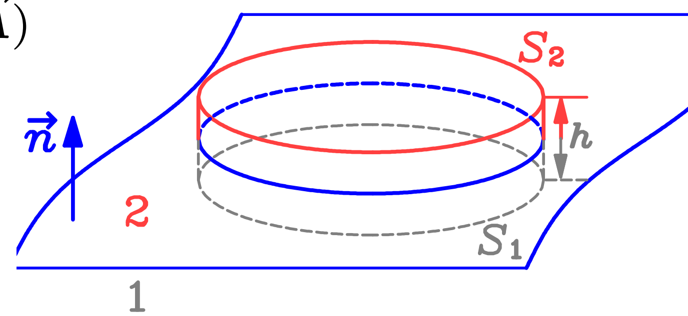
可得 $\vec{A}$ 满足：

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0(\vec{j}_f + \vec{j}_M) = -\mu_0(\vec{j}_f + \nabla \times \vec{M}) = \nabla \cdot (\nabla \vec{A})$$



可得 $\vec{A}$ 满足:

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0(\vec{j}_f + \vec{j}_M) = -\mu_0(\vec{j}_f + \nabla\times\vec{M}) = \nabla\cdot(\nabla\vec{A})$$

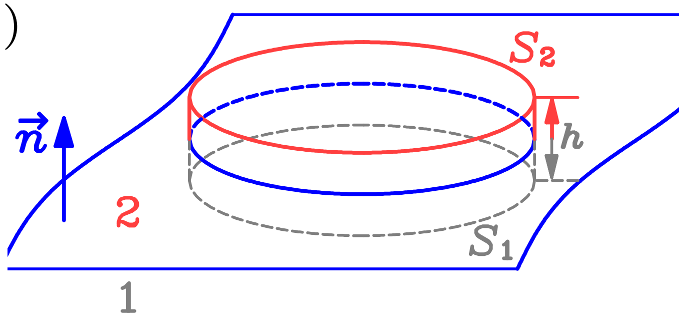


利用 $\int \nabla\cdot\overleftrightarrow{t}\,\mathrm{d}\tau = \oint \vec{n}\cdot\overleftrightarrow{t}\,\mathrm{d}\sigma$，$\int \nabla\times\vec{g}\,\mathrm{d}\tau = \oint \vec{n}\times\vec{g}\,\mathrm{d}\sigma$ 化成积分形式:

$$\oint_S \vec{n}\cdot(\nabla\vec{A})\,\mathrm{d}\sigma = -\mu_0\int_V \vec{j}_f\,\mathrm{d}\tau - \mu_0\oint_S \vec{n}\times\vec{M}\,\mathrm{d}\sigma$$

可得 $\vec{A}$ 满足：

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0(\vec{j}_f + \vec{j}_M) = -\mu_0(\vec{j}_f + \nabla\times\vec{M}) = \nabla\cdot(\nabla\vec{A})$$



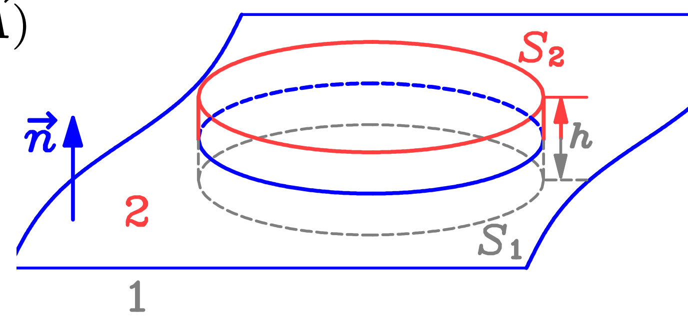
利用 $\displaystyle\int \nabla\cdot\overset{\leftrightarrow}{t}\,\mathrm{d}\tau = \oint \vec{n}\cdot\overset{\leftrightarrow}{t}\,\mathrm{d}\sigma$，$\displaystyle\int \nabla\times\vec{g}\,\mathrm{d}\tau = \oint \vec{n}\times\vec{g}\,\mathrm{d}\sigma$ 化成积分形式：

$$\oint_S \vec{n}\cdot(\nabla\vec{A})\,\mathrm{d}\sigma = -\mu_0\int_V \vec{j}_f\,\mathrm{d}\tau - \mu_0\oint_S \vec{n}\times\vec{M}\,\mathrm{d}\sigma$$

取 V 为如图所示小扁平盒 $h\to 0$，右边第一项利用：$\vec{j}_f\,\mathrm{d}\tau = \vec{j}_f\,hS = \lim\limits_{h\to 0}(\vec{j}_f h)S = \vec{\alpha}_f\,S$

可得 $\vec{A}$ 满足：

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0(\vec{j}_f + \vec{j}_M) = -\mu_0(\vec{j}_f + \nabla\times\vec{M}) = \nabla\cdot(\nabla\vec{A})$$



利用 $\displaystyle\int \nabla\cdot\overleftrightarrow{t}\,\mathrm{d}\tau = \oint \vec{n}\cdot\overleftrightarrow{t}\,\mathrm{d}\sigma$，$\displaystyle\int \nabla\times\vec{g}\,\mathrm{d}\tau = \oint \vec{n}\times\vec{g}\,\mathrm{d}\sigma$ 化成积分形式：

$$\oint_S \vec{n}\cdot(\nabla\vec{A})\,\mathrm{d}\sigma = -\mu_0\int_V \vec{j}_f\,\mathrm{d}\tau - \mu_0\oint_S \vec{n}\times\vec{M}\,\mathrm{d}\sigma$$

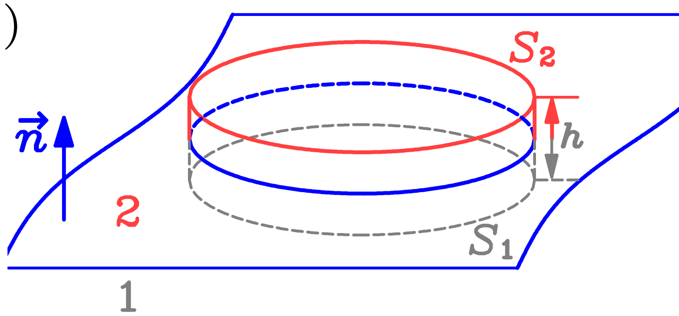
取 V 为如图所示小扁平盒 $h\to 0$，右边第一项利用：$\vec{j}_f\,\mathrm{d}\tau = \vec{j}_f\,hS = \lim\limits_{h\to 0}(\vec{j}_f h)S = \vec{\alpha}_f\,S$

左边 $= \left(\dfrac{\partial\vec{A}_2}{\partial n} - \dfrac{\partial\vec{A}_1}{\partial n}\right)S + \displaystyle\int_{侧面}\vec{n}\cdot(\nabla\vec{A})\,\mathrm{d}\sigma$，　右边 $= -\mu_0\,\vec{\alpha}_f S - \mu_0\,\vec{\alpha}_M S$

可得 $\vec{A}$ 满足：

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0(\vec{j}_f + \vec{j}_M) = -\mu_0(\vec{j}_f + \nabla\times\vec{M}) = \nabla\cdot(\nabla\vec{A})$$

利用 $\displaystyle\int \nabla\cdot\overleftrightarrow{t}\,\mathrm{d}\tau = \oint \vec{n}\cdot\overleftrightarrow{t}\,\mathrm{d}\sigma$，$\displaystyle\int \nabla\times\vec{g}\,\mathrm{d}\tau = \oint \vec{n}\times\vec{g}\,\mathrm{d}\sigma$ 化成积分形式：



$$\oint_S \vec{n}\cdot(\nabla\vec{A})\,\mathrm{d}\sigma = -\mu_0\int_V \vec{j}_f\,\mathrm{d}\tau - \mu_0\oint_S \vec{n}\times\vec{M}\,\mathrm{d}\sigma$$

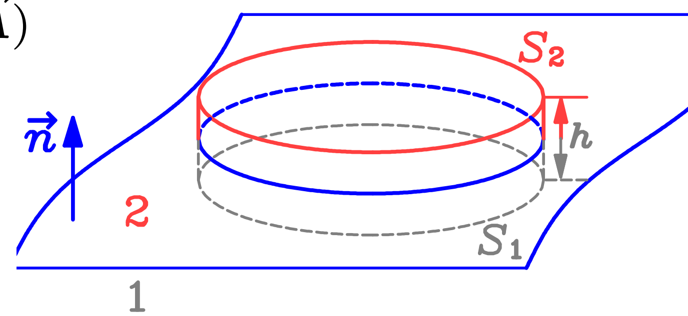
取 V 为如图所示小扁平盒 $h\to 0$，右边第一项利用：$\vec{j}_f\,\mathrm{d}\tau = \vec{j}_f\,hS = \lim\limits_{h\to 0}(\vec{j}_f h)S = \vec{\alpha}_f\,S$

左边 $\displaystyle = \left(\frac{\partial\vec{A}_2}{\partial n} - \frac{\partial\vec{A}_1}{\partial n}\right)S + \int_{\text{侧面}} \vec{n}\cdot(\nabla\vec{A})\,\mathrm{d}\sigma,$　　右边 $= -\mu_0\,\vec{\alpha}_f S - \mu_0\,\vec{\alpha}_M S$

从而有：$\displaystyle\frac{\partial\vec{A}_2}{\partial n} - \frac{\partial\vec{A}_1}{\partial n} = -\mu_0(\vec{\alpha}_f + \vec{\alpha}_M)$　　可取代 (1) 式，其中 $\vec{\alpha}_M = \vec{n}\times(\vec{M}_2 - \vec{M}_1)$

可得 $\vec{A}$ 满足：

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0(\vec{j}_f + \vec{j}_M) = -\mu_0(\vec{j}_f + \nabla\times\vec{M}) = \nabla\cdot(\nabla\vec{A})$$



利用 $\displaystyle\int\nabla\cdot\overleftrightarrow{t}\,d\tau = \oint\vec{n}\cdot\overleftrightarrow{t}\,d\sigma$，$\displaystyle\int\nabla\times\vec{g}\,d\tau = \oint\vec{n}\times\vec{g}\,d\sigma$ 化成积分形式：

$$\oint_S\vec{n}\cdot(\nabla\vec{A})\,d\sigma = -\mu_0\int_V\vec{j}_f\,d\tau - \mu_0\oint_S\vec{n}\times\vec{M}\,d\sigma$$

取 V 为如图所示小扁平盒 $h\to 0$，右边第一项利用：$\vec{j}_f\,d\tau = \vec{j}_f\,hS = \lim\limits_{h\to 0}(\vec{j}_f h)S = \vec{\alpha}_f\,S$

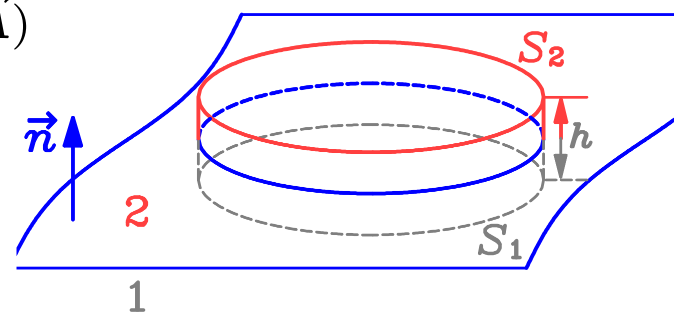
$$\text{左边} = \left(\frac{\partial\vec{A}_2}{\partial n} - \frac{\partial\vec{A}_1}{\partial n}\right)S + \int_{\text{侧面}}\vec{n}\cdot(\nabla\vec{A})\,d\sigma, \qquad \text{右边} = -\mu_0\,\vec{\alpha}_f S - \mu_0\,\vec{\alpha}_M S$$

从而有：$\displaystyle\frac{\partial\vec{A}_2}{\partial n} - \frac{\partial\vec{A}_1}{\partial n} = -\mu_0(\vec{\alpha}_f + \vec{\alpha}_M)$ 可取代 (1) 式，其中 $\vec{\alpha}_M = \vec{n}\times(\vec{M}_2 - \vec{M}_1)$

静磁场库仑规范条件下，矢势的边值关系为：

可得 $\vec{A}$ 满足：

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0(\vec{j}_f + \vec{j}_M) = -\mu_0(\vec{j}_f + \nabla\times\vec{M}) = \nabla\cdot(\nabla\vec{A})$$



利用 $\begin{aligned}&\int \nabla\cdot\overleftrightarrow{t}\,\mathrm{d}\tau = \oint \vec{n}\cdot\overleftrightarrow{t}\,\mathrm{d}\sigma\\ &\int \nabla\times\vec{g}\,\mathrm{d}\tau = \oint \vec{n}\times\vec{g}\,\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$ 化成积分形式：

$$\oint_S \vec{n}\cdot(\nabla\vec{A})\,\mathrm{d}\sigma = -\mu_0\int_V \vec{j}_f\,\mathrm{d}\tau - \mu_0\oint_S \vec{n}\times\vec{M}\,\mathrm{d}\sigma$$

取 V 为如图所示小扁平盒 $h\to 0$，右边第一项利用：$\vec{j}_f\,\mathrm{d}\tau = \vec{j}_f\,hS = \lim\limits_{h\to 0}(\vec{j}_f h)S = \vec{\alpha}_f\,S$

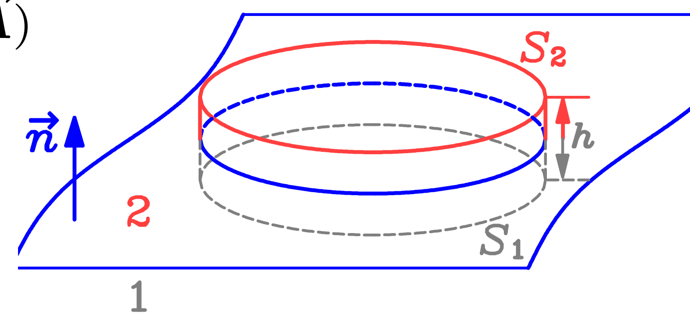
左边 $= \left(\dfrac{\partial\vec{A}_2}{\partial n} - \dfrac{\partial\vec{A}_1}{\partial n}\right)S + \displaystyle\int_{侧面}\vec{n}\cdot(\nabla\vec{A})\,\mathrm{d}\sigma$,　　右边 $= -\mu_0\,\vec{\alpha}_f S - \mu_0\,\vec{\alpha}_M S$

从而有：$\dfrac{\partial\vec{A}_2}{\partial n} - \dfrac{\partial\vec{A}_1}{\partial n} = -\mu_0(\vec{\alpha}_f + \vec{\alpha}_M)$　　可取代 (1) 式，其中 $\vec{\alpha}_M = \vec{n}\times(\vec{M}_2 - \vec{M}_1)$

静磁场库仑规范条件下，矢势的边值关系为：
$$\begin{cases}\vec{A}_1 = \vec{A}_2 & (3)\\[4pt] \dfrac{\partial\vec{A}_2}{\partial n} - \dfrac{\partial\vec{A}_1}{\partial n} = -\mu_0(\vec{\alpha}_f + \vec{\alpha}_M) & (4)\end{cases}$$

可得 $\vec{A}$ 满足：

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0(\vec{j}_f + \vec{j}_M) = -\mu_0(\vec{j}_f + \nabla\times\vec{M}) = \nabla\cdot(\nabla\vec{A})$$



利用 $\int \nabla\cdot\overset{\leftrightarrow}{t}\,\mathrm{d}\tau = \oint \vec{n}\cdot\overset{\leftrightarrow}{t}\,\mathrm{d}\sigma$，$\int \nabla\times\vec{g}\,\mathrm{d}\tau = \oint \vec{n}\times\vec{g}\,\mathrm{d}\sigma$ 化成积分形式：

$$\oint_S \vec{n}\cdot(\nabla\vec{A})\,\mathrm{d}\sigma = -\mu_0\int_V \vec{j}_f\,\mathrm{d}\tau - \mu_0\oint_S \vec{n}\times\vec{M}\,\mathrm{d}\sigma$$

取 V 为如图所示小扁平盒 $h\to 0$，右边第一项利用：$\vec{j}_f\,\mathrm{d}\tau = \vec{j}_f\,hS = \lim\limits_{h\to 0}(\vec{j}_f h)S = \vec{\alpha}_f\,S$

左边 $= \left(\dfrac{\partial\vec{A}_2}{\partial n} - \dfrac{\partial\vec{A}_1}{\partial n}\right)S + \displaystyle\int_{\text{侧面}}\vec{n}\cdot(\nabla\vec{A})\,\mathrm{d}\sigma$，　右边 $= -\mu_0\,\vec{\alpha}_f S - \mu_0\,\vec{\alpha}_M S$

