§ 2.4 麦克斯韦方程组　洛伦兹力

§2.4 麦克斯韦方程组　洛伦兹力

一、麦克斯韦之前的电动力学

§ 2.4 麦克斯韦方程组　洛伦兹力

一、麦克斯韦之前的电动力学

静电场：
$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}}_s = \rho/\epsilon_0 \\ \nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}_s = 0 \end{cases}$$
静止电荷激发的电场

§ 2.4 麦克斯韦方程组　洛伦兹力

一、麦克斯韦之前的电动力学

静电场：
$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_s = \rho/\epsilon_0 \\ \nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}_s = 0 \end{cases}$$
静止电荷激发的电场

静磁场：
$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}_s = 0 \\ \nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}_s = \mu_0\vec{\boldsymbol{j}} \end{cases}$$
稳恒电流激发的磁场

§2.4 麦克斯韦方程组　洛伦兹力

一、麦克斯韦之前的电动力学

静电场：
$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_s=\rho/\epsilon_0 \\ \nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}_s=0 \end{cases}$$
静止电荷激发的电场

静磁场：
$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}_s=0 \\ \nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}_s=\mu_0\vec{\boldsymbol{j}} \end{cases}$$
稳恒电流激发的磁场

感生电场：
$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}_i=-\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}$$
变化的磁场激发的电场

§ 2.4 麦克斯韦方程组　洛伦兹力

一、麦克斯韦之前的电动力学

静电场：
$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}}_s = \rho/\epsilon_0 \\ \nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}_s = 0 \end{cases}$$
静止电荷激发的电场

静磁场：
$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_s = 0 \\ \nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}_s = \mu_0 \vec{\boldsymbol{j}} \end{cases}$$
稳恒电流激发的磁场

感生电场：
$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}_i = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}$$
变化的磁场激发的电场

电荷守恒：
$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

§ 2.4 麦克斯韦方程组　洛伦兹力

一、麦克斯韦之前的电动力学

静电场：
$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_s=\rho/\epsilon_0 \\ \nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}_s=0 \end{cases}$$
静止电荷激发的电场

静磁场：
$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}_s=0 \\ \nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}_s=\mu_0\vec{\boldsymbol{j}} \end{cases}$$
稳恒电流激发的磁场

感生电场：
$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}_i=-\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}$$
变化的磁场激发的电场

电荷守恒：
$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

麦克斯韦从这六个特殊方程出发，归纳出电磁场的一般规律。

二、麦克斯韦之贡献：位移电流

(2)

二、麦克斯韦之贡献：位移电流

静电场的散度方程：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_s=\rho/\epsilon_0\Rightarrow\oint\vec{\boldsymbol{E}}_s\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma=Q/\epsilon_0$ 源于库仑定律。

(2)

二、麦克斯韦之贡献：位移电流

静电场的散度方程：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}}_s = \rho/\epsilon_0 \Rightarrow \oint \vec{\boldsymbol{E}}_s \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma = Q/\epsilon_0$ 源于库仑定律。

其直观的物理含义为：单位正（负）电荷发出（会聚）$1/\epsilon_0$ 根电力线。

(2)

二、麦克斯韦之贡献：位移电流

静电场的散度方程：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_s=\rho/\epsilon_0\Rightarrow\oint\vec{\boldsymbol{E}}_s\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma=Q/\epsilon_0$ 源于库仑定律。

其直观的物理含义为：单位正（负）电荷发出（会聚）$1/\epsilon_0$ 根电力线。

对于一般的场，当然不一定满足库仑定律，但其物理内核可以保留。

(2)

二、麦克斯韦之贡献：位移电流

静电场的散度方程：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_s=\rho/\epsilon_0 \Rightarrow \oint \vec{\boldsymbol{E}}_s\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma=Q/\epsilon_0$ 源于库仑定律。

其直观的物理含义为：单位正（负）电荷发出（会聚）$1/\epsilon_0$ 根电力线。

对于一般的场，当然不一定满足库仑定律，但其物理内核可以保留。

麦克斯韦认为，任意的单位正电荷（无论是否静止），均发出 $1/\epsilon_0$ 根电力线。故对一般电场 $\vec{\boldsymbol{E}}$，仍然有：

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}=\rho/\epsilon_0 \tag{1}$$

(2)

二、麦克斯韦之贡献：位移电流

静电场的散度方程：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}}_s = \rho/\epsilon_0 \Rightarrow \oint \vec{\boldsymbol{E}}_s \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma = Q/\epsilon_0$ 源于库仑定律。

其直观的物理含义为：单位正（负）电荷发出（会聚）$1/\epsilon_0$ 根电力线。

对于一般的场，当然不一定满足库仑定律，但其物理内核可以保留。

麦克斯韦认为，任意的单位正电荷（无论是否静止），均发出 $1/\epsilon_0$ 根电力线。故对一般电场 $\vec{\boldsymbol{E}}$，仍然有：