从而有：$\dfrac{\partial\vec{A}_2}{\partial n} - \dfrac{\partial\vec{A}_1}{\partial n} = -\mu_0(\vec{\alpha}_f + \vec{\alpha}_M)$　　可取代 (1) 式，其中 $\vec{\alpha}_M = \vec{n}\times(\vec{M}_2 - \vec{M}_1)$

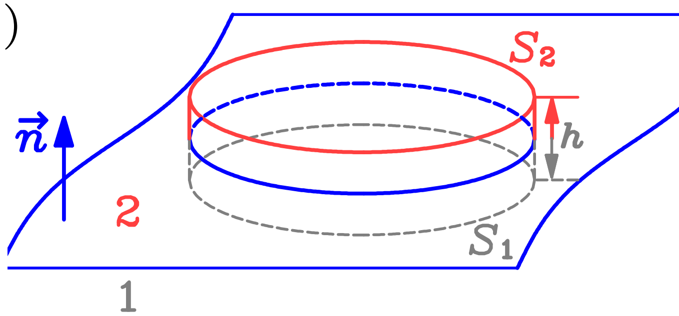
静磁场库仑规范条件下，矢势的边值关系为：

$$\begin{cases} \vec{A}_1 = \vec{A}_2 & (3) \\ \dfrac{\partial\vec{A}_2}{\partial n} - \dfrac{\partial\vec{A}_1}{\partial n} = -\mu_0(\vec{\alpha}_f + \vec{\alpha}_M) & (4) \end{cases}$$

或：

可得 $\vec{A}$ 满足：

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0(\vec{j}_f + \vec{j}_M) = -\mu_0(\vec{j}_f + \nabla\times\vec{M}) = \nabla\cdot(\nabla\vec{A})$$



利用 $\displaystyle\int \nabla\cdot\overleftrightarrow{t}\,\mathrm{d}\tau = \oint \vec{n}\cdot\overleftrightarrow{t}\,\mathrm{d}\sigma$，$\displaystyle\int \nabla\times\vec{g}\,\mathrm{d}\tau = \oint \vec{n}\times\vec{g}\,\mathrm{d}\sigma$ 化成积分形式：

$$\oint_S \vec{n}\cdot(\nabla\vec{A})\,\mathrm{d}\sigma = -\mu_0\int_V \vec{j}_f\,\mathrm{d}\tau - \mu_0\oint_S \vec{n}\times\vec{M}\,\mathrm{d}\sigma$$

取 V 为如图所示小扁平盒 $h\to 0$，右边第一项利用：$\vec{j}_f\,\mathrm{d}\tau = \vec{j}_f\,hS = \lim\limits_{h\to 0}(\vec{j}_f h)S = \vec{\alpha}_f\,S$

左边 $= \left(\dfrac{\partial\vec{A}_2}{\partial n} - \dfrac{\partial\vec{A}_1}{\partial n}\right)S + \displaystyle\int_{侧面}\vec{n}\cdot(\nabla\vec{A})\,\mathrm{d}\sigma$，　右边 $= -\mu_0\,\vec{\alpha}_f S - \mu_0\,\vec{\alpha}_M S$

从而有：$\dfrac{\partial\vec{A}_2}{\partial n} - \dfrac{\partial\vec{A}_1}{\partial n} = -\mu_0(\vec{\alpha}_f + \vec{\alpha}_M)$　　可取代 (1) 式，其中 $\vec{\alpha}_M = \vec{n}\times(\vec{M}_2 - \vec{M}_1)$

静磁场库仑规范条件下，矢势的边值关系为：

$$\begin{cases} \vec{A}_1 = \vec{A}_2 & (3) \\ \dfrac{\partial\vec{A}_2}{\partial n} - \dfrac{\partial\vec{A}_1}{\partial n} = -\mu_0(\vec{\alpha}_f + \vec{\alpha}_M) & (4) \end{cases}$$

或：

$$\begin{cases} \vec{A}_1 = \vec{A}_2 & (3) \\ \vec{n}\times\left[\frac{1}{\mu_2}(\nabla\times\vec{A}_2) - \frac{1}{\mu_1}(\nabla\times\vec{A}_1)\right] = \vec{\alpha}_f & (1) \end{cases}$$

三、静磁场的唯一性定理

三、静磁场的唯一性定理

定理： 在单连通区域 V 内给定 $\vec{j}_f$ 和 $\vec{\alpha}_f$，在 V 的边界 S 上给定 $\vec{A}$ 或 $\vec{B}$ 的切向分量，则在区域 V 内，$\vec{B}$ 唯一确定。

三、静磁场的唯一性定理

定理： 在单连通区域 V 内给定 $\vec{\boldsymbol{j}}_f$ 和 $\vec{\boldsymbol{\alpha}}_f$，在 V 的边界 S 上给定 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 或 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 的切向分量，则在区域 V 内，$\vec{\boldsymbol{B}}$ 唯一确定。 (证明略，参见教材 § 5.3)

三、静磁场的唯一性定理

定理： 在单连通区域 V 内给定 $\vec{j}_f$ 和 $\vec{\alpha}_f$，在 V 的边界 S 上给定 $\vec{A}$ 或 $\vec{B}$ 的切向分量，则在区域 V 内，$\vec{B}$ 唯一确定。 (证明略，参见教材 § 5.3)

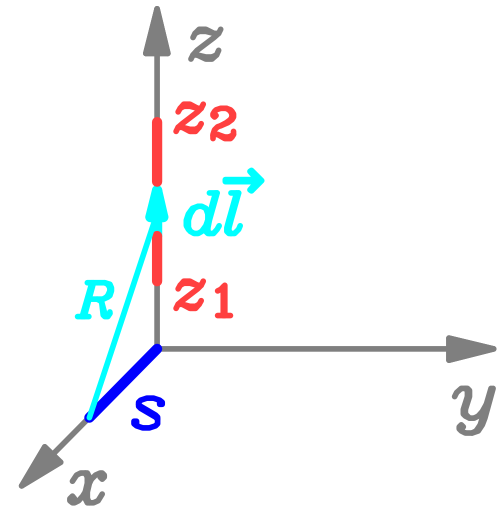
四、例题

三、静磁场的唯一性定理

定理： 在单连通区域 V 内给定 $\vec{j}_f$ 和 $\vec{\alpha}_f$，在 V 的边界 S 上给定 $\vec{A}$ 或 $\vec{B}$ 的切向分量，则在区域 V 内，$\vec{B}$ 唯一确定。 (证明略，参见教材 § 5.3)

四、例题

例 5：一直线段带电流 I，求空间矢势及磁场



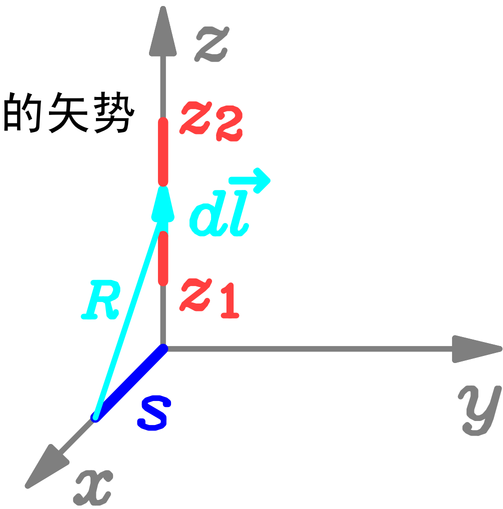
三、静磁场的唯一性定理

定理： 在单连通区域 V 内给定 $\vec{j}_f$ 和 $\vec{\alpha}_f$，在 V 的边界 S 上给定 $\vec{A}$ 或 $\vec{B}$ 的切向分量，则在区域 V 内，$\vec{B}$ 唯一确定。 (证明略，参见教材 § 5.3)

四、例题

例 5：一直线段带电流 I，求空间矢势及磁场

设导线在 z 轴，从 z_1 到 z_2，取柱坐标 (s,ϕ,z)，求柱坐标 $(s,0,0)$ 处的矢势

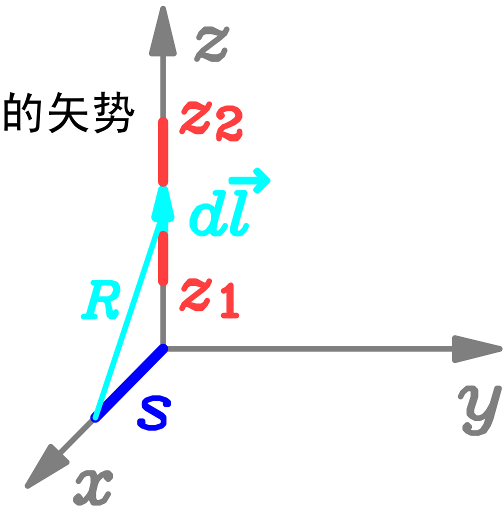


三、静磁场的唯一性定理

定理： 在单连通区域 V 内给定 $\vec{j}_f$ 和 $\vec{\alpha}_f$，在 V 的边界 S 上给定 $\vec{A}$ 或 $\vec{B}$ 的切向分量，则在区域 V 内，$\vec{B}$ 唯一确定。 (证明略，参见教材 § 5.3)

四、例题

例 5：一直线段带电流 I，求空间矢势及磁场



设导线在 z 轴，从 z_1 到 z_2，取柱坐标 (s, ϕ, z)，求柱坐标 $(s, 0, 0)$ 处的矢势

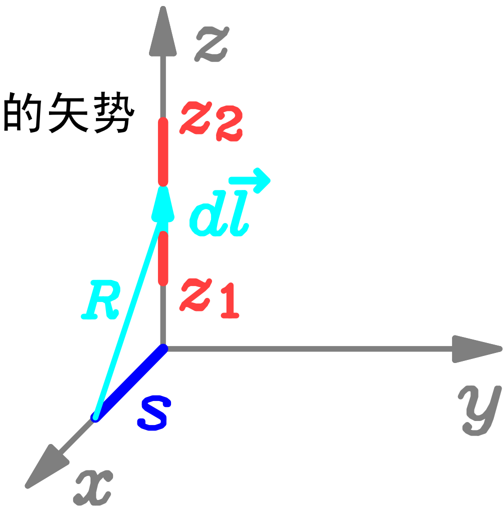
$$\vec{A}_{\text{有限}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{z_1}^{z_2} \frac{I\,\hat{e}_z\,\mathrm{d}z'}{\sqrt{s^2+z'^2}}$$

三、静磁场的唯一性定理

定理： 在单连通区域 V 内给定 $\vec{j}_f$ 和 $\vec{\alpha}_f$，在 V 的边界 S 上给定 $\vec{A}$ 或 $\vec{B}$ 的切向分量，则在区域 V 内，$\vec{B}$ 唯一确定。 (证明略，参见教材 § 5.3)

四、例题

例 5：一直线段带电流 I，求空间矢势及磁场



设导线在 z 轴，从 z_1 到 z_2，取柱坐标 (s,ϕ,z)，求柱坐标 $(s,0,0)$ 处的矢势

$$\vec{A}_{\text{有限}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{z_1}^{z_2}\frac{I\,\hat{e}_z\,\mathrm{d}z'}{\sqrt{s^2+z'^2}}$$

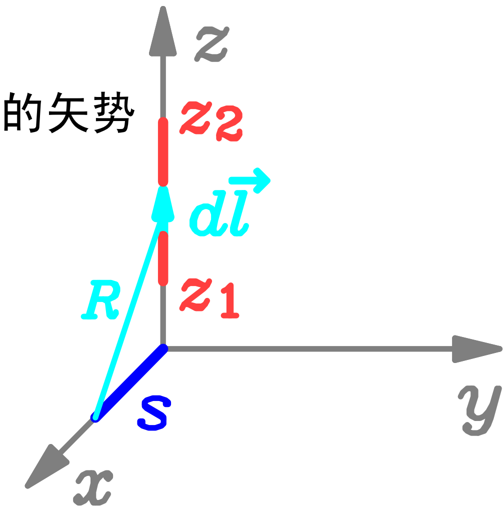
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\ln\left(z'+\sqrt{z'^2+s^2}\right)\right]\Big|_{z_1}^{z_2}\hat{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{z_2+\sqrt{z_2^2+s^2}}{z_1+\sqrt{z_1^2+s^2}}\right]\ \hat{e}_z$$

三、静磁场的唯一性定理

定理： 在单连通区域 V 内给定 $\vec{j}_f$ 和 $\vec{\alpha}_f$，在 V 的边界 S 上给定 $\vec{A}$ 或 $\vec{B}$ 的切向分量，则在区域 V 内，$\vec{B}$ 唯一确定。 (证明略，参见教材 § 5.3)

四、例题

例 5：一直线段带电流 I，求空间矢势及磁场



设导线在 z 轴，从 z_1 到 z_2，取柱坐标 (s,ϕ,z)，求柱坐标 $(s,0,0)$ 处的矢势

$$\vec{A}_{有限} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{z_1}^{z_2}\frac{I\,\hat{e}_z\,\mathrm{d}z'}{\sqrt{s^2+z'^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\ln\left(z'+\sqrt{z'^2+s^2}\right)\right]\Bigg|_{z_1}^{z_2}\hat{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{z_2+\sqrt{z_2^2+s^2}}{z_1+\sqrt{z_1^2+s^2}}\right]\quad\hat{e}_z$$

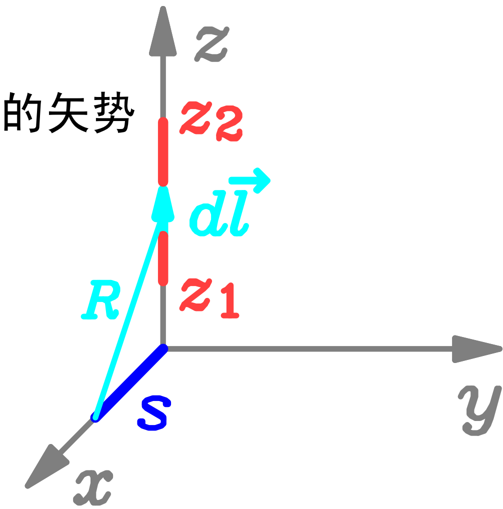
$$\vec{B}_{有限} = \nabla\times\vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s}\hat{e}_\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi s}\left[\frac{z_2}{\sqrt{z_2^2+s^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2+s^2}}\right]\quad\hat{e}_\phi$$

三、静磁场的唯一性定理

定理： 在单连通区域 V 内给定 $\vec{j}_f$ 和 $\vec{\alpha}_f$，在 V 的边界 S 上给定 $\vec{A}$ 或 $\vec{B}$ 的切向分量，则在区域 V 内，$\vec{B}$ 唯一确定。 (证明略，参见教材 § 5.3)

四、例题

例 5：一直线段带电流 I，求空间矢势及磁场



设导线在 z 轴，从 z_1 到 z_2，取柱坐标 (s,ϕ,z)，求柱坐标 $(s,0,0)$ 处的矢势

$$\vec{A}_{有限} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{z_1}^{z_2}\frac{I\,\hat{e}_z\,\mathrm{d}z'}{\sqrt{s^2+z'^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\ln\left(z'+\sqrt{z'^2+s^2}\right)\right]\Bigg|_{z_1}^{z_2}\hat{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{z_2+\sqrt{z_2^2+s^2}}{z_1+\sqrt{z_1^2+s^2}}\right]\hat{e}_z$$

$$\vec{B}_{有限} = \nabla\times\vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s}\hat{e}_\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi s}\left[\frac{z_2}{\sqrt{z_2^2+s^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2+s^2}}\right]\hat{e}_\phi$$

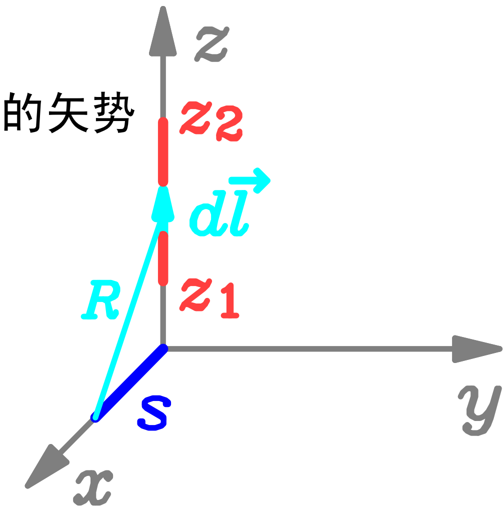
无穷长直导线：

三、静磁场的唯一性定理

定理： 在单连通区域 V 内给定 $\vec{j}_f$ 和 $\vec{\alpha}_f$，在 V 的边界 S 上给定 $\vec{A}$ 或 $\vec{B}$ 的切向分量，则在区域 V 内，$\vec{B}$ 唯一确定。 (证明略，参见教材 § 5.3)

四、例题

例 5：一直线段带电流 I，求空间矢势及磁场



设导线在 z 轴，从 z_1 到 z_2，取柱坐标 (s,ϕ,z)，求柱坐标 $(s,0,0)$ 处的矢势

$$\vec{A}_{有限} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{z_1}^{z_2} \frac{I\,\hat{e}_z\,\mathrm{d}z'}{\sqrt{s^2+z'^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\ln\left(z'+\sqrt{z'^2+s^2}\right)\right]\Big|_{z_1}^{z_2}\hat{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{z_2+\sqrt{z_2^2+s^2}}{z_1+\sqrt{z_1^2+s^2}}\right]\hat{e}_z$$

$$\vec{B}_{有限} = \nabla\times\vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s}\hat{e}_\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi s}\left[\frac{z_2}{\sqrt{z_2^2+s^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2+s^2}}\right]\hat{e}_\phi$$

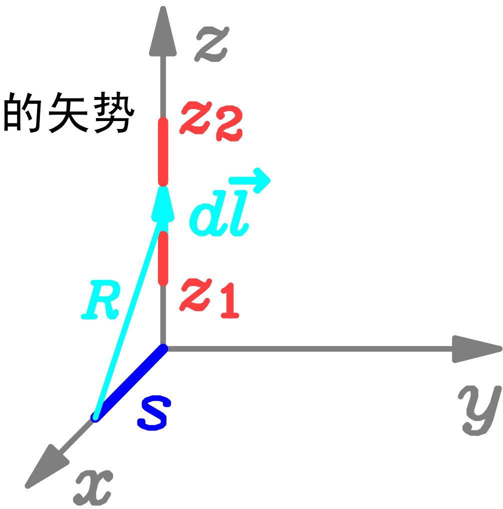
无穷长直导线： $$\vec{B} = \lim_{\substack{z_2\to+\infty\\ z_1\to-\infty}} \vec{B}_{有限} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{e}_\phi$$

三、静磁场的唯一性定理

定理： 在单连通区域 V 内给定 $\vec{j}_f$ 和 $\vec{\alpha}_f$，在 V 的边界 S 上给定 $\vec{A}$ 或 $\vec{B}$ 的切向分量，则在区域 V 内，$\vec{B}$ 唯一确定。 (证明略，参见教材 § 5.3)

四、例题

例 5：一直线段带电流 I，求空间矢势及磁场



设导线在 z 轴，从 z_1 到 z_2，取柱坐标 (s, ϕ, z)，求柱坐标 $(s, 0, 0)$ 处的矢势

$$\vec{A}_{\text{有限}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{z_1}^{z_2} \frac{I\,\hat{e}_z\,\mathrm{d}z'}{\sqrt{s^2 + z'^{\,2}}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\ln\left(z' + \sqrt{z'^{\,2} + s^2}\right)\right]\Bigg|_{z_1}^{z_2} \hat{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{z_2 + \sqrt{z_2^2 + s^2}}{z_1 + \sqrt{z_1^2 + s^2}}\right] \hat{e}_z$$

$$\vec{B}_{\text{有限}} = \nabla \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s}\hat{e}_\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi s}\left[\frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 + s^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 + s^2}}\right] \hat{e}_\phi$$

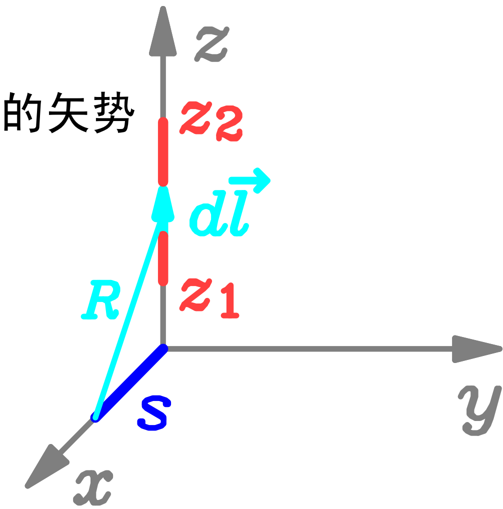
无穷长直导线： $\vec{B} = \lim\limits_{\substack{z_2 \to +\infty \\ z_1 \to -\infty}} \vec{B}_{\text{有限}} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi s}\,\hat{e}_\phi$ $\quad \vec{A} = \lim\limits_{\substack{z_2 \to +\infty \\ z_1 \to -\infty}} \vec{A}_{\text{有限}} =$ 发散

三、静磁场的唯一性定理

定理： 在单连通区域 V 内给定 $\vec{j}_f$ 和 $\vec{\alpha}_f$，在 V 的边界 S 上给定 $\vec{A}$ 或 $\vec{B}$ 的切向分量，则在区域 V 内，$\vec{B}$ 唯一确定。 (证明略，参见教材 § 5.3)

四、例题

例 5：一直线段带电流 I，求空间矢势及磁场



设导线在 z 轴，从 z_1 到 z_2，取柱坐标 (s,ϕ,z)，求柱坐标 $(s,0,0)$ 处的矢势

$$\vec{A}_{\text{有限}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{z_1}^{z_2} \frac{I\,\hat{e}_z\,\mathrm{d}z'}{\sqrt{s^2+z'^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\ln\left(z'+\sqrt{z'^2+s^2}\right)\right]\Big|_{z_1}^{z_2}\hat{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{z_2+\sqrt{z_2^2+s^2}}{z_1+\sqrt{z_1^2+s^2}}\right]\hat{e}_z$$

$$\vec{B}_{\text{有限}} = \nabla\times\vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s}\hat{e}_\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi s}\left[\frac{z_2}{\sqrt{z_2^2+s^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2+s^2}}\right]\hat{e}_\phi$$

无穷长直导线： $\vec{B} = \lim\limits_{\substack{z_2\to+\infty\\ z_1\to-\infty}} \vec{B}_{\text{有限}} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{e}_\phi$ $\quad\vec{A} = \lim\limits_{\substack{z_2\to+\infty\\ z_1\to-\infty}} \vec{A}_{\text{有限}} =$ 发散 ?

选取 s_0 处矢势为参考点 $\vec{\boldsymbol{A}}(s_0) = 0$:

$$\vec{\boldsymbol{A}}(s) - \vec{\boldsymbol{A}}(s_0)$$

选取 s_0 处矢势为参考点 $\vec{\boldsymbol{A}}(s_0)=0$：

$$\vec{\boldsymbol{A}}(s)-\vec{\boldsymbol{A}}(s_0) = \lim_{\substack{z_2\to+\infty \\ z_1\to-\infty}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln\left[\frac{z_2+\sqrt{z_2^2+s^2}}{z_1+\sqrt{z_1^2+s^2}} \quad \frac{z_1+\sqrt{z_1^2+s_0^2}}{z_2+\sqrt{z_2^2+s_0^2}}\right] \hat{\boldsymbol{e}}_z$$

选取 s_0 处矢势为参考点 $\vec{A}(s_0)=0$：

$$\vec{A}(s)-\vec{A}(s_0)=\lim_{\substack{z_2\to+\infty\\ z_1\to-\infty}}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{z_2+\sqrt{z_2^2+s^2}}{z_1+\sqrt{z_1^2+s^2}}\;\frac{z_1+\sqrt{z_1^2+s_0^2}}{z_2+\sqrt{z_2^2+s_0^2}}\right]\hat{e}_z$$

令： $z_1=-M$, $z_2=M$

选取 s_0 处矢势为参考点 $\vec{\boldsymbol{A}}(s_0)=0$：

$$\vec{\boldsymbol{A}}(s)-\vec{\boldsymbol{A}}(s_0) = \lim_{\substack{z_2\to+\infty\\ z_1\to-\infty}} \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{z_2+\sqrt{z_2^2+s^2}}{z_1+\sqrt{z_1^2+s^2}}\ \frac{z_1+\sqrt{z_1^2+s_0^2}}{z_2+\sqrt{z_2^2+s_0^2}}\right]\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

令：$z_1=-M$，$z_2=M$

$$= \lim_{\substack{\eta\to 0\\ \eta_0\to 0}} \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{1+\sqrt{1+\eta^2}}{-1+\sqrt{1+\eta^2}}\ \frac{-1+\sqrt{1+\eta_0^2}}{1+\sqrt{1+\eta_0^2}}\right]\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

选取 s_0 处矢势为参考点 $\vec{\boldsymbol{A}}(s_0)=0$：

$$\vec{\boldsymbol{A}}(s)-\vec{\boldsymbol{A}}(s_0)=\lim_{\substack{z_2\to+\infty\\ z_1\to-\infty}}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{z_2+\sqrt{z_2^2+s^2}}{z_1+\sqrt{z_1^2+s^2}}\ \frac{z_1+\sqrt{z_1^2+s_0^2}}{z_2+\sqrt{z_2^2+s_0^2}}\right]\hat{\boldsymbol{e}}_z \quad 令： \begin{matrix} z_1=-M \\ z_2=M \end{matrix}$$

$$=\lim_{\substack{\eta\to 0\\ \eta_0\to 0}}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{1+\sqrt{1+\eta^2}}{-1+\sqrt{1+\eta^2}}\ \frac{-1+\sqrt{1+\eta_0^2}}{1+\sqrt{1+\eta_0^2}}\right]\hat{\boldsymbol{e}}_z \quad 其中： \begin{matrix} \eta=s/M \\ \eta_0=s_0/M \end{matrix}$$

选取 s_0 处矢势为参考点 $\vec{A}(s_0)=0$：

$$\vec{A}(s)-\vec{A}(s_0) = \lim_{\substack{z_2\to+\infty\\ z_1\to-\infty}} \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{z_2+\sqrt{z_2^2+s^2}}{z_1+\sqrt{z_1^2+s^2}}\ \frac{z_1+\sqrt{z_1^2+s_0^2}}{z_2+\sqrt{z_2^2+s_0^2}}\right]\hat{\boldsymbol{e}}_z \quad 令：\begin{matrix} z_1=-M \\ z_2=M \end{matrix}$$

$$= \lim_{\substack{\eta\to0\\ \eta_0\to0}} \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{1+\sqrt{1+\eta^2}}{-1+\sqrt{1+\eta^2}}\ \frac{-1+\sqrt{1+\eta_0^2}}{1+\sqrt{1+\eta_0^2}}\right]\hat{\boldsymbol{e}}_z \quad 其中：\begin{matrix} \eta=s/M \\ \eta_0=s_0/M \end{matrix}$$

$$= \lim_{\substack{\eta\to0\\ \eta_0\to0}} \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{\frac{1}{2}\eta_0^2}{\frac{1}{2}\eta^2}\right]\hat{\boldsymbol{e}}_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{s_0}{s}\ \hat{\boldsymbol{e}}_z$$

选取 s_0 处矢势为参考点 $\vec{A}(s_0)=0$：

$$\vec{A}(s)-\vec{A}(s_0) = \lim_{\substack{z_2\to+\infty\\ z_1\to-\infty}} \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{z_2+\sqrt{z_2^2+s^2}}{z_1+\sqrt{z_1^2+s^2}}\ \frac{z_1+\sqrt{z_1^2+s_0^2}}{z_2+\sqrt{z_2^2+s_0^2}}\right]\hat{e}_z \quad \text{令：}\ \begin{array}{l} z_1=-M \\ z_2=M \end{array}$$

$$= \lim_{\substack{\eta\to 0\\ \eta_0\to 0}} \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{1+\sqrt{1+\eta^2}}{-1+\sqrt{1+\eta^2}}\ \frac{-1+\sqrt{1+\eta_0^2}}{1+\sqrt{1+\eta_0^2}}\right]\hat{e}_z \quad \text{其中：}\ \begin{array}{l} \eta=s/M \\ \eta_0=s_0/M \end{array}$$

$$= \lim_{\substack{\eta\to 0\\ \eta_0\to 0}} \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{\frac{1}{2}\eta_0^2}{\frac{1}{2}\eta^2}\right]\hat{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{s_0}{s}\ \hat{e}_z$$

容易验证

选取 s_0 处矢势为参考点 $\vec{A}(s_0)=0$：

$$\vec{A}(s)-\vec{A}(s_0)=\lim_{\substack{z_2\to+\infty\\ z_1\to-\infty}}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{z_2+\sqrt{z_2^2+s^2}}{z_1+\sqrt{z_1^2+s^2}}\;\frac{z_1+\sqrt{z_1^2+s_0^2}}{z_2+\sqrt{z_2^2+s_0^2}}\right]\hat{e}_z \quad 令：\begin{array}{l} z_1=-M\\ z_2=M\end{array}$$

$$=\lim_{\substack{\eta\to 0\\ \eta_0\to 0}}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{1+\sqrt{1+\eta^2}}{-1+\sqrt{1+\eta^2}}\;\frac{-1+\sqrt{1+\eta_0^2}}{1+\sqrt{1+\eta_0^2}}\right]\hat{e}_z \quad 其中：\begin{array}{l} \eta=s/M\\ \eta_0=s_0/M\end{array}$$

$$=\lim_{\substack{\eta\to 0\\ \eta_0\to 0}}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{\frac{1}{2}\eta_0^2}{\frac{1}{2}\eta^2}\right]\hat{e}_z=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{s_0}{s}\,\hat{e}_z$$

容易验证

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\nabla\ln\frac{s_0}{s}\right]\times\hat{e}_z=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{s}\nabla s\times\hat{e}_z$$

选取 s_0 处矢势为参考点 $\vec{A}(s_0)=0$：

$$\vec{A}(s)-\vec{A}(s_0)=\lim_{\substack{z_2\to+\infty\\ z_1\to-\infty}}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{z_2+\sqrt{z_2^2+s^2}}{z_1+\sqrt{z_1^2+s^2}}\;\frac{z_1+\sqrt{z_1^2+s_0^2}}{z_2+\sqrt{z_2^2+s_0^2}}\right]\hat{\boldsymbol{e}}_z \qquad \text{令：}\ \begin{matrix} z_1=-M\\ z_2=M\end{matrix}$$

$$=\lim_{\substack{\eta\to 0\\ \eta_0\to 0}}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{1+\sqrt{1+\eta^2}}{-1+\sqrt{1+\eta^2}}\;\frac{-1+\sqrt{1+\eta_0^2}}{1+\sqrt{1+\eta_0^2}}\right]\hat{\boldsymbol{e}}_z \qquad \text{其中：}\ \begin{matrix}\eta=s/M\\ \eta_0=s_0/M\end{matrix}$$

$$=\lim_{\substack{\eta\to 0\\ \eta_0\to 0}}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{\frac{1}{2}\eta_0^2}{\frac{1}{2}\eta^2}\right]\hat{\boldsymbol{e}}_z=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{s_0}{s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

容易验证

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\nabla\ln\frac{s_0}{s}\right]\times\hat{\boldsymbol{e}}_z=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{s}\nabla s\times\hat{\boldsymbol{e}}_z=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{s}\overbrace{\hat{\boldsymbol{e}}_s\times\hat{\boldsymbol{e}}_z}^{-\hat{\boldsymbol{e}}_\phi}=\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$$

选取 s_0 处矢势为参考点 $\vec{A}(s_0)=0$：

$$\vec{A}(s)-\vec{A}(s_0) = \lim_{\substack{z_2\to+\infty \\ z_1\to-\infty}} \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{z_2+\sqrt{z_2^2+s^2}}{z_1+\sqrt{z_1^2+s^2}}\ \frac{z_1+\sqrt{z_1^2+s_0^2}}{z_2+\sqrt{z_2^2+s_0^2}}\right]\hat{e}_z \quad \text{令：} \begin{aligned} z_1 &= -M \\ z_2 &= M \end{aligned}$$

$$= \lim_{\substack{\eta\to 0 \\ \eta_0\to 0}} \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{1+\sqrt{1+\eta^2}}{-1+\sqrt{1+\eta^2}}\ \frac{-1+\sqrt{1+\eta_0^2}}{1+\sqrt{1+\eta_0^2}}\right]\hat{e}_z \quad \text{其中：} \begin{aligned} \eta &= s/M \\ \eta_0 &= s_0/M \end{aligned}$$

$$= \lim_{\substack{\eta\to 0 \\ \eta_0\to 0}} \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{\frac{1}{2}\eta_0^2}{\frac{1}{2}\eta^2}\right]\hat{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{s_0}{s}\ \hat{e}_z$$