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = \rho/\epsilon_0 \tag{1}$$

旋度方程 $\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}_s = 0$ 对静电场成立，感生电场满足 $\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}_i = -\partial\vec{\boldsymbol{B}}/\partial t$。

(2)

二、麦克斯韦之贡献：位移电流

静电场的散度方程：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_s=\rho/\epsilon_0\Rightarrow\oint\vec{\boldsymbol{E}}_s\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma=Q/\epsilon_0$ 源于库仑定律。

其直观的物理含义为：单位正（负）电荷发出（会聚）$1/\epsilon_0$ 根电力线。

对于一般的场，当然不一定满足库仑定律，但其物理内核可以保留。

麦克斯韦认为，任意的单位正电荷（无论是否静止），均发出 $1/\epsilon_0$ 根电力线。故对一般电场 $\vec{\boldsymbol{E}}$，仍然有：

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}=\rho/\epsilon_0 \tag{1}$$

旋度方程 $\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}_s=0$ 对静电场成立，感生电场满足 $\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}_i=-\partial\vec{\boldsymbol{B}}/\partial t$。

麦克斯韦认为，一般的电场包含了这两部分，即对一般电场 $\vec{\boldsymbol{E}}$，有：

(2)

二、麦克斯韦之贡献：位移电流

静电场的散度方程：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_s=\rho/\epsilon_0 \Rightarrow \oint \vec{\boldsymbol{E}}_s\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma=Q/\epsilon_0$ 源于库仑定律。

其直观的物理含义为：单位正（负）电荷发出（会聚）$1/\epsilon_0$ 根电力线。

对于一般的场，当然不一定满足库仑定律，但其物理内核可以保留。

麦克斯韦认为，任意的单位正电荷（无论是否静止），均发出 $1/\epsilon_0$ 根电力线。故对一般电场 $\vec{\boldsymbol{E}}$，仍然有：

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}=\rho/\epsilon_0 \tag{1}$$

旋度方程 $\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}_s=0$ 对静电场成立，感生电场满足 $\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}_i=-\partial\vec{\boldsymbol{B}}/\partial t$。

麦克斯韦认为，一般的电场包含了这两部分，即对一般电场 $\vec{\boldsymbol{E}}$，有：

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}=-\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \tag{2}$$

方程 $\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_s = 0$ 仅对静磁场成立，对一般磁场，利用 (2) 式，有

$$\frac{\partial}{\partial t}[\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}}] = \nabla \cdot \left[\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}\right] = \nabla \cdot (-\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}) = 0$$

方程 $\nabla\cdot\vec{B}_s=0$ 仅对静磁场成立，对一般磁场，利用 (2) 式，有

$$\frac{\partial}{\partial t}[\nabla\cdot\vec{B}]=\nabla\cdot\left[\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right]=\nabla\cdot(-\nabla\times\vec{E})=0$$

最后一步利用了
对任意矢量场的旋度求散度为 0

方程 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}_s=0$ 仅对静磁场成立，对一般磁场，利用 (2) 式，有

$$\frac{\partial}{\partial t}[\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}]=\nabla\cdot\left[\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}\right]=\nabla\cdot(-\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}})=0$$

最后一步利用了
对任意矢量场的旋度求散度为 0

上式表明 $\nabla\cdot\vec{B}$ 不随时间改变。

方程 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}_s=0$ 仅对静磁场成立，对一般磁场，利用 (2) 式，有

$$\frac{\partial}{\partial t}[\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}]=\nabla\cdot\ [\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}]=\nabla\cdot(-\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}})=0$$

最后一步利用了
对任意矢量场的旋度求散度为 0

上式表明 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}$ 不随时间改变。

如果某时刻，空间无磁场或只有静磁场，显然这时 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0$，又因为 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}$ 不随时间而变，故在任何时刻，无论静磁场或变化的磁场，均应有：

方程 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}_s = 0$ 仅对静磁场成立，对一般磁场，利用 (2) 式，有

$$\frac{\partial}{\partial t}[\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}] = \nabla\cdot\left[\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}\right] = \nabla\cdot(-\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}) = 0$$

最后一步利用了
对任意矢量场的旋度求散度为 0

上式表明 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}$ 不随时间改变。

如果某时刻，空间无磁场或只有静磁场，显然这时 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}} = 0$，又因为 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}$ 不随时间而变，故在任何时刻，无论静磁场或变化的磁场，均应有：

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}} = 0 \tag{3}$$

方程 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}_s=0$ 仅对静磁场成立，对一般磁场，利用 (2) 式，有

$$\frac{\partial}{\partial t}[\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}]=\nabla\cdot\left[\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}\right]=\nabla\cdot(-\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}})=0$$