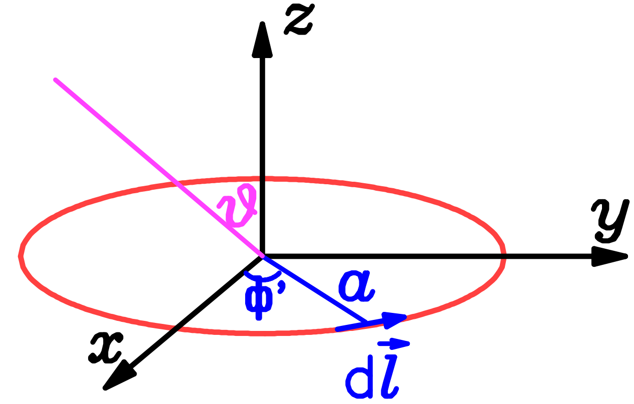
容易验证

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\nabla\ln\frac{s_0}{s}\right]\times\hat{e}_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{s}\nabla s\times\hat{e}_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{s}\overbrace{\hat{e}_s\times\hat{e}_z}^{-\hat{e}_\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{e}_\phi$$

例 6：教材　p124 例题 2

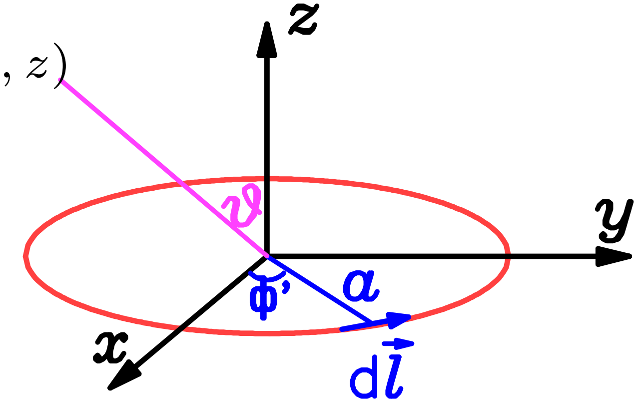
例 7：半径为 a 的导线圆环载电流 I，求离导线很远处的矢势

例 7：半径为 a 的导线圆环载电流 I，求离导线很远处的矢势



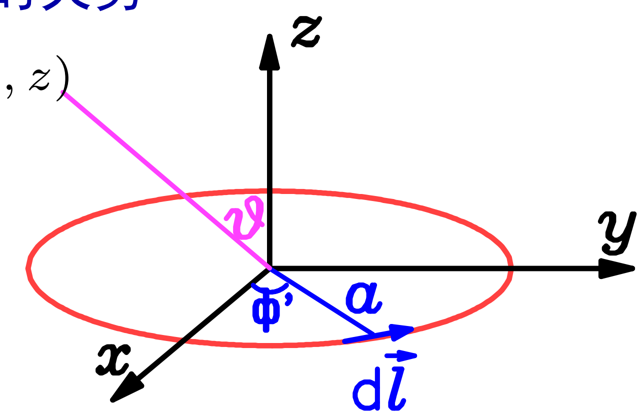
例 7：半径为 a 的导线圆环载电流 I，求离导线很远处的矢势

导线圆环放置于 xy 平面，圆心在坐标原点，选柱坐标系：(s, ϕ, z)



例 7：半径为 a 的导线圆环载电流 I，求离导线很远处的矢势

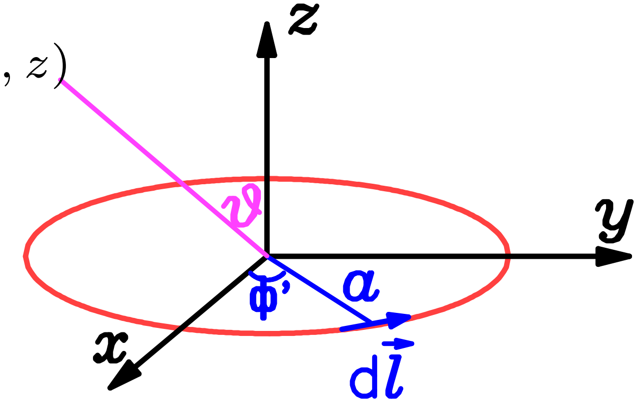
导线圆环放置于 xy 平面，圆心在坐标原点，选柱坐标系：(s, ϕ, z)



由 $\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \frac{I\mathrm{d}\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ 知 $A_z = 0$，且 $\vec{A}$ 与 ϕ 无关

例 7：半径为 a 的导线圆环载电流 I，求离导线很远处的矢势

导线圆环放置于 xy 平面，圆心在坐标原点，选柱坐标系：(s, ϕ, z)

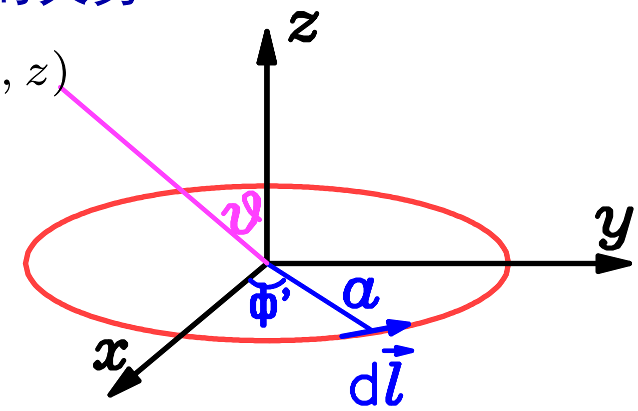


由 $\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{I\mathrm{d}\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ 知 $A_z = 0$，且 $\vec{A}$ 与 ϕ 无关

可在 xz 平面，即 $\phi = 0$ 即 $\vec{r} = s\,\hat{e}_x + z\,\hat{e}_z$ 处求 $\vec{A}$

例 7：半径为 a 的导线圆环载电流 I，求离导线很远处的矢势

导线圆环放置于 xy 平面，圆心在坐标原点，选柱坐标系：(s, ϕ, z)

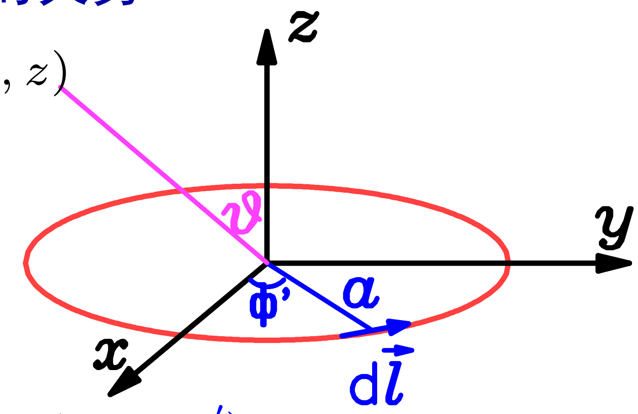


由 $\vec{\boldsymbol{A}} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{I\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}$ 知 $A_z = 0$，且 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 与 ϕ 无关

可在 xz 平面，即 $\phi = 0$ 即 $\vec{\boldsymbol{r}} = s\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$ 处求 $\vec{\boldsymbol{A}}$

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\cdot\,\hat{\boldsymbol{e}}_x}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}$$

例 7：半径为 a 的导线圆环载电流 I，求离导线很远处的矢势



导线圆环放置于 xy 平面，圆心在坐标原点，选柱坐标系：(s, ϕ, z)

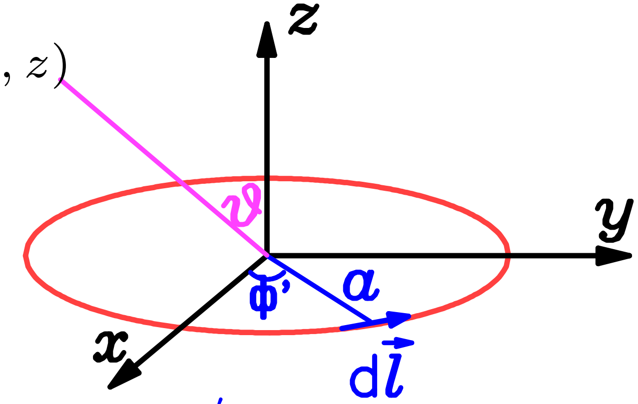
由 $\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{I\mathrm{d}\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ 知 $A_z = 0$，且 $\vec{A}$ 与 ϕ 无关

可在 xz 平面，即 $\phi = 0$ 即 $\vec{r} = s\,\hat{e}_x + z\,\hat{e}_z$ 处求 $\vec{A}$

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\mathrm{d}\vec{l}\cdot\,\hat{e}_x}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad \mathrm{d}\vec{l} = a\,\mathrm{d}\phi'\,\hat{e}_{\phi'} = a\,\mathrm{d}\phi'(-\,\hat{e}_x\sin\phi' + \,\hat{e}_y\cos\phi')$$

例 7：半径为 a 的导线圆环载电流 I，求离导线很远处的矢势

导线圆环放置于 xy 平面，圆心在坐标原点，选柱坐标系：(s, ϕ, z)



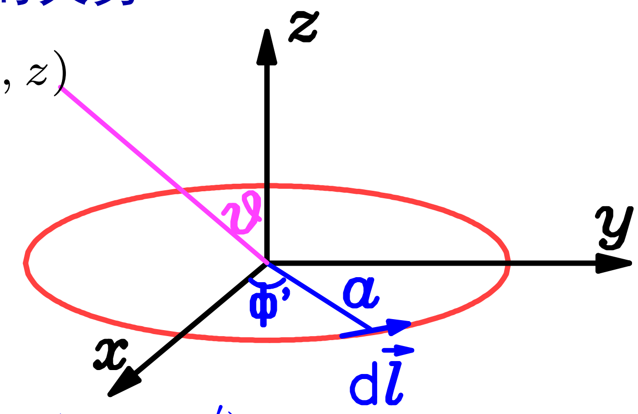
由 $\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{I\mathrm{d}\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$ 知 $A_z = 0$，且 $\vec{A}$ 与 ϕ 无关

可在 xz 平面，即 $\phi = 0$ 即 $\vec{r} = s\,\hat{e}_x + z\,\hat{e}_z$ 处求 $\vec{A}$

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\mathrm{d}\vec{l}\cdot\,\hat{e}_x}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \qquad \mathrm{d}\vec{l} = a\,\mathrm{d}\phi'\,\hat{e}_{\phi'} = a\,\mathrm{d}\phi'(-\,\hat{e}_x\sin\phi' + \,\hat{e}_y\cos\phi')$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\,a\,\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

例 7：半径为 a 的导线圆环载电流 I，求离导线很远处的矢势



导线圆环放置于 xy 平面，圆心在坐标原点，选柱坐标系：(s, ϕ, z)

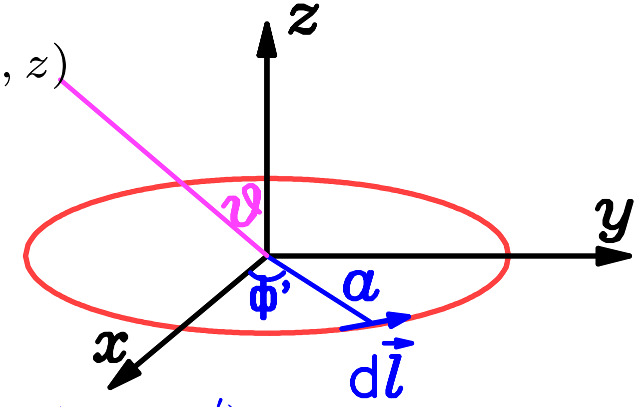
由 $\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{I\mathrm{d}\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ 知 $A_z = 0$，且 $\vec{A}$ 与 ϕ 无关

可在 xz 平面，即 $\phi = 0$ 即 $\vec{r} = s\,\hat{e}_x + z\,\hat{e}_z$ 处求 $\vec{A}$

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\mathrm{d}\vec{l}\cdot\hat{e}_x}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad \mathrm{d}\vec{l} = a\,\mathrm{d}\phi'\,\hat{e}_{\phi'} = a\,\mathrm{d}\phi'(-\hat{e}_x\sin\phi' + \hat{e}_y\cos\phi')$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\,a\,\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad \vec{r}\,' = a(\hat{e}_x\cos\phi' + \hat{e}_y\sin\phi')$$

例 7：半径为 a 的导线圆环载电流 I，求离导线很远处的矢势



导线圆环放置于 xy 平面，圆心在坐标原点，选柱坐标系：(s, ϕ, z)

由 $\vec{\boldsymbol{A}} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{I\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}$ 知 $A_z = 0$，且 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 与 ϕ 无关

可在 xz 平面，即 $\phi = 0$ 即 $\vec{\boldsymbol{r}} = s\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$ 处求 $\vec{\boldsymbol{A}}$

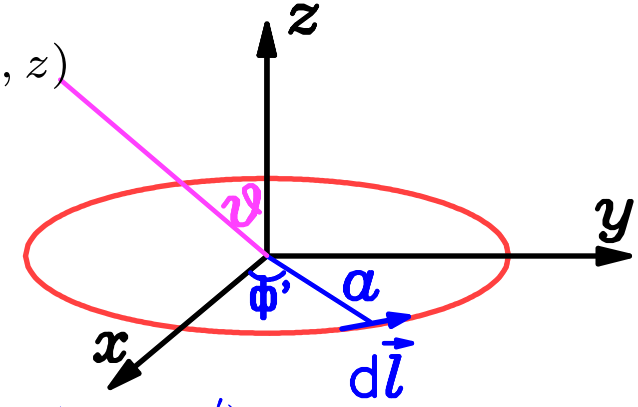
$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\cdot\,\hat{\boldsymbol{e}}_x}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} \qquad \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = a\,\mathrm{d}\phi'\,\hat{\boldsymbol{e}}_{\phi'} = a\,\mathrm{d}\phi'(-\,\hat{\boldsymbol{e}}_x\sin\phi' + \,\hat{\boldsymbol{e}}_y\cos\phi')$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\,a\,\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} \qquad \vec{\boldsymbol{r}}\,' = a(\,\hat{\boldsymbol{e}}_x\cos\phi' + \,\hat{\boldsymbol{e}}_y\sin\phi')$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{I\,a\,\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\sqrt{a^2 + s^2 + z^2 - 2as\cos\phi'}}$$

例 7：半径为 a 的导线圆环载电流 I，求离导线很远处的矢势

导线圆环放置于 xy 平面，圆心在坐标原点，选柱坐标系：(s, ϕ, z)



由 $\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{I\mathrm{d}\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ 知 $A_z = 0$，且 $\vec{A}$ 与 ϕ 无关

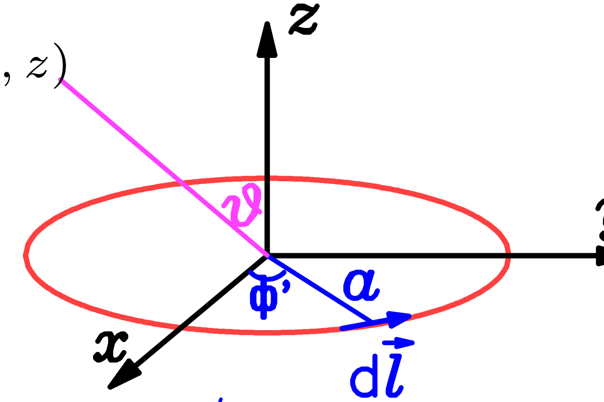
可在 xz 平面，即 $\phi = 0$ 即 $\vec{r} = s\,\hat{e}_x + z\,\hat{e}_z$ 处求 $\vec{A}$

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\mathrm{d}\vec{l}\cdot\hat{e}_x}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad \mathrm{d}\vec{l} = a\,\mathrm{d}\phi'\,\hat{e}_{\phi'} = a\,\mathrm{d}\phi'(-\,\hat{e}_x\sin\phi' + \hat{e}_y\cos\phi')$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\,a\,\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad \vec{r}\,' = a(\,\hat{e}_x\cos\phi' + \hat{e}_y\sin\phi')$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{I\,a\,\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\sqrt{a^2+s^2+z^2-2as\cos\phi'}} = 0$$

例 7：半径为 a 的导线圆环载电流 I，求离导线很远处的矢势



导线圆环放置于 xy 平面，圆心在坐标原点，选柱坐标系：(s, ϕ, z)

由 $\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{I\mathrm{d}\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ 知 $A_z = 0$，且 $\vec{A}$ 与 ϕ 无关

可在 xz 平面，即 $\phi = 0$ 即 $\vec{r} = s\,\hat{e}_x + z\,\hat{e}_z$ 处求 $\vec{A}$

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\mathrm{d}\vec{l}\cdot\hat{e}_x}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad \mathrm{d}\vec{l} = a\,\mathrm{d}\phi'\,\hat{e}_{\phi'} = a\,\mathrm{d}\phi'(-\,\hat{e}_x\sin\phi' + \,\hat{e}_y\cos\phi')$$

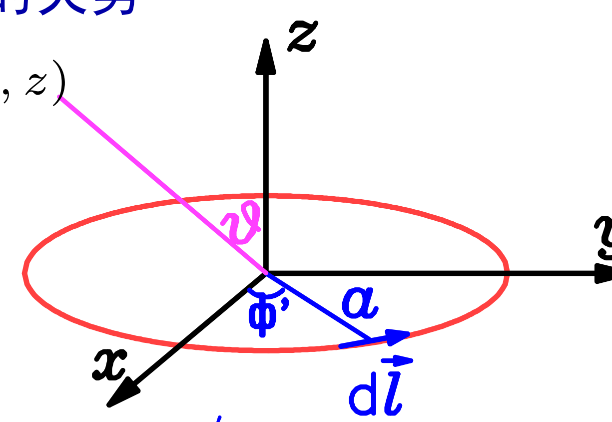
$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\,a\,\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad \vec{r}\,' = a(\,\hat{e}_x\cos\phi' + \,\hat{e}_y\sin\phi')$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{I\,a\,\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\sqrt{a^2+s^2+z^2-2as\cos\phi'}} = 0$$

$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{I\,a\,\cos\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\sqrt{a^2+s^2+z^2-2as\cos\phi'}}$$

例 7：半径为 a 的导线圆环载电流 I，求离导线很远处的矢势

导线圆环放置于 xy 平面，圆心在坐标原点，选柱坐标系：(s,ϕ,z)



由 $\vec{A}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\frac{I\mathrm{d}\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ 知 $A_z=0$，且 $\vec{A}$ 与 ϕ 无关

可在 xz 平面，即 $\phi=0$ 即 $\vec{r}=s\,\hat{e}_x+z\,\hat{e}_z$ 处求 $\vec{A}$

$$A_x=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\cdot\hat{e}_x}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\qquad \mathrm{d}\vec{l}=a\,\mathrm{d}\phi'\,\hat{e}_{\phi'}=a\,\mathrm{d}\phi'(-\hat{e}_x\sin\phi'+\hat{e}_y\cos\phi')$$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\,a\,\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\qquad \vec{r}\,'=a(\hat{e}_x\cos\phi'+\hat{e}_y\sin\phi')$$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{I\,a\,\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\sqrt{a^2+s^2+z^2-2as\cos\phi'}}=0$$

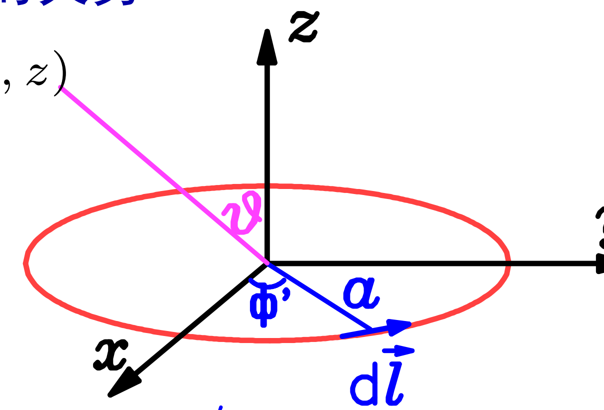
$$A_y=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{I\,a\,\cos\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\sqrt{a^2+s^2+z^2-2as\cos\phi'}}$$

$r=\sqrt{s^2+z^2}$, $\dfrac{s}{r}=\sin\theta$

(r,θ,ϕ) 为 $\vec{r}$ 的球坐标，(s,ϕ,z) 为柱坐标

例 7：半径为 a 的导线圆环载电流 I，求离导线很远处的矢势

导线圆环放置于 xy 平面，圆心在坐标原点，选柱坐标系：(s, ϕ, z)



由 $\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{I\mathrm{d}\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ 知 $A_z = 0$，且 $\vec{A}$ 与 ϕ 无关

可在 xz 平面，即 $\phi = 0$ 即 $\vec{r} = s\,\hat{e}_x + z\,\hat{e}_z$ 处求 $\vec{A}$

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\mathrm{d}\vec{l}\cdot\hat{e}_x}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad \mathrm{d}\vec{l} = a\,\mathrm{d}\phi'\,\hat{e}_{\phi'} = a\,\mathrm{d}\phi'(-\hat{e}_x\sin\phi' + \hat{e}_y\cos\phi')$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\,a\,\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad \vec{r}\,' = a(\hat{e}_x\cos\phi' + \hat{e}_y\sin\phi')$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{I\,a\,\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\sqrt{a^2+s^2+z^2-2as\cos\phi'}} = 0$$

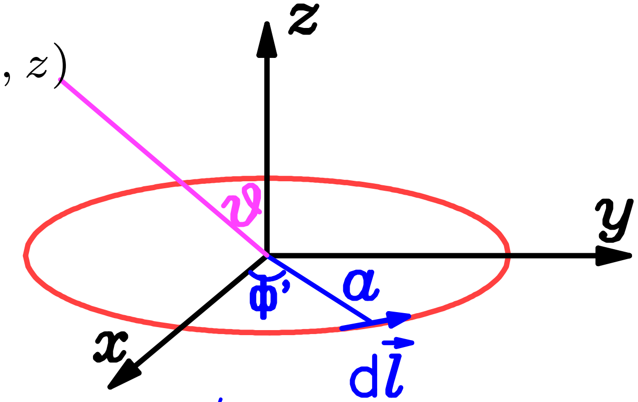
$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{I\,a\,\cos\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\sqrt{a^2+s^2+z^2-2as\cos\phi'}}$$

$$= \frac{\mu_0 a I}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\sin\theta\cos\phi'}}$$

$r = \sqrt{s^2+z^2}$, $\dfrac{s}{r} = \sin\theta$

(r, θ, ϕ) 为 $\vec{r}$ 的球坐标，(s, ϕ, z) 为柱坐标

例 7：半径为 a 的导线圆环载电流 I，求离导线很远处的矢势



导线圆环放置于 xy 平面，圆心在坐标原点，选柱坐标系：(s, ϕ, z)

由 $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\mathrm{d}\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ 知 $A_z = 0$，且 $\vec{A}$ 与 ϕ 无关

可在 xz 平面，即 $\phi = 0$ 即 $\vec{r} = s\,\hat{e}_x + z\,\hat{e}_z$ 处求 $\vec{A}$

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\mathrm{d}\vec{l}\cdot\,\hat{e}_x}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad \mathrm{d}\vec{l} = a\,\mathrm{d}\phi'\,\hat{e}_{\phi'} = a\,\mathrm{d}\phi'(-\,\hat{e}_x\sin\phi' + \,\hat{e}_y\cos\phi')$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\,a\,\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad \vec{r}\,' = a(\,\hat{e}_x\cos\phi' + \,\hat{e}_y\sin\phi')$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{I\,a\,\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\sqrt{a^2+s^2+z^2-2as\cos\phi'}} = 0$$

$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{I\,a\,\cos\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\sqrt{a^2+s^2+z^2-2as\cos\phi'}}$$

$$= \frac{\mu_0 a I}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\sin\theta\cos\phi'}}$$

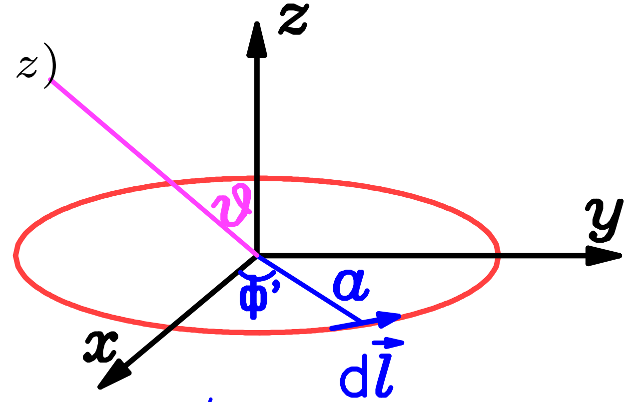
$r = \sqrt{s^2+z^2}$, $\frac{s}{r} = \sin\theta$

(r, θ, ϕ) 为 $\vec{r}$ 的球坐标，(s, ϕ, z) 为柱坐标

远处 $r \gg a$

$$\frac{r^2}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\sin\theta\cos\phi'}} = r + a\sin\theta\cos\phi'$$

例 7：半径为 a 的导线圆环载电流 I，求离导线很远处的矢势



导线圆环放置于 xy 平面，圆心在坐标原点，选柱坐标系：(s,ϕ,z)

由 $\vec{A}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ 知 $A_z=0$，且 $\vec{A}$ 与 ϕ 无关

可在 xz 平面，即 $\phi=0$ 即 $\vec{r}=s\,\hat{e}_x+z\,\hat{e}_z$ 处求 $\vec{A}$

$$A_x=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\cdot\hat{e}_x}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\qquad \mathrm{d}\vec{l}=a\,\mathrm{d}\phi'\,\hat{e}_{\phi'}=a\,\mathrm{d}\phi'(-\,\hat{e}_x\sin\phi'+\,\hat{e}_y\cos\phi')$$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\,a\,\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\qquad \vec{r}\,'=a(\,\hat{e}_x\cos\phi'+\,\hat{e}_y\sin\phi')$$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{I\,a\,\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\sqrt{a^2+s^2+z^2-2as\cos\phi'}}=0$$

$$A_y=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{I\,a\,\cos\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\sqrt{a^2+s^2+z^2-2as\cos\phi'}}\qquad r=\sqrt{s^2+z^2},\ \frac{s}{r}=\sin\theta$$

(r,θ,ϕ) 为 $\vec{r}$ 的球坐标，(s,ϕ,z) 为柱坐标

$$=\frac{\mu_0 aI}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\sin\theta\cos\phi'}}$$

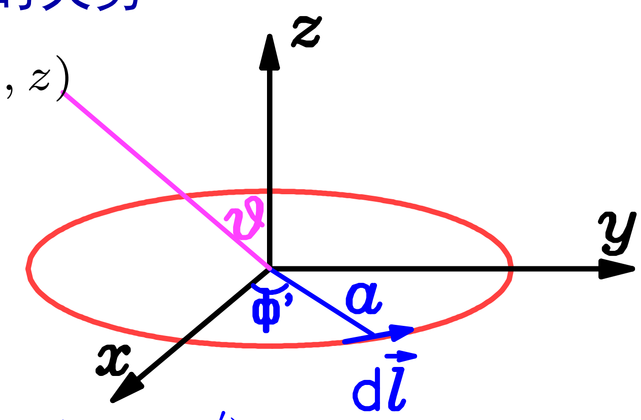
远处 $r\gg a$

$$\frac{r^2}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\sin\theta\cos\phi'}}=r+a\sin\theta\cos\phi'$$

$$=\frac{\mu_0 aI}{4\pi r}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\phi'(1+\frac{a}{r}\,\sin\theta\cos\phi')\,\mathrm{d}\phi'=\frac{\mu_0\pi a^2 I\sin\theta}{4\pi r^2}\quad\Longrightarrow\quad \vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$$

例 7：半径为 a 的导线圆环载电流 I，求离导线很远处的矢势

导线圆环放置于 xy 平面，圆心在坐标原点，选柱坐标系：(s, ϕ, z)



由 $\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \frac{I\mathrm{d}\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ 知 $A_z = 0$，且 $\vec{A}$ 与 ϕ 无关

可在 xz 平面，即 $\phi = 0$ 即 $\vec{r} = s\,\hat{e}_x + z\,\hat{e}_z$ 处求 $\vec{A}$

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\mathrm{d}\vec{l}\cdot\hat{e}_x}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad \mathrm{d}\vec{l} = a\,\mathrm{d}\phi'\,\hat{e}_{\phi'} = a\,\mathrm{d}\phi'(-\hat{e}_x\sin\phi' + \hat{e}_y\cos\phi')$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\,a\,\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad \vec{r}\,' = a(\hat{e}_x\cos\phi' + \hat{e}_y\sin\phi')$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{I\,a\,\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\sqrt{a^2+s^2+z^2-2as\cos\phi'}} = 0$$

$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{I\,a\,\cos\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\sqrt{a^2+s^2+z^2-2as\cos\phi'}}$$

$r = \sqrt{s^2+z^2}$, $\dfrac{s}{r} = \sin\theta$

(r, θ, ϕ) 为 $\vec{r}$ 的球坐标，(s, ϕ, z) 为柱坐标

$$= \frac{\mu_0 a I}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\sin\theta\cos\phi'}}$$

远处 $r \gg a$

$$\frac{r^2}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\sin\theta\cos\phi'}} = r + a\sin\theta\cos\phi'$$

$$= \frac{\mu_0 a I}{4\pi r}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\phi'\left(1+\frac{a}{r}\sin\theta\cos\phi'\right)\mathrm{d}\phi' = \frac{\mu_0\pi a^2 I\sin\theta}{4\pi r^2} \implies \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$$

$\vec{m} = \pi a^2 I\,\hat{e}_z$ 磁偶极矩

例 8：电流 I 均匀分布于半径 a 的沿 z 方向的无限长磁导率为 μ_1 的直导线，求空间矢势，磁场

例8：电流 I 均匀分布于半径 a 的沿 z 方向的无限长磁导率为 μ_1 的直导线，求空间矢势，磁场

取柱坐标 (s,ϕ,z)，有对称性，矢势只是 s 的函数，因为电流沿 z 向，故：$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = A(s)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

例 8：电流 I 均匀分布于半径 a 的沿 z 方向的无限长磁导率为 μ_1 的直导线，求空间矢势，磁场

取柱坐标 (s, ϕ, z)，有对称性，矢势只是 s 的函数，因为电流沿 z 向，故：$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = A(s)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

$s > a$ 时，由安培定律知，$\vec{\boldsymbol{B}} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}$

例 8：电流 I 均匀分布于半径 a 的沿 z 方向的无限长磁导率为 μ_1 的直导线，求空间矢势，磁场

取柱坐标 (s, ϕ, z)，有对称性，矢势只是 s 的函数，因为电流沿 z 向，故：$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = A(s)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

$s > a$ 时，由安培定律知，$\vec{\boldsymbol{B}} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}$

但 $\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}} = -\dfrac{\partial A(s)}{\partial s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$，故：$\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi s} \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{A}}_2(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(s/s_2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

例 8：电流 I 均匀分布于半径 a 的沿 z 方向的无限长磁导率为 μ_1 的直导线，求空间矢势，磁场

取柱坐标 (s,ϕ,z)，有对称性，矢势只是 s 的函数，因为电流沿 z 向，故：$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})=A(s)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

$s>a$ 时，由安培定律知，$\vec{\boldsymbol{B}}=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi=\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}$

但 $\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}=-\dfrac{\partial A(s)}{\partial s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$，故：$\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}s}=-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi s}\quad\Longrightarrow\quad\vec{\boldsymbol{A}}_2(\vec{\boldsymbol{r}})=-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(s/s_2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

$s<a$ 时，由安培定律知，$\vec{\boldsymbol{B}}=\dfrac{\mu_1 I_{\text{enc}}}{2\pi s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi=\dfrac{\mu_1\pi s^2 I}{\pi a^2}\dfrac{1}{2\pi s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi=\dfrac{\mu_1 s I}{2\pi a^2}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

例 8：电流 I 均匀分布于半径 a 的沿 z 方向的无限长磁导率为 μ_1 的直导线，求空间矢势，磁场

取柱坐标 (s, ϕ, z)，有对称性，矢势只是 s 的函数，因为电流沿 z 向，故：$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = A(s)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

$s > a$ 时，由安培定律知，$\vec{\boldsymbol{B}} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}$

但 $\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}} = -\dfrac{\partial A(s)}{\partial s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$，故：$\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi s} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{A}}_2(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(s/s_2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

$s < a$ 时，由安培定律知，$\vec{\boldsymbol{B}} = \dfrac{\mu_1 I_{\text{enc}}}{2\pi s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \dfrac{\mu_1 \pi s^2 I}{\pi a^2}\dfrac{1}{2\pi s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \dfrac{\mu_1 s I}{2\pi a^2}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

因此：$\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\mu_1 s I}{2\pi a^2} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{A}}_1(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\dfrac{\mu_1 I}{4\pi a^2}(s^2 - s_1^2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

例8：电流 I 均匀分布于半径 a 的沿 z 方向的无限长磁导率为 μ_1 的直导线，求空间矢势，磁场

取柱坐标 (s,ϕ,z)，有对称性，矢势只是 s 的函数，因为电流沿 z 向，故：$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = A(s)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