最后一步利用了
对任意矢量场的旋度求散度为 0

上式表明 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}$ 不随时间改变。

如果某时刻，空间无磁场或只有静磁场，显然这时 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0$，又因为 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}$ 不随时间而变，故在任何时刻，无论静磁场或变化的磁场，均应有：

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0 \tag{3}$$

如果设描述静磁场的方程 $\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}=\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}$ 对一般情况也成立。那么有

方程 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}_s=0$ 仅对静磁场成立，对一般磁场，利用 (2) 式，有

$$\frac{\partial}{\partial t}[\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}]=\nabla\cdot\left[\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}\right]=\nabla\cdot(-\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}})=0$$

最后一步利用了
对任意矢量场的旋度求散度为 0

上式表明 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}$ 不随时间改变。

如果某时刻，空间无磁场或只有静磁场，显然这时 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0$，又因为 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}$ 不随时间而变，故在任何时刻，无论静磁场或变化的磁场，均应有：

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0 \tag{3}$$

如果设描述静磁场的方程 $\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}=\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}$ 对一般情况也成立。那么有

$$\left.\begin{array}{lll}\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}=\mu_0\vec{\boldsymbol{j}} & \Rightarrow & \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}=\dfrac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}})=0\\ \text{电荷守恒定律} & \Rightarrow & \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}=-\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\neq 0\end{array}\right\}\Longrightarrow \text{矛盾!}$$

而电荷守恒定律是经实验证明了的。因此，对一般的磁场，其旋度方程应为

而电荷守恒定律是经实验证明了的。因此，对一般的磁场，其旋度方程应为

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 (\vec{\boldsymbol{j}} + \vec{\boldsymbol{j}}_D), \qquad \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{j}}_D = -\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{j}}$$

而电荷守恒定律是经实验证明了的。因此，对一般的磁场，其旋度方程应为

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D), \qquad \nabla \cdot \vec{j}_D = -\nabla \cdot \vec{j}$$

即：除了传导电流 $\vec{j}$ 之外，磁场的旋度方程还应包含另一项 $\vec{j}_D$，后者满足：

$$\nabla \cdot \vec{j}_D = -\nabla \cdot \vec{j} \overset{\text{电荷守恒}}{=\!=} \frac{\partial \rho}{\partial t} \overset{\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\epsilon_0}{=\!=} \nabla \cdot \left[\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right]$$

而电荷守恒定律是经实验证明了的。因此，对一般的磁场，其旋度方程应为

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\,(\vec{j}+\vec{j}_D),\qquad \nabla\cdot\vec{j}_D=-\nabla\cdot\vec{j}$$

即：除了传导电流 $\vec{j}$ 之外，磁场的旋度方程还应包含另一项 $\vec{j}_D$，后者满足：

$$\nabla\cdot\vec{j}_D=-\nabla\cdot\vec{j}\ \overset{\text{电荷守恒}}{=\!=}\ \frac{\partial\rho}{\partial t}\ \overset{\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\epsilon_0}{=\!=}\ \nabla\cdot\left[\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]$$

因此，如假设一般磁场的旋度满足：

$$\boxed{\nabla\times\vec{B}=\mu_0(\vec{j}+\vec{j}_D)}\quad \text{并令}\quad \boxed{\vec{j}_D=\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$$

而电荷守恒定律是经实验证明了的。因此，对一般的磁场，其旋度方程应为

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \vec{j}_D\right), \qquad \nabla \cdot \vec{j}_D = -\nabla \cdot \vec{j}$$

即：除了传导电流 $\vec{j}$ 之外，磁场的旋度方程还应包含另一项 $\vec{j}_D$ ，后者满足：

$$\nabla \cdot \vec{j}_D = -\nabla \cdot \vec{j} \stackrel{\text{电荷守恒}}{=\!=} \frac{\partial \rho}{\partial t} \stackrel{\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\epsilon_0}{=\!=} \nabla \cdot \left[\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right]$$

因此，如假设一般磁场的旋度满足：

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_D)} \quad \text{并令} \quad \boxed{\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \tag{4}$$

则各方程自恰。

而电荷守恒定律是经实验证明了的。因此，对一般的磁场，其旋度方程应为

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D), \qquad \nabla \cdot \vec{j}_D = -\nabla \cdot \vec{j}$$

即：除了传导电流 $\vec{j}$ 之外，磁场的旋度方程还应包含另一项 $\vec{j}_D$，后者满足：

$$\nabla \cdot \vec{j}_D = -\nabla \cdot \vec{j} \overset{\text{电荷守恒}}{=\!=} \frac{\partial \rho}{\partial t} \overset{\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\epsilon_0}{=\!=} \nabla \cdot \left[\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right]$$