$s > a$ 时，由安培定律知，$\vec{\boldsymbol{B}} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}$

但 $\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}} = -\dfrac{\partial A(s)}{\partial s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$，故：$\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi s} \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{A}}_2(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(s/s_2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

$s < a$ 时，由安培定律知，$\vec{\boldsymbol{B}} = \dfrac{\mu_1 I_{\mathrm{enc}}}{2\pi s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \dfrac{\mu_1\pi s^2 I}{\pi a^2}\dfrac{1}{2\pi s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \dfrac{\mu_1 s I}{2\pi a^2}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

因此：$\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\mu_1 s I}{2\pi a^2} \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{A}}_1(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\dfrac{\mu_1 I}{4\pi a^2}(s^2 - s_1^2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \qquad s_1$，$s_2$ 待定

例 8：电流 I 均匀分布于半径 a 的沿 z 方向的无限长磁导率为 μ_1 的直导线，求空间矢势，磁场

取柱坐标 (s, ϕ, z)，有对称性，矢势只是 s 的函数，因为电流沿 z 向，故：$\vec{A}(\vec{r}) = A(s)\,\hat{e}_z$

$s > a$ 时，由安培定律知，$\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi s}\,\hat{e}_\phi = \nabla \times \vec{A}$

但 $\nabla \times \vec{A} = -\dfrac{\partial A(s)}{\partial s}\,\hat{e}_\phi$，故：$\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi s} \quad \Longrightarrow \quad \vec{A}_2(\vec{r}) = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(s/s_2)\,\hat{e}_z$

$s < a$ 时，由安培定律知，$\vec{B} = \dfrac{\mu_1 I_{\text{enc}}}{2\pi s}\,\hat{e}_\phi = \dfrac{\mu_1 \pi s^2 I}{\pi a^2}\dfrac{1}{2\pi s}\,\hat{e}_\phi = \dfrac{\mu_1 s I}{2\pi a^2}\,\hat{e}_\phi$

因此：$\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\mu_1 s I}{2\pi a^2} \quad \Longrightarrow \quad \vec{A}_1(\vec{r}) = -\dfrac{\mu_1 I}{4\pi a^2}(s^2 - s_1^2)\,\hat{e}_z \qquad s_1$，$s_2$ 待定

$s = a$ 时，$\vec{A}_1 = \vec{A}_2$，可解得：$s_1 = s_2 = a$　或：$s_1 = 0$，$s_2 = a\,e^{-\mu_1/(2\mu_0)}$

另解：$\nabla^2 A_1 = -\mu_1 j_f \quad (s < a), \qquad \nabla^2 A_2 = 0 \quad (s > a)$

例 8：电流 I 均匀分布于半径 a 的沿 z 方向的无限长磁导率为 μ_1 的直导线，求空间矢势，磁场

取柱坐标 (s, ϕ, z)，有对称性，矢势只是 s 的函数，因为电流沿 z 向，故：$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = A(s)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

$s > a$ 时，由安培定律知，$\vec{\boldsymbol{B}} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}$

但 $\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}} = -\dfrac{\partial A(s)}{\partial s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$，故：$\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi s} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{A}}_2(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(s/s_2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

$s < a$ 时，由安培定律知，$\vec{\boldsymbol{B}} = \dfrac{\mu_1 I_{\text{enc}}}{2\pi s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \dfrac{\mu_1 \pi s^2 I}{\pi a^2}\dfrac{1}{2\pi s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \dfrac{\mu_1 s I}{2\pi a^2}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

因此：$\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\mu_1 s I}{2\pi a^2} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{A}}_1(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\dfrac{\mu_1 I}{4\pi a^2}(s^2 - s_1^2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \qquad s_1$，$s_2$ 待定

$s = a$ 时，$\vec{\boldsymbol{A}}_1 = \vec{\boldsymbol{A}}_2$，可解得：$s_1 = s_2 = a$ 　或：$s_1 = 0$，$s_2 = a\,e^{-\mu_1/(2\mu_0)}$

另解：$\nabla^2 A_1 = -\mu_1 j_f \quad (s < a)$，$\qquad \nabla^2 A_2 = 0 \quad (s > a)$

对 A_2，利用二维问题 Laplace 方程通解：

$$A_2 = (a_0 + b_0 \ln s)(c_0 + d_0\phi) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n r^n + b_n r^{-n})(c_n \cos n\phi + d_n \sin n\phi) = a_0 + b_0 \ln s$$

旋转对称，A_2 与 ϕ 无关

例 8：电流 I 均匀分布于半径 a 的沿 z 方向的无限长磁导率为 μ_1 的直导线，求空间矢势，磁场

取柱坐标 (s,ϕ,z)，有对称性，矢势只是 s 的函数，因为电流沿 z 向，故：$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = A(s)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

$s > a$ 时，由安培定律知，$\vec{\boldsymbol{B}} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}$

但 $\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}} = -\dfrac{\partial A(s)}{\partial s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$，故：$\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi s} \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{A}}_2(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(s/s_2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

$s < a$ 时，由安培定律知，$\vec{\boldsymbol{B}} = \dfrac{\mu_1 I_{\text{enc}}}{2\pi s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \dfrac{\mu_1\pi s^2 I}{\pi a^2}\dfrac{1}{2\pi s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \dfrac{\mu_1 s I}{2\pi a^2}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

因此：$\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\mu_1 s I}{2\pi a^2} \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{A}}_1(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\dfrac{\mu_1 I}{4\pi a^2}(s^2 - s_1^2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$ $\quad s_1$，s_2 待定

$s = a$ 时，$\vec{\boldsymbol{A}}_1 = \vec{\boldsymbol{A}}_2$，可解得：$s_1 = s_2 = a$ 或：$s_1 = 0$，$s_2 = a\,e^{-\mu_1/(2\mu_0)}$

另解：$\nabla^2 A_1 = -\mu_1 j_f \quad (s<a)$，$\qquad \nabla^2 A_2 = 0 \quad (s>a)$

对 A_2，利用二维问题 Laplace 方程通解：

$$A_2 = (a_0 + b_0\ln s)(c_0 + d_0\phi) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n r^n + b_n r^{-n})(c_n\cos n\phi + d_n\sin n\phi) = a_0 + b_0\ln s$$

旋转对称，A_2 与 ϕ 无关

对 A_1，利用均匀带电 ρ_f 的无限长导线之静电势：$\nabla^2\varphi = -\dfrac{1}{\epsilon}\rho_f$

类比得 A_1 的表达式：$A_1 = -\dfrac{\mu_1 I}{4\pi a^2}s^2 + q_0$

例 8：电流 I 均匀分布于半径 a 的沿 z 方向的无限长磁导率为 μ_1 的直导线，求空间矢势，磁场

取柱坐标 (s,ϕ,z)，有对称性，矢势只是 s 的函数，因为电流沿 z 向，故：$\vec{A}(\vec{r}) = A(s)\,\hat{e}_z$

$s>a$ 时，由安培定律知，$\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi s}\,\hat{e}_\phi = \nabla\times\vec{A}$

但 $\nabla\times\vec{A} = -\dfrac{\partial A(s)}{\partial s}\,\hat{e}_\phi$，故：$\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi s} \quad\Longrightarrow\quad \vec{A}_2(\vec{r}) = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(s/s_2)\;\hat{e}_z$

$s<a$ 时，由安培定律知，$\vec{B} = \dfrac{\mu_1 I_{\text{enc}}}{2\pi s}\,\hat{e}_\phi = \dfrac{\mu_1\pi s^2 I}{\pi a^2}\dfrac{1}{2\pi s}\,\hat{e}_\phi = \dfrac{\mu_1 s I}{2\pi a^2}\,\hat{e}_\phi$

因此：$\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\mu_1 s I}{2\pi a^2} \quad\Longrightarrow\quad \vec{A}_1(\vec{r}) = -\dfrac{\mu_1 I}{4\pi a^2}(s^2-s_1^2)\;\hat{e}_z \qquad s_1，s_2$ 待定

$s=a$ 时，$\vec{A}_1=\vec{A}_2$，可解得：$s_1=s_2=a$ 　或：$s_1=0$，$s_2 = a\,e^{-\mu_1/(2\mu_0)}$

另解：$\nabla^2 A_1 = -\mu_1 j_f \quad (s<a)$，　　$\nabla^2 A_2 = 0 \quad (s>a)$

对 A_2，利用二维问题 Laplace 方程通解：

$$A_2 = (a_0+b_0\ln s)(c_0+d_0\phi) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n r^n + b_n r^{-n})(c_n\cos n\phi + d_n\sin n\phi) = a_0 + b_0\ln s$$

旋转对称，A_2 与 ϕ 无关

对 A_1，利用均匀带电 ρ_f 的无限长导线之静电势：$\nabla^2\varphi = -\dfrac{1}{\epsilon}\rho_f$

类比得 A_1 的表达式：$A_1 = -\dfrac{\mu_1 I}{4\pi a^2}s^2 + q_0$ 　　通过矢势的边值关系确定系数 q_0，a_0，b_0。

Let there be light

$$A_2 = a_0 + b_0 \ln s \qquad A_1 = -\frac{\mu_1 I}{4\pi a^2} s^2 + q_0$$

$$A_2 = a_0 + b_0 \ln s \qquad A_1 = -\frac{\mu_1 I}{4\pi a^2} s^2 + q_0$$

可先假设导线磁导率为 μ_0，这时有 $\vec{\boldsymbol{M}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{\alpha}}_M = 0$

$$A_2 = a_0 + b_0 \ln s \qquad A_1 = -\frac{\mu_1 I}{4\pi a^2} s^2 + q_0$$

可先假设导线磁导率为 μ_0，这时有 $\vec{M} = 0 \implies \vec{\alpha}_M = 0$

因此，边值关系为：$\vec{A}_1 = \vec{A}_2 \qquad \dfrac{\partial \vec{A}_2}{\partial n} - \dfrac{\partial \vec{A}_1}{\partial n} = -\mu_0(\vec{\alpha}_f + \vec{\alpha}_M) = 0$

$$A_2 = a_0 + b_0 \ln s \qquad A_1 = -\frac{\mu_1 I}{4\pi a^2} s^2 + q_0$$

可先假设导线磁导率为 μ_0，这时有 $\vec{\boldsymbol{M}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{\alpha}}_M = 0$

因此，边值关系为：$\vec{\boldsymbol{A}}_1 = \vec{\boldsymbol{A}}_2 \qquad \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}_2}{\partial n} - \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}_1}{\partial n} = -\mu_0 (\vec{\boldsymbol{\alpha}}_f + \vec{\boldsymbol{\alpha}}_M) = 0$

利用第二个边值关系：$\dfrac{\partial A_2}{\partial s} = \dfrac{\partial A_1}{\partial s} \quad \Longrightarrow \quad b_0 = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$

$$A_2 = a_0 + b_0 \ln s \qquad A_1 = -\frac{\mu_1 I}{4\pi a^2} s^2 + q_0$$

可先假设导线磁导率为 μ_0，这时有 $\vec{\boldsymbol{M}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{\alpha}}_M = 0$

因此，边值关系为：$\vec{\boldsymbol{A}}_1 = \vec{\boldsymbol{A}}_2 \qquad \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}_2}{\partial n} - \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}_1}{\partial n} = -\mu_0(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_f + \vec{\boldsymbol{\alpha}}_M) = 0$

利用第二个边值关系：$\dfrac{\partial A_2}{\partial s} = \dfrac{\partial A_1}{\partial s} \quad \Longrightarrow \quad b_0 = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$

再利用第一个边值关系：$A_1 = A_2 \quad \Longrightarrow \quad a_0 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln a, \quad q_0 = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}$

$$A_2 = a_0 + b_0 \ln s \qquad A_1 = -\frac{\mu_1 I}{4\pi a^2}s^2 + q_0$$

可先假设导线磁导率为 μ_0，这时有 $\vec{\boldsymbol{M}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{\alpha}}_M = 0$

因此，边值关系为：$\vec{\boldsymbol{A}}_1 = \vec{\boldsymbol{A}}_2 \qquad \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}_2}{\partial n} - \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}_1}{\partial n} = -\mu_0(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_f + \vec{\boldsymbol{\alpha}}_M) = 0$

利用第二个边值关系：$\dfrac{\partial A_2}{\partial s} = \dfrac{\partial A_1}{\partial s} \quad \Longrightarrow \quad b_0 = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$

再利用第一个边值关系：$A_1 = A_2 \quad \Longrightarrow \quad a_0 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}\ln a, \quad q_0 = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}$

相当于上页的 $s_1 = s_2 = a$

$$A_2 = a_0 + b_0 \ln s \qquad A_1 = -\frac{\mu_1 I}{4\pi a^2} s^2 + q_0$$

可先假设导线磁导率为 μ_0，这时有 $\vec{\boldsymbol{M}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{\alpha}}_M = 0$

因此，边值关系为：$\vec{\boldsymbol{A}}_1 = \vec{\boldsymbol{A}}_2 \qquad \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}_2}{\partial n} - \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}_1}{\partial n} = -\mu_0(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_f + \vec{\boldsymbol{\alpha}}_M) = 0$

利用第二个边值关系：$\dfrac{\partial A_2}{\partial s} = \dfrac{\partial A_1}{\partial s} \quad \Longrightarrow \quad b_0 = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$

再利用第一个边值关系：$A_1 = A_2 \quad \Longrightarrow \quad a_0 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln a, \quad q_0 = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}$

相当于上页的 $s_1 = s_2 = a$

对导线磁导率为 μ_1，如果不考虑矢势 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 中的常矢量，结果是相同的。

$$A_2 = a_0 + b_0 \ln s \qquad A_1 = -\frac{\mu_1 I}{4\pi a^2} s^2 + q_0$$

可先假设导线磁导率为 μ_0，这时有 $\vec{\boldsymbol{M}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{\alpha}}_M = 0$

因此，边值关系为：$\vec{\boldsymbol{A}}_1 = \vec{\boldsymbol{A}}_2 \qquad \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}_2}{\partial n} - \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}_1}{\partial n} = -\mu_0(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_f + \vec{\boldsymbol{\alpha}}_M) = 0$

利用第二个边值关系：$\dfrac{\partial A_2}{\partial s} = \dfrac{\partial A_1}{\partial s} \quad \Longrightarrow \quad b_0 = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$

再利用第一个边值关系：$A_1 = A_2 \quad \Longrightarrow \quad a_0 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln a, \quad q_0 = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}$

相当于上页的 $s_1 = s_2 = a$

对导线磁导率为 μ_1，如果不考虑矢势 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 中的常矢量，结果是相同的。

关键是定出 b_0，而 b_0 与导线磁导率无关。(why?)

$$A_2 = a_0 + b_0 \ln s \qquad A_1 = -\frac{\mu_1 I}{4\pi a^2}s^2 + q_0$$

可先假设导线磁导率为 μ_0，这时有 $\vec{\boldsymbol{M}} = 0 \implies \vec{\boldsymbol{\alpha}}_M = 0$

因此，边值关系为：$\vec{\boldsymbol{A}}_1 = \vec{\boldsymbol{A}}_2 \qquad \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}_2}{\partial n} - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}_1}{\partial n} = -\mu_0(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_f + \vec{\boldsymbol{\alpha}}_M) = 0$

利用第二个边值关系：$\frac{\partial A_2}{\partial s} = \frac{\partial A_1}{\partial s} \implies b_0 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$

再利用第一个边值关系：$A_1 = A_2 \implies a_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\ln a, \quad q_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}$

相当于上页的 $s_1 = s_2 = a$

对导线磁导率为 μ_1，如果不考虑矢势 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 中的常矢量，结果是相同的。

关键是定出 b_0，而 b_0 与导线磁导率无关。(why?)

思考:

$$A_2 = a_0 + b_0 \ln s \qquad A_1 = -\frac{\mu_1 I}{4\pi a^2} s^2 + q_0$$

可先假设导线磁导率为 μ_0，这时有 $\vec{M} = 0 \implies \vec{\alpha}_M = 0$

因此，边值关系为：$\vec{A}_1 = \vec{A}_2 \qquad \dfrac{\partial \vec{A}_2}{\partial n} - \dfrac{\partial \vec{A}_1}{\partial n} = -\mu_0(\vec{\alpha}_f + \vec{\alpha}_M) = 0$

利用第二个边值关系：$\dfrac{\partial A_2}{\partial s} = \dfrac{\partial A_1}{\partial s} \implies b_0 = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$

再利用第一个边值关系：$A_1 = A_2 \implies a_0 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln a, \quad q_0 = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}$

相当于上页的 $s_1 = s_2 = a$

对导线磁导率为 μ_1，如果不考虑矢势 $\vec{A}$ 中的常矢量，结果是相同的。

关键是定出 b_0，而 b_0 与导线磁导率无关。(why?)

思考：

柱内磁导率为 μ_1，故有：$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f \implies \nabla \times (\vec{B}/\mu_1) = \vec{j}_f \implies \nabla \times \vec{B} = \mu_1 \vec{j}_f$

$$A_2 = a_0 + b_0 \ln s \qquad A_1 = -\frac{\mu_1 I}{4\pi a^2} s^2 + q_0$$

可先假设导线磁导率为 μ_0，这时有 $\vec{\boldsymbol{M}} = 0 \implies \vec{\boldsymbol{\alpha}}_M = 0$

因此，边值关系为：$\vec{\boldsymbol{A}}_1 = \vec{\boldsymbol{A}}_2 \qquad \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}_2}{\partial n} - \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}_1}{\partial n} = -\mu_0(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_f + \vec{\boldsymbol{\alpha}}_M) = 0$

利用第二个边值关系：$\dfrac{\partial A_2}{\partial s} = \dfrac{\partial A_1}{\partial s} \implies b_0 = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$

再利用第一个边值关系：$A_1 = A_2 \implies a_0 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln a, \quad q_0 = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}$

相当于上页的 $s_1 = s_2 = a$

对导线磁导率为 μ_1，如果不考虑矢势 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 中的常矢量，结果是相同的。

关键是定出 b_0，而 b_0 与导线磁导率无关。(why?)

思考:

柱内磁导率为 μ_1，故有：$\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{j}}_f \implies \nabla \times (\vec{\boldsymbol{B}}/\mu_1) = \vec{\boldsymbol{j}}_f \implies \nabla \times \vec{\boldsymbol{B}} = \mu_1 \vec{\boldsymbol{j}}_f$

积分形式：$\displaystyle\oint_{\mathcal{L}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \mu_1 \int \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{j}}_f \, \mathrm{d}\sigma$

$$A_2 = a_0 + b_0 \ln s \qquad A_1 = -\frac{\mu_1 I}{4\pi a^2} s^2 + q_0$$

可先假设导线磁导率为 μ_0，这时有 $\vec{M} = 0 \implies \vec{\alpha}_M = 0$

因此，边值关系为：$\vec{A}_1 = \vec{A}_2 \qquad \dfrac{\partial \vec{A}_2}{\partial n} - \dfrac{\partial \vec{A}_1}{\partial n} = -\mu_0(\vec{\alpha}_f + \vec{\alpha}_M) = 0$

利用第二个边值关系：$\dfrac{\partial A_2}{\partial s} = \dfrac{\partial A_1}{\partial s} \implies b_0 = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$

再利用第一个边值关系：$A_1 = A_2 \implies a_0 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln a, \quad q_0 = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}$

相当于上页的 $s_1 = s_2 = a$

对导线磁导率为 μ_1，如果不考虑矢势 $\vec{A}$ 中的常矢量，结果是相同的。

关键是定出 b_0，而 b_0 与导线磁导率无关。(why?)

思考：

柱内磁导率为 μ_1，故有：$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f \implies \nabla \times (\vec{B}/\mu_1) = \vec{j}_f \implies \nabla \times \vec{B} = \mu_1 \vec{j}_f$

积分形式：$\oint_{\mathcal{L}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_1 \int \vec{n} \cdot \vec{j}_f \, \mathrm{d}\sigma$ 取 $\mathcal{L}$ 为导线外的一圆环：

$$A_2 = a_0 + b_0 \ln s \qquad A_1 = -\frac{\mu_1 I}{4\pi a^2} s^2 + q_0$$

可先假设导线磁导率为 μ_0，这时有 $\vec{M} = 0 \implies \vec{\alpha}_M = 0$

因此，边值关系为：$\vec{A}_1 = \vec{A}_2 \qquad \frac{\partial \vec{A}_2}{\partial n} - \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial n} = -\mu_0(\vec{\alpha}_f + \vec{\alpha}_M) = 0$

利用第二个边值关系：$\frac{\partial A_2}{\partial s} = \frac{\partial A_1}{\partial s} \implies b_0 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$

再利用第一个边值关系：$A_1 = A_2 \implies a_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln a, \quad q_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}$

相当于上页的 $s_1 = s_2 = a$

对导线磁导率为 μ_1，如果不考虑矢势 $\vec{A}$ 中的常矢量，结果是相同的。

关键是定出 b_0，而 b_0 与导线磁导率无关。(why?)

思考：

柱内磁导率为 μ_1，故有：$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f \implies \nabla \times (\vec{B}/\mu_1) = \vec{j}_f \implies \nabla \times \vec{B} = \mu_1 \vec{j}_f$

积分形式：$\oint_{\mathcal{L}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_1 \int \vec{n} \cdot \vec{j}_f \, \mathrm{d}\sigma$ 　　　取 $\mathcal{L}$ 为导线外的一圆环：

则：$2\pi s B = \mu_1 \int \vec{n} \cdot \vec{j}_f \, \mathrm{d}\sigma = \mu_1 I$

$$A_2 = a_0 + b_0 \ln s \qquad A_1 = -\frac{\mu_1 I}{4\pi a^2} s^2 + q_0$$

可先假设导线磁导率为 μ_0，这时有 $\vec{\boldsymbol{M}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{\alpha}}_M = 0$

因此，边值关系为：$\vec{\boldsymbol{A}}_1 = \vec{\boldsymbol{A}}_2 \qquad \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}_2}{\partial n} - \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}_1}{\partial n} = -\mu_0(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_f + \vec{\boldsymbol{\alpha}}_M) = 0$

利用第二个边值关系：$\dfrac{\partial A_2}{\partial s} = \dfrac{\partial A_1}{\partial s} \quad \Longrightarrow \quad b_0 = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$

再利用第一个边值关系：$A_1 = A_2 \quad \Longrightarrow \quad a_0 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln a, \quad q_0 = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}$

相当于上页的 $s_1 = s_2 = a$

对导线磁导率为 μ_1，如果不考虑矢势 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 中的常矢量，结果是相同的。

关键是定出 b_0，而 b_0 与导线磁导率无关。(why?)

思考：

柱内磁导率为 μ_1，故有：$\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{j}}_f \quad \Longrightarrow \quad \nabla \times (\vec{\boldsymbol{B}}/\mu_1) = \vec{\boldsymbol{j}}_f \quad \Longrightarrow \quad \nabla \times \vec{\boldsymbol{B}} = \mu_1 \vec{\boldsymbol{j}}_f$

积分形式：$\displaystyle\oint_{\mathcal{L}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \mu_1 \int \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{j}}_f \, \mathrm{d}\sigma$ 　　取 $\mathcal{L}$ 为导线外的一圆环：

则：$\displaystyle 2\pi s B = \mu_1 \int \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{j}}_f \, \mathrm{d}\sigma = \mu_1 I \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_1 I}{2\pi s} \neq \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$

$$A_2 = a_0 + b_0 \ln s \qquad A_1 = -\frac{\mu_1 I}{4\pi a^2} s^2 + q_0$$

可先假设导线磁导率为 μ_0，这时有 $\vec{\boldsymbol{M}} = 0 \implies \vec{\boldsymbol{\alpha}}_M = 0$

因此，边值关系为：$\vec{\boldsymbol{A}}_1 = \vec{\boldsymbol{A}}_2 \qquad \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}_2}{\partial n} - \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}_1}{\partial n} = -\mu_0(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_f + \vec{\boldsymbol{\alpha}}_M) = 0$

利用第二个边值关系：$\dfrac{\partial A_2}{\partial s} = \dfrac{\partial A_1}{\partial s} \implies b_0 = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$

再利用第一个边值关系：$A_1 = A_2 \implies a_0 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln a, \quad q_0 = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}$

相当于上页的 $s_1 = s_2 = a$

对导线磁导率为 μ_1，如果不考虑矢势 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 中的常矢量，结果是相同的。

关键是定出 b_0，而 b_0 与导线磁导率无关。(why?)

思考：

柱内磁导率为 μ_1，故有：$\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{j}}_f \implies \nabla \times (\vec{\boldsymbol{B}}/\mu_1) = \vec{\boldsymbol{j}}_f \implies \nabla \times \vec{\boldsymbol{B}} = \mu_1 \vec{\boldsymbol{j}}_f$

积分形式：$\displaystyle\oint_{\mathcal{L}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \mu_1 \int \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{j}}_f \, \mathrm{d}\sigma$ 　　取 $\mathcal{L}$ 为导线外的一圆环：

则：$\displaystyle 2\pi s B = \mu_1 \int \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{j}}_f \, \mathrm{d}\sigma = \mu_1 I \implies \vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_1 I}{2\pi s} \neq \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$ —— 错在哪里？

不均匀区： $\nabla\times(\vec{\boldsymbol{B}}/\mu)=\vec{\boldsymbol{j}}_f \quad\Longrightarrow\quad \nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}-\frac{1}{\mu}\nabla\mu\times\vec{\boldsymbol{B}}=\mu\vec{\boldsymbol{j}}_f$

不均匀区： $\nabla\times(\vec{\boldsymbol{B}}/\mu)=\vec{\boldsymbol{j}}_f \quad\Longrightarrow\quad \nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}-\dfrac{1}{\mu}\nabla\mu\times\vec{\boldsymbol{B}}=\mu\vec{\boldsymbol{j}}_f$

积分形式： $\oint_{\mathcal{L}}\vec{\boldsymbol{B}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}=\int\mu\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}_f\,\mathrm{d}\sigma+\int\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left(\dfrac{\nabla\mu}{\mu}\times\vec{\boldsymbol{B}}\right)\mathrm{d}\sigma$ 　　$\mathcal{L}$ 为导线外一圆环

不均匀区： $\nabla \times (\vec{\boldsymbol{B}}/\mu) = \vec{\boldsymbol{j}}_f \quad \Longrightarrow \quad \nabla \times \vec{\boldsymbol{B}} - \frac{1}{\mu}\nabla\mu \times \vec{\boldsymbol{B}} = \mu\vec{\boldsymbol{j}}_f$

积分形式： $\oint_{\mathcal{L}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \int \mu\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{j}}_f \,\mathrm{d}\sigma + \int \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \left(\frac{\nabla\mu}{\mu} \times \vec{\boldsymbol{B}}\right) \mathrm{d}\sigma$ $\mathcal{L}$ 为导线外一圆环

$$\Longrightarrow \quad \oint_{\mathcal{L}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \mu_1 I_f + \int \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \left[(\nabla\mu) \times \vec{\boldsymbol{H}}\right] \mathrm{d}\sigma = \mu I_f + \hat{\boldsymbol{e}}_z \cdot \int \left[(\nabla\mu) \times \vec{\boldsymbol{H}}\right] \mathrm{d}\sigma$$

不均匀区： $\nabla\times(\vec{\boldsymbol{B}}/\mu)=\vec{\boldsymbol{j}}_f \quad\Longrightarrow\quad \nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}-\dfrac{1}{\mu}\nabla\mu\times\vec{\boldsymbol{B}}=\mu\vec{\boldsymbol{j}}_f$

积分形式： $\displaystyle\oint_{\mathcal{L}}\vec{\boldsymbol{B}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}=\int\mu\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}_f\,\mathrm{d}\sigma+\int\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left(\frac{\nabla\mu}{\mu}\times\vec{\boldsymbol{B}}\right)\mathrm{d}\sigma$　　$\mathcal{L}$ 为导线外一圆环

$$\Longrightarrow\quad\oint_{\mathcal{L}}\vec{\boldsymbol{B}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}=\mu_1 I_f+\int\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[(\nabla\mu)\times\vec{\boldsymbol{H}}\right]\mathrm{d}\sigma=\mu I_f+\hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot\int\left[(\nabla\mu)\times\vec{\boldsymbol{H}}\right]\mathrm{d}\sigma$$

对非均匀区：$\mu=\mu_1\theta(-s)+\mu_0\theta(s)$　其中 s 为 $z=0$ 面内的导线边界线方程，θ 为阶跃函数

不均匀区： $\nabla\times(\vec{B}/\mu)=\vec{j}_f \quad\Longrightarrow\quad \nabla\times\vec{B}-\frac{1}{\mu}\nabla\mu\times\vec{B}=\mu\vec{j}_f$

积分形式： $\oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int\mu\vec{n}\cdot\vec{j}_f\,\mathrm{d}\sigma+\int\vec{n}\cdot\left(\frac{\nabla\mu}{\mu}\times\vec{B}\right)\mathrm{d}\sigma$ $\mathcal{L}$ 为导线外一圆环

$$\Longrightarrow\quad \oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_1 I_f+\int\vec{n}\cdot\left[(\nabla\mu)\times\vec{H}\right]\mathrm{d}\sigma=\mu I_f+\hat{e}_z\cdot\int\left[(\nabla\mu)\times\vec{H}\right]\mathrm{d}\sigma$$

对非均匀区：$\mu=\mu_1\theta(-s)+\mu_0\theta(s)$　其中 s 为 $z=0$ 面内的导线边界线方程，θ 为阶跃函数

$$\nabla\mu=(\mu_0-\mu_1)\delta(s)\nabla s=(\mu_0-\mu_1)\delta(s)|\nabla s|\vec{\eta},\quad \mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}l\,\mathrm{d}\eta=\frac{1}{|\nabla s|}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}l$$

不均匀区： $\nabla\times(\vec{\boldsymbol{B}}/\mu)=\vec{\boldsymbol{j}}_f \quad\Longrightarrow\quad \nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}-\dfrac{1}{\mu}\nabla\mu\times\vec{\boldsymbol{B}}=\mu\vec{\boldsymbol{j}}_f$

积分形式： $\displaystyle\oint_{\mathcal{L}}\vec{\boldsymbol{B}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}=\int\mu\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}_f\,\mathrm{d}\sigma+\int\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left(\frac{\nabla\mu}{\mu}\times\vec{\boldsymbol{B}}\right)\mathrm{d}\sigma$ $\mathcal{L}$ 为导线外一圆环

$$\Longrightarrow\quad\oint_{\mathcal{L}}\vec{\boldsymbol{B}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}=\mu_1 I_f+\int\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[(\nabla\mu)\times\vec{\boldsymbol{H}}\right]\mathrm{d}\sigma=\mu I_f+\hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot\int\left[(\nabla\mu)\times\vec{\boldsymbol{H}}\right]\mathrm{d}\sigma$$

对非均匀区：$\mu=\mu_1\theta(-s)+\mu_0\theta(s)$ 其中 s 为 $z=0$ 面内的导线边界线方程，θ 为阶跃函数

$$\nabla\mu=(\mu_0-\mu_1)\delta(s)\nabla s=(\mu_0-\mu_1)\delta(s)|\nabla s|\vec{\boldsymbol{\eta}},\quad \mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}l\,\mathrm{d}\eta=\frac{1}{|\nabla s|}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}l$$

$\vec{\boldsymbol{\eta}}$ 为导线边界线外法向，$\mathrm{d}l$ 沿导线边界线的线元

不均匀区： $\nabla \times (\vec{B}/\mu) = \vec{j}_f \implies \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{\mu}\nabla\mu \times \vec{B} = \mu\vec{j}_f$

积分形式： $\oint_{\mathcal{L}} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int \mu\vec{n}\cdot\vec{j}_f\,\mathrm{d}\sigma + \int \vec{n}\cdot\left(\frac{\nabla\mu}{\mu}\times\vec{B}\right)\mathrm{d}\sigma$ $\mathcal{L}$ 为导线外一圆环

$$\implies \oint_{\mathcal{L}} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \mu_1 I_f + \int \vec{n}\cdot\left[(\nabla\mu)\times\vec{H}\right]\mathrm{d}\sigma = \mu I_f + \hat{e}_z\cdot\int\left[(\nabla\mu)\times\vec{H}\right]\mathrm{d}\sigma$$

对非均匀区：$\mu = \mu_1\theta(-s) + \mu_0\theta(s)$ 其中 s 为 $z=0$ 面内的导线边界线方程，θ 为阶跃函数

$$\nabla\mu = (\mu_0-\mu_1)\delta(s)\nabla s = (\mu_0-\mu_1)\delta(s)|\nabla s|\vec{\eta}, \quad \mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}l\,\mathrm{d}\eta = \frac{1}{|\nabla s|}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}l$$