因此，如假设一般磁场的旋度满足：

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_D)} \quad \text{并令} \quad \boxed{\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \tag{4}$$

则各方程自恰。

因此麦克斯韦认为一般磁场的旋度方程应由上(4)式给出，其中 $\vec{j}_D = \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ 称为位移电流 (displacement current)。

而电荷守恒定律是经实验证明了的。因此，对一般的磁场，其旋度方程应为

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\,(\vec{j}+\vec{j}_D),\qquad \nabla\cdot\vec{j}_D=-\nabla\cdot\vec{j}$$

即：除了传导电流 $\vec{j}$ 之外，磁场的旋度方程还应包含另一项 $\vec{j}_D$ ，后者满足：

$$\nabla\cdot\vec{j}_D=-\nabla\cdot\vec{j}\ \overset{\text{电荷守恒}}{=\!=}\ \frac{\partial\rho}{\partial t}\ \overset{\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\epsilon_0}{=\!=}\ \nabla\cdot\left[\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]$$

因此，如假设一般磁场的旋度满足：

$$\boxed{\nabla\times\vec{B}=\mu_0(\vec{j}+\vec{j}_D)}\quad \text{并令}\quad \boxed{\vec{j}_D=\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}\tag{4}$$

则各方程自恰。

因此麦克斯韦认为一般磁场的旋度方程应由上(4)式给出，其中 $\vec{j}_D=\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ 称为位移电流 (displacement current)。引进位移电流是麦克斯韦对电磁理论最杰出的贡献。

若干说明：

1. 当传导电流 $\vec{j}=0$ 时，(4)式退化为 $\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}=\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$，与法拉第定律相似，隐含着：变化的电场会激发涡旋式的磁场，具有物理上的对称性。这在当时仅为理论预言；

若干说明：

1. 当传导电流 $\vec{j}=0$ 时，(4)式退化为 $\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$，与法拉第定律相似，隐含着：变化的电场会激发涡旋式的磁场，具有物理上的对称性。这在当时仅为理论预言；

2. 整个归纳过程并非基于实验，纯属理论假设，（与库仑定律、安培定律、法拉第定律不同）并且在数学上是不严格的，正确与否应由实践验证。

若干说明：

1. 当传导电流 $\vec{j}=0$ 时，(4)式退化为 $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$，与法拉第定律相似，隐含着：变化的电场会激发涡旋式的磁场，具有物理上的对称性。这在当时仅为理论预言；

2. 整个归纳过程并非基于实验，纯属理论假设，（与库仑定律、安培定律、法拉第定律不同）并且在数学上是不严格的，正确与否应由实践验证。

3. 在教材的推导中，通常是从 Ampere 定律与电荷守恒定律之矛盾，引进位移电流。而历史上，Maxwell 于 1861 年认识到位移电流的重要性，实际理论发表于 1865 年。Maxwell 是基于以太模型，引进位移电流的概念。尽管以太模型现已被抛弃，但位移电流的概念却是正确的。

若干说明：

1. 当传导电流 $\vec{j}=0$ 时，(4)式退化为 $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$，与法拉第定律相似，隐含着：变化的电场会激发涡旋式的磁场，具有物理上的对称性。这在当时仅为理论预言；

2. 整个归纳过程并非基于实验，纯属理论假设，（与库仑定律、安培定律、法拉第定律不同）并且在数学上是不严格的，正确与否应由实践验证。

3. 在教材的推导中，通常是从 Ampere 定律与电荷守恒定律之矛盾，引进位移电流。而历史上，Maxwell 于 1861 年认识到位移电流的重要性，实际理论发表于 1865 年。Maxwell 是基于以太模型，引进位移电流的概念。尽管以太模型现已被抛弃，但位移电流的概念却是正确的。

   有关历史可参阅：Am. J. Phys. **31**, 854 (1963).

"Suppose you found a page with the following marks on it – never mind if they mean anything [Maxwell's equations without displacement currents on the left, with displacement currents on the right]. I think you would see that the set of symbols on the right side are "prettier" in some sense than those on the left; they are more symmetrical. Well, the great physicist, James Clark Maxwell, about 1870, thought so too; and substituting the symbols on the right side for those on the left, he founded modern physics and, among other practical results, made wireless telegraphy possible"

N R Campell, What is Science? (Methuen and Company, Ltd., London, 1921)

真空无源区

$\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$

$\nabla \cdot \vec{E} = 0$	$\nabla \cdot \vec{E} = 0$
$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$	$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$
$\nabla \cdot \vec{H} = 0$	$\nabla \cdot \vec{H} = 0$
$\nabla \times \vec{B} = 0$	$\nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

三、电磁现象的普遍规律：麦克斯韦方程组

三、电磁现象的普遍规律：麦克斯韦方程组

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}} = \rho/\epsilon_0 \tag{1}$$

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0\left(\vec{\boldsymbol{j}} + \epsilon_0\frac{\partial\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right) \tag{4}$$

三、电磁现象的普遍规律：麦克斯韦方程组

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}} &= \rho/\epsilon_0 && (1)\\
\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} &= -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} && (2)\\
\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} &= 0 && (3)\\
\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}} &= \mu_0 \left(\vec{\boldsymbol{j}} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t} \right) && (4)
\end{aligned}
$$

讨论：

三、电磁现象的普遍规律：麦克斯韦方程组

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}} = \rho/\epsilon_0 \tag{1}$$

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0\left(\vec{\boldsymbol{j}}+\epsilon_0\frac{\partial\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right) \tag{4}$$

讨论：

1. 正确性。

如：预言电磁波的存在，指出光是一种电磁波，皆得到实验验证。

三、电磁现象的普遍规律：麦克斯韦方程组

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (4)$$

讨论：

1. 正确性。

如：预言电磁波的存在，指出光是一种电磁波，皆得到实验验证。

电磁波存在的理论预言。

Let there be light

在无源 ($\vec{j} = 0$，$\rho = 0$) 区，利用 (2) 和 (4) 式

Let there be light

在无源 ($\vec{\boldsymbol{j}} = 0$，$\rho = 0$) 区，利用 (2) 和 (4) 式

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}) = -\frac{\partial (\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}})}{\partial t} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2}$$

Let there be light

在无源 ($\vec{\boldsymbol{j}} = 0$，$\rho = 0$) 区，利用 (2) 和 (4) 式

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}) = -\frac{\partial(\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}})}{\partial t} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2}$$

利用 (1)：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}}) - \nabla^2 \vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla^2 \vec{\boldsymbol{E}}$

在无源 ($\vec{j} = 0$，$\rho = 0$) 区，利用 (2) 和 (4) 式

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial (\nabla \times \vec{B})}{\partial t} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

利用 (1)：$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$

得波动方程：$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$　存在波动解：$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$

在无源 ($\vec{j}=0$，$\rho=0$) 区，利用 (2) 和 (4) 式

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\quad\Rightarrow\quad\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=-\frac{\partial(\nabla\times\vec{B})}{\partial t}=-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

利用 (1)：$\nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\epsilon_0}=0\quad\Rightarrow\quad\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=-\nabla^2\vec{E}$

得波动方程：$\nabla^2\vec{E}-\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$　存在波动解：$\vec{E}=\vec{E}_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$

2. 完备性。

给定 ρ、$\vec{j}$ 分布及初始、边界条件，由方程 (1-4) 可得唯一解。

在无源 ($\vec{j} = 0$，$\rho = 0$) 区，利用 (2) 和 (4) 式

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial(\nabla \times \vec{B})}{\partial t} = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

利用 (1)：$\nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$

得波动方程：$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0\epsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$　存在波动解：$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$

2. 完备性。

给定 ρ、$\vec{j}$ 分布及初始、边界条件，由方程 (1-4) 可得唯一解。

（证明参见蔡圣善等编著《电动力学》一书 §1.7）

在无源 ($\vec{j}=0$，$\rho=0$) 区，利用 (2) 和 (4) 式

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\quad\Rightarrow\quad\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=-\frac{\partial(\nabla\times\vec{B})}{\partial t}=-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

利用 (1)：$\nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\epsilon_0}=0\quad\Rightarrow\quad\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=-\nabla^2\vec{E}$

得波动方程：$\nabla^2\vec{E}-\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$ 存在波动解：$\vec{E}=\vec{E}_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$

2. 完备性。

   给定 ρ、$\vec{j}$ 分布及初始、边界条件，由方程 (1-4) 可得唯一解。

   （证明参见蔡圣善等编著《电动力学》一书 §1.7）

3. 自恰性。

   各方程彼此协调，不矛盾。

在无源 ($\vec{j}=0$，$\rho=0$) 区，利用 (2) 和 (4) 式

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\quad\Rightarrow\quad\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=-\frac{\partial(\nabla\times\vec{B})}{\partial t}=-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

利用 (1)：$\nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\epsilon_0}=0\quad\Rightarrow\quad\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=-\nabla^2\vec{E}$

得波动方程：$\nabla^2\vec{E}-\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$　存在波动解：$\vec{E}=\vec{E}_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$

2. 完备性。

   给定 ρ、$\vec{j}$ 分布及初始、边界条件，由方程 (1-4) 可得唯一解。

   （证明参见蔡圣善等编著《电动力学》一书 §1.7）

3. 自恰性。

   各方程彼此协调，不矛盾。

4. 独立性。

   任一方程不能从其它方程导出。

5. 负号的重要性。

5. 负号的重要性。

令 $\vec{\boldsymbol{B}}=\mu_0\vec{\boldsymbol{H}}$，则在无源 ($\vec{\boldsymbol{j}}=0$，$\rho=0$) 区，方程 (2) 和 (4) 为