$\vec{\eta}$ 为导线边界线外法向，$\mathrm{d}l$ 沿导线边界线的线元

$\nabla\mu$ 代入： $\oint_{\mathcal{L}} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \mu_1 I_f + \mu_0\,\hat{e}_z\cdot\int\vec{\eta}\times\left[\frac{(\mu_0-\mu_1)}{\mu_0}\vec{H}\right]\delta(s)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}l$

不均匀区： $\nabla\times(\vec{B}/\mu)=\vec{j}_f \quad\Longrightarrow\quad \nabla\times\vec{B}-\frac{1}{\mu}\nabla\mu\times\vec{B}=\mu\vec{j}_f$

积分形式： $\oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int\mu\vec{n}\cdot\vec{j}_f\,\mathrm{d}\sigma+\int\vec{n}\cdot\left(\frac{\nabla\mu}{\mu}\times\vec{B}\right)\mathrm{d}\sigma$ $\mathcal{L}$ 为导线外一圆环

$$\Longrightarrow\quad \oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_1 I_f+\int\vec{n}\cdot\left[(\nabla\mu)\times\vec{H}\right]\mathrm{d}\sigma=\mu I_f+\hat{e}_z\cdot\int\left[(\nabla\mu)\times\vec{H}\right]\mathrm{d}\sigma$$

对非均匀区：$\mu=\mu_1\theta(-s)+\mu_0\theta(s)$ 其中 s 为 $z=0$ 面内的导线边界线方程，θ 为阶跃函数

$$\nabla\mu=(\mu_0-\mu_1)\delta(s)\nabla s=(\mu_0-\mu_1)\delta(s)|\nabla s|\vec{\eta},\quad \mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}l\,\mathrm{d}\eta=\frac{1}{|\nabla s|}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}l$$

$\vec{\eta}$ 为导线边界线外法向，$\mathrm{d}l$ 沿导线边界线的线元

$\nabla\mu$ 代入： $\oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_1 I_f+\mu_0\,\hat{e}_z\cdot\int\vec{\eta}\times\left[\frac{(\mu_0-\mu_1)}{\mu_0}\vec{H}\right]\delta(s)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}l$

注意到导线外为真空，$\vec{M}_2=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\alpha}_M=\vec{\eta}\times(\vec{M}_2-\vec{M}_1)=-\vec{\eta}\times\vec{M}_1$

不均匀区： $\nabla\times(\vec{B}/\mu)=\vec{j}_f \quad\Longrightarrow\quad \nabla\times\vec{B}-\frac{1}{\mu}\nabla\mu\times\vec{B}=\mu\vec{j}_f$

积分形式： $\oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int\mu\vec{n}\cdot\vec{j}_f\,\mathrm{d}\sigma+\int\vec{n}\cdot\left(\frac{\nabla\mu}{\mu}\times\vec{B}\right)\mathrm{d}\sigma$ $\quad$ $\mathcal{L}$ 为导线外一圆环

$$\Longrightarrow\quad \oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_1 I_f+\int\vec{n}\cdot\left[(\nabla\mu)\times\vec{H}\right]\mathrm{d}\sigma=\mu I_f+\hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot\int\left[(\nabla\mu)\times\vec{H}\right]\mathrm{d}\sigma$$

对非均匀区： $\mu=\mu_1\theta(-s)+\mu_0\theta(s)$ 其中 s 为 $z=0$ 面内的导线边界线方程，θ 为阶跃函数

$$\nabla\mu=(\mu_0-\mu_1)\delta(s)\nabla s=(\mu_0-\mu_1)\delta(s)|\nabla s|\vec{\eta},\quad \mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}l\,\mathrm{d}\eta=\frac{1}{|\nabla s|}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}l$$

$\vec{\eta}$ 为导线边界线外法向，$\mathrm{d}l$ 沿导线边界线的线元

$\nabla\mu$ 代入： $\oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_1 I_f+\mu_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot\int\vec{\eta}\times\left[\frac{(\mu_0-\mu_1)}{\mu_0}\vec{H}\right]\delta(s)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}l$

注意到导线外为真空，$\vec{M}_2=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\alpha}_M=\vec{\eta}\times(\vec{M}_2-\vec{M}_1)=-\vec{\eta}\times\vec{M}_1$

而：$\vec{M}_1=\frac{\mu_1-\mu_0}{\mu_0}\vec{H}$

不均匀区： $\nabla\times(\vec{B}/\mu)=\vec{j}_f \quad\Longrightarrow\quad \nabla\times\vec{B}-\frac{1}{\mu}\nabla\mu\times\vec{B}=\mu\vec{j}_f$

积分形式： $\oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int\mu\vec{n}\cdot\vec{j}_f\,\mathrm{d}\sigma+\int\vec{n}\cdot\left(\frac{\nabla\mu}{\mu}\times\vec{B}\right)\mathrm{d}\sigma$ $\quad$ $\mathcal{L}$ 为导线外一圆环

$$\Longrightarrow\quad \oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_1 I_f+\int\vec{n}\cdot\left[(\nabla\mu)\times\vec{H}\right]\mathrm{d}\sigma=\mu I_f+\hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot\int\left[(\nabla\mu)\times\vec{H}\right]\mathrm{d}\sigma$$

对非均匀区：$\mu=\mu_1\theta(-s)+\mu_0\theta(s)$ 其中 s 为 $z=0$ 面内的导线边界线方程，θ 为阶跃函数

$$\nabla\mu=(\mu_0-\mu_1)\delta(s)\nabla s=(\mu_0-\mu_1)\delta(s)|\nabla s|\vec{\eta},\quad \mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}l\,\mathrm{d}\eta=\frac{1}{|\nabla s|}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}l$$

$\vec{\eta}$ 为导线边界线外法向，$\mathrm{d}l$ 沿导线边界线的线元

$\nabla\mu$ 代入： $\oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_1 I_f+\mu_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot\int\vec{\eta}\times\left[\frac{(\mu_0-\mu_1)}{\mu_0}\vec{H}\right]\delta(s)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}l$

注意到导线外为真空，$\vec{M}_2=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\alpha}_M=\vec{\eta}\times(\vec{M}_2-\vec{M}_1)=-\vec{\eta}\times\vec{M}_1$

而：$\vec{M}_1=\frac{\mu_1-\mu_0}{\mu_0}\vec{H} \quad\Longrightarrow\quad \oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_1 I_f+\mu_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot\int\vec{\alpha}_M\mathrm{d}l$

不均匀区： $\nabla\times(\vec{B}/\mu)=\vec{j}_f \quad\Longrightarrow\quad \nabla\times\vec{B}-\dfrac{1}{\mu}\nabla\mu\times\vec{B}=\mu\vec{j}_f$

积分形式： $\displaystyle\oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int\mu\vec{n}\cdot\vec{j}_f\,\mathrm{d}\sigma+\int\vec{n}\cdot\left(\frac{\nabla\mu}{\mu}\times\vec{B}\right)\mathrm{d}\sigma$ $\quad$ $\mathcal{L}$ 为导线外一圆环

$$\Longrightarrow\quad\oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_1 I_f+\int\vec{n}\cdot\left[(\nabla\mu)\times\vec{H}\right]\mathrm{d}\sigma=\mu I_f+\hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot\int\left[(\nabla\mu)\times\vec{H}\right]\mathrm{d}\sigma$$

对非均匀区：$\mu=\mu_1\theta(-s)+\mu_0\theta(s)$ 其中 s 为 $z=0$ 面内的导线边界线方程，θ 为阶跃函数

$$\nabla\mu=(\mu_0-\mu_1)\delta(s)\nabla s=(\mu_0-\mu_1)\delta(s)|\nabla s|\vec{\eta},\qquad \mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}l\,\mathrm{d}\eta=\frac{1}{|\nabla s|}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}l$$

$\vec{\eta}$ 为导线边界线外法向，$\mathrm{d}l$ 沿导线边界线的线元

$\nabla\mu$ 代入： $\displaystyle\oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_1 I_f+\mu_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot\int\vec{\eta}\times\left[\frac{(\mu_0-\mu_1)}{\mu_0}\vec{H}\right]\delta(s)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}l$

注意到导线外为真空，$\vec{M}_2=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\alpha}_M=\vec{\eta}\times(\vec{M}_2-\vec{M}_1)=-\vec{\eta}\times\vec{M}_1$

而：$\vec{M}_1=\dfrac{\mu_1-\mu_0}{\mu_0}\vec{H} \quad\Longrightarrow\quad \displaystyle\oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_1 I_f+\mu_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot\int\vec{\alpha}_M\mathrm{d}l$

计算柱外 $\vec{B}$ 时还须计及面电流的贡献。

不均匀区： $\nabla\times(\vec{B}/\mu)=\vec{j}_f \quad\Longrightarrow\quad \nabla\times\vec{B}-\frac{1}{\mu}\nabla\mu\times\vec{B}=\mu\vec{j}_f$

积分形式： $\oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int\mu\vec{n}\cdot\vec{j}_f\,\mathrm{d}\sigma+\int\vec{n}\cdot\left(\frac{\nabla\mu}{\mu}\times\vec{B}\right)\mathrm{d}\sigma$ $\quad\mathcal{L}$ 为导线外一圆环

$$\Longrightarrow\quad\oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_1 I_f+\int\vec{n}\cdot\left[(\nabla\mu)\times\vec{H}\right]\mathrm{d}\sigma=\mu I_f+\hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot\int\left[(\nabla\mu)\times\vec{H}\right]\mathrm{d}\sigma$$

对非均匀区： $\mu=\mu_1\theta(-s)+\mu_0\theta(s)$ 其中 s 为 $z=0$ 面内的导线边界线方程， θ 为阶跃函数

$$\nabla\mu=(\mu_0-\mu_1)\delta(s)\nabla s=(\mu_0-\mu_1)\delta(s)|\nabla s|\vec{\eta},\quad \mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}l\,\mathrm{d}\eta=\frac{1}{|\nabla s|}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}l$$

$\vec{\eta}$ 为导线边界线外法向，$\mathrm{d}l$ 沿导线边界线的线元

$\nabla\mu$ 代入： $\oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_1 I_f+\mu_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot\int\vec{\eta}\times\left[\frac{(\mu_0-\mu_1)}{\mu_0}\vec{H}\right]\delta(s)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}l$

注意到导线外为真空， $\vec{M}_2=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\alpha}_M=\vec{\eta}\times(\vec{M}_2-\vec{M}_1)=-\vec{\eta}\times\vec{M}_1$

而： $\vec{M}_1=\frac{\mu_1-\mu_0}{\mu_0}\vec{H} \quad\Longrightarrow\quad \oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_1 I_f+\mu_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot\int\vec{\alpha}_M\mathrm{d}l$

计算柱外 $\vec{B}$ 时还须计及面电流的贡献。

导线内表面 $\vec{H}=\frac{I_f}{2\pi a}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \quad\Longrightarrow\quad \vec{\alpha}_M=-\vec{\eta}\times\vec{M}_1=-\,\hat{\boldsymbol{e}}_s\times\frac{\mu_1-\mu_0}{\mu_0}\vec{H}=-\frac{(\mu_1-\mu_0)I_f}{2\pi a\mu_0}$

不均匀区： $\nabla\times(\vec{B}/\mu)=\vec{j}_f \quad\Longrightarrow\quad \nabla\times\vec{B}-\dfrac{1}{\mu}\nabla\mu\times\vec{B}=\mu\vec{j}_f$

积分形式： $\oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int\mu\vec{n}\cdot\vec{j}_f\,\mathrm{d}\sigma+\int\vec{n}\cdot\left(\dfrac{\nabla\mu}{\mu}\times\vec{B}\right)\mathrm{d}\sigma$ $\quad\mathcal{L}$ 为导线外一圆环

$$\Longrightarrow\quad\oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_1 I_f+\int\vec{n}\cdot\left[(\nabla\mu)\times\vec{H}\right]\mathrm{d}\sigma=\mu I_f+\hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot\int\left[(\nabla\mu)\times\vec{H}\right]\mathrm{d}\sigma$$

对非均匀区： $\mu=\mu_1\theta(-s)+\mu_0\theta(s)$ 其中 s 为 $z=0$ 面内的导线边界线方程，θ 为阶跃函数

$$\nabla\mu=(\mu_0-\mu_1)\delta(s)\nabla s=(\mu_0-\mu_1)\delta(s)|\nabla s|\vec{\eta},\quad \mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}l\,\mathrm{d}\eta=\frac{1}{|\nabla s|}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}l$$

$\vec{\eta}$ 为导线边界线外法向，$\mathrm{d}l$ 沿导线边界线的线元

$\nabla\mu$ 代入： $\oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_1 I_f+\mu_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot\int\vec{\eta}\times\left[\dfrac{(\mu_0-\mu_1)}{\mu_0}\vec{H}\right]\delta(s)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}l$

注意到导线外为真空，$\vec{M}_2=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\alpha}_M=\vec{\eta}\times(\vec{M}_2-\vec{M}_1)=-\vec{\eta}\times\vec{M}_1$

而： $\vec{M}_1=\dfrac{\mu_1-\mu_0}{\mu_0}\vec{H} \quad\Longrightarrow\quad \oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_1 I_f+\mu_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot\int\vec{\alpha}_M\mathrm{d}l$

计算柱外 $\vec{B}$ 时还须计及面电流的贡献。

导线内表面 $\vec{H}=\dfrac{I_f}{2\pi a}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \quad\Longrightarrow\quad \vec{\alpha}_M=-\vec{\eta}\times\vec{M}_1=-\,\hat{\boldsymbol{e}}_s\times\dfrac{\mu_1-\mu_0}{\mu_0}\vec{H}=-\dfrac{(\mu_1-\mu_0)I_f}{2\pi a\mu_0}$

从而： $\oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_1 I_f-\mu_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot\dfrac{(\mu_1-\mu_0)I_f}{2\pi a\mu_0}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\,2\pi a=\mu_0 I$

不均匀区： $\nabla\times(\vec{B}/\mu)=\vec{j}_f \quad\Longrightarrow\quad \nabla\times\vec{B}-\frac{1}{\mu}\nabla\mu\times\vec{B}=\mu\vec{j}_f$

积分形式： $\oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int\mu\vec{n}\cdot\vec{j}_f\,\mathrm{d}\sigma+\int\vec{n}\cdot\left(\frac{\nabla\mu}{\mu}\times\vec{B}\right)\mathrm{d}\sigma$ $\quad\mathcal{L}$ 为导线外一圆环

$$\Longrightarrow\quad \oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_1 I_f+\int\vec{n}\cdot\left[(\nabla\mu)\times\vec{H}\right]\mathrm{d}\sigma=\mu I_f+\hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot\int\left[(\nabla\mu)\times\vec{H}\right]\mathrm{d}\sigma$$

对非均匀区： $\mu=\mu_1\theta(-s)+\mu_0\theta(s)$ 　其中 s 为 $z=0$ 面内的导线边界线方程， θ 为阶跃函数

$$\nabla\mu=(\mu_0-\mu_1)\delta(s)\nabla s=(\mu_0-\mu_1)\delta(s)|\nabla s|\vec{\eta},\quad \mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}l\,\mathrm{d}\eta=\frac{1}{|\nabla s|}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}l$$

$\vec{\eta}$ 为导线边界线外法向， $\mathrm{d}l$ 沿导线边界线的线元

$\nabla\mu$ 代入： $\oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_1 I_f+\mu_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot\int\vec{\eta}\times\left[\frac{(\mu_0-\mu_1)}{\mu_0}\vec{H}\right]\delta(s)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}l$

注意到导线外为真空， $\vec{M}_2=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\alpha}_M=\vec{\eta}\times(\vec{M}_2-\vec{M}_1)=-\vec{\eta}\times\vec{M}_1$

而： $\vec{M}_1=\frac{\mu_1-\mu_0}{\mu_0}\vec{H} \quad\Longrightarrow\quad \oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_1 I_f+\mu_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot\int\vec{\alpha}_M\mathrm{d}l$

计算柱外 $\vec{B}$ 时还须计及面电流的贡献。

导线内表面 $\vec{H}=\frac{I_f}{2\pi a}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \quad\Longrightarrow\quad \vec{\alpha}_M=-\vec{\eta}\times\vec{M}_1=-\,\hat{\boldsymbol{e}}_s\times\frac{\mu_1-\mu_0}{\mu_0}\vec{H}=-\frac{(\mu_1-\mu_0)I_f}{2\pi a\mu_0}$

从而： $\oint_{\mathcal{L}}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_1 I_f-\mu_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot\frac{(\mu_1-\mu_0)I_f}{2\pi a\mu_0}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\,2\pi a=\mu_0 I \quad\Longrightarrow\quad \vec{B}=\frac{\mu_0 I_f}{2\pi s}$