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}} = -\mu_0\frac{\partial\vec{\boldsymbol{H}}}{\partial t} \tag{5a}$$

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}} = +\epsilon_0\frac{\partial\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t} \tag{5b}$$

5. 负号的重要性。

令 $\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \vec{\boldsymbol{H}}$，则在无源 ($\vec{j} = 0$，$\rho = 0$) 区，方程 (2) 和 (4) 为

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{\boldsymbol{H}}}{\partial t} \tag{5a}$$

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}} = +\epsilon_0 \frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t} \tag{5b}$$

上式表明变化的电场（磁场）激发涡旋式磁场（电场）。方程 (5a) 与 (5b) 的右边一正一负，隐含着左右手对称，从而在空间有电磁波传播。如 (5a) 与 (5b) 的右边同为正（或负），则无源区电场 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 满足的方程变为：$\nabla^2 \vec{\boldsymbol{E}} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2} = 0$，没有波动解，空间不再存在电磁波。

5. 负号的重要性。

令 $\vec{B}=\mu_0\vec{H}$，则在无源 ($\vec{j}=0$，$\rho=0$) 区，方程 (2) 和 (4) 为

$$\nabla\times\vec{E} = -\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \tag{5a}$$

$$\nabla\times\vec{H} = +\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{5b}$$

上式表明变化的电场（磁场）激发涡旋式磁场（电场）。方程 (5a) 与 (5b) 的右边一正一负，隐含着左右手对称，从而在空间有电磁波传播。如 (5a) 与 (5b) 的右边同为正（或负），则无源区电场 $\vec{E}$ 满足的方程变为：$\nabla^2\vec{E}+\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$，没有波动解，空间不再存在电磁波。

6. 适用范围。

5. 负号的重要性。

令 $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$，则在无源 ($\vec{j} = 0$，$\rho = 0$) 区，方程 (2) 和 (4) 为

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \tag{5a}$$

$$\nabla \times \vec{H} = +\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{5b}$$

上式表明变化的电场（磁场）激发涡旋式磁场（电场）。方程 (5a) 与 (5b) 的右边一正一负，隐含着左右手对称，从而在空间有电磁波传播。如 (5a) 与 (5b) 的右边同为正（或负），则无源区电场 $\vec{E}$ 满足的方程变为：$\nabla^2 \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$，没有波动解，空间不再存在电磁波。

6. 适用范围。

经典理论，

5. 负号的重要性。

令 $\vec{B}=\mu_0\vec{H}$，则在无源 ($\vec{j}=0$，$\rho=0$) 区，方程 (2) 和 (4) 为

$$\nabla\times\vec{E} = -\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \tag{5a}$$

$$\nabla\times\vec{H} = +\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{5b}$$

上式表明变化的电场（磁场）激发涡旋式磁场（电场）。方程 (5a) 与 (5b) 的右边一正一负，隐含着左右手对称，从而在空间有电磁波传播。如 (5a) 与 (5b) 的右边同为正（或负），则无源区电场 $\vec{E}$ 满足的方程变为：$\nabla^2\vec{E}+\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$，没有波动解，空间不再存在电磁波。

6. 适用范围。

经典理论，宏观平均效应。

5. 负号的重要性。

令 $\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \vec{\boldsymbol{H}}$，则在无源 ($\vec{j} = 0$，$\rho = 0$) 区，方程 (2) 和 (4) 为

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{\boldsymbol{H}}}{\partial t} \tag{5a}$$

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}} = +\epsilon_0 \frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t} \tag{5b}$$

上式表明变化的电场（磁场）激发涡旋式磁场（电场）。方程 (5a) 与 (5b) 的右边一正一负，隐含着左右手对称，从而在空间有电磁波传播。如 (5a) 与 (5b) 的右边同为正（或负），则无源区电场 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 满足的方程变为：$\nabla^2 \vec{\boldsymbol{E}} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2} = 0$，没有波动解，空间不再存在电磁波。

6. 适用范围。

经典理论，宏观平均效应。

体系足够小时，就不能再用宏观介电常数、磁导率等参数来描述介质对外场的响应。

5. 负号的重要性。

令 $\vec{\boldsymbol{B}}=\mu_0\vec{\boldsymbol{H}}$，则在无源 ($\vec{j}=0$，$\rho=0$) 区，方程 (2) 和 (4) 为

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}} = -\mu_0\frac{\partial\vec{\boldsymbol{H}}}{\partial t} \tag{5a}$$

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}} = +\epsilon_0\frac{\partial\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t} \tag{5b}$$

上式表明变化的电场（磁场）激发涡旋式磁场（电场）。方程 (5a) 与 (5b) 的右边一正一负，隐含着左右手对称，从而在空间有电磁波传播。如 (5a) 与 (5b) 的右边同为正（或负），则无源区电场 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 满足的方程变为：$\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2}=0$，没有波动解，空间不再存在电磁波。

6. 适用范围。

经典理论，宏观平均效应。

体系足够小时，就不能再用宏观介电常数、磁导率等参数来描述介质对外场的响应。

适用范围：对金属颗粒，小到几十纳米量级仍然可用宏观介电常数描述。

电磁现象基本规律关系图

库仑定律 $\xRightarrow{\text{叠加原理}}$ $\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla\times\vec{E}=0 \end{cases}$ $\xRightarrow{\text{推广}}$ $\nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\epsilon_0}$

法拉第定律 $\Longrightarrow$ $\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

$\nabla\times\vec{E}=0$ 与 $\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ $\xRightarrow{\text{推广}}$ $\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

$\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ 与 $\nabla\cdot\vec{B}=0$ $\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial t}[\nabla\cdot\vec{B}]}$ $\nabla\cdot\vec{B}=0$

安培定律 $\xRightarrow{\text{叠加原理}}$ $\begin{cases} \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j} \end{cases}$

电荷守恒 $\nabla\cdot\vec{j}+\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0$ $\begin{cases} \nabla\cdot\left[\vec{j}+\overbrace{\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}}^{\vec{j}_D}\right]=0 \\ \text{利用了 } \nabla\cdot\vec{E}=\rho/\epsilon_0 \end{cases}$

$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}$ 与 $\nabla\cdot\left[\vec{j}+\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]=0$ $\xRightarrow{\text{引入 } \vec{j}_D=\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\left(\vec{j}+\vec{j}_D\right)$$
$$=\mu_0\left(\vec{j}+\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

四、Maxwell 方程一些另类表述

四、Maxwell 方程一些另类表述

最早由 Maxwell 总结的电磁场方程（标量形式）：

四、Maxwell 方程一些另类表述

最早由 Maxwell 总结的电磁场方程（标量形式）： 20 个

四、Maxwell 方程一些另类表述

最早由 Maxwell 总结的电磁场方程（标量形式）： 20 个

基于 Gibbs 的矢量分析理论，Heaviside 和 Hertz (独立地)简化成：

四、Maxwell 方程一些另类表述

最早由 Maxwell 总结的电磁场方程（标量形式）： 20 个

基于 Gibbs 的矢量分析理论，Heaviside 和 Hertz (独立地)简化成： 4 个

四、Maxwell 方程一些另类表述

最早由 Maxwell 总结的电磁场方程（标量形式）： 20 个

基于 Gibbs 的矢量分析理论，Heaviside 和 Hertz (独立地)简化成： 4 个

(即通常教科书上的较为对称的矢量形式)

四、Maxwell 方程一些另类表述

最早由 Maxwell 总结的电磁场方程（标量形式）： 20 个

基于 Gibbs 的矢量分析理论，Heaviside 和 Hertz (独立地)简化成： 4 个
(即通常教科书上的较为对称的矢量形式)

其它形式包括：

1. 四元数 (quaternion) 形式

四、Maxwell 方程一些另类表述

最早由 Maxwell 总结的电磁场方程（标量形式）： 20 个

基于 Gibbs 的矢量分析理论，Heaviside 和 Hertz (独立地)简化成： 4 个

(即通常教科书上的较为对称的矢量形式)

其它形式包括：

1. 四元数 (quaternion) 形式

   四元数是一种四重代数，最早由 Hamilton 提出，Tait 大力推广

四、Maxwell 方程一些另类表述

最早由 Maxwell 总结的电磁场方程（标量形式）： 20 个

基于 Gibbs 的矢量分析理论，Heaviside 和 Hertz (独立地)简化成： 4 个

(即通常教科书上的较为对称的矢量形式)

其它形式包括：

1. 四元数 (quaternion) 形式

   四元数是一种四重代数，最早由 Hamilton 提出，Tait 大力推广

   Gibbs 的矢量分析可以看成是四元数的一种特殊情况

四、Maxwell 方程一些另类表述

最早由 Maxwell 总结的电磁场方程（标量形式）： 20 个

基于 Gibbs 的矢量分析理论，Heaviside 和 Hertz (独立地)简化成： 4 个

(即通常教科书上的较为对称的矢量形式)

其它形式包括：

1. 四元数 (quaternion) 形式

   四元数是一种四重代数，最早由 Hamilton 提出，Tait 大力推广

   Gibbs 的矢量分析可以看成是四元数的一种特殊情况

   利用四元数 Maxwell 方程形式上可简化成一个方程

四、Maxwell 方程一些另类表述

最早由 Maxwell 总结的电磁场方程（标量形式）： 20 个

基于 Gibbs 的矢量分析理论，Heaviside 和 Hertz (独立地)简化成： 4 个

(即通常教科书上的较为对称的矢量形式)

其它形式包括：

1. 四元数 (quaternion) 形式

   四元数是一种四重代数，最早由 Hamilton 提出，Tait 大力推广

   Gibbs 的矢量分析可以看成是四元数的一种特殊情况

   利用四元数 Maxwell 方程形式上可简化成一个方程

   参考文献：Eur J Phys **11**, 326 (1990); *ibid* **24**, 397 (2003);

四、Maxwell 方程一些另类表述

最早由 Maxwell 总结的电磁场方程（标量形式）： 20 个

基于 Gibbs 的矢量分析理论，Heaviside 和 Hertz (独立地)简化成： 4 个

(即通常教科书上的较为对称的矢量形式)

其它形式包括：

1. 四元数 (quaternion) 形式

   四元数是一种四重代数，最早由 Hamilton 提出，Tait 大力推广

   Gibbs 的矢量分析可以看成是四元数的一种特殊情况

   利用四元数 Maxwell 方程形式上可简化成一个方程

   参考文献：Eur J Phys **11**, 326 (1990); *ibid* **24**, 397 (2003);
   Am J Phys **34**, 194, 202 (1965); *ibid* **70**, 958 (2002).

2. 外微分形式 (differential forms)

2. 外微分形式 (differential forms)

Maxwell 方程形式上可简化成两个方程

2. 外微分形式 (differential forms)

Maxwell 方程形式上可简化成两个方程

参考文献：I V Lindell, Differential Forms in Electromagnetics (2004)
W Hehl，Foundations of Classical Electrodynamics (2006)

2. 外微分形式 (differential forms)

Maxwell 方程形式上可简化成两个方程

参考文献：I V Lindell, Differential Forms in Electromagnetics (2004)
W Hehl，Foundations of Classical Electrodynamics (2006)
刘觉平， 电动力学

2. 外微分形式 (differential forms)

   Maxwell 方程形式上可简化成两个方程

   参考文献：I V Lindell, Differential Forms in Electromagnetics (2004)
   W Hehl，Foundations of Classical Electrodynamics (2006)
   刘觉平，　电动力学

3. Clifford 代数 (Clifford algebra)，也称几何代数 (geometric algebra) 形式

2. 外微分形式 (differential forms)

   Maxwell 方程形式上可简化成两个方程

   参考文献：I V Lindell, Differential Forms in Electromagnetics (2004)
   W Hehl，Foundations of Classical Electrodynamics (2006)
   刘觉平， 电动力学

3. Clifford 代数 (Clifford algebra)，也称几何代数 (geometric algebra) 形式

   Geometric algebra 是一种较新的数学工具

2. 外微分形式 (differential forms)

   Maxwell 方程形式上可简化成两个方程

   参考文献：I V Lindell, Differential Forms in Electromagnetics (2004)
   W Hehl，Foundations of Classical Electrodynamics (2006)
   刘觉平，　电动力学

3. Clifford 代数 (Clifford algebra)，也称几何代数 (geometric algebra) 形式

   Geometric algebra 是一种较新的数学工具

   据 Hestenes 称，可普遍应用于经典和量子理论

2. 外微分形式 (differential forms)

   Maxwell 方程形式上可简化成两个方程

   参考文献：I V Lindell, Differential Forms in Electromagnetics (2004)
   W Hehl，Foundations of Classical Electrodynamics (2006)
   刘觉平， 电动力学

3. Clifford 代数 (Clifford algebra)，也称几何代数 (geometric algebra) 形式

   Geometric algebra 是一种较新的数学工具

   据 Hestenes 称，可普遍应用于经典和量子理论

   参考文献：Hestenes, New Foundations for Classical Mechanics 2nd ed.

2. 外微分形式 (differential forms)

   Maxwell 方程形式上可简化成两个方程

   参考文献：I V Lindell, Differential Forms in Electromagnetics (2004)
   W Hehl，Foundations of Classical Electrodynamics (2006)
   刘觉平，　电动力学

3. Clifford 代数 (Clifford algebra)，也称几何代数 (geometric algebra) 形式

   Geometric algebra 是一种较新的数学工具

   据 Hestenes 称，可普遍应用于经典和量子理论

   参考文献：Hestenes, New Foundations for Classical Mechanics 2nd ed.
   Am J Phys **71**, 104 (2003), *ibid* **61** 491, 505 (1993)

2. 外微分形式 (differential forms)

   Maxwell 方程形式上可简化成两个方程

   参考文献：I V Lindell, Differential Forms in Electromagnetics (2004)
   W Hehl，Foundations of Classical Electrodynamics (2006)
   刘觉平，　电动力学

3. Clifford 代数 (Clifford algebra)，也称几何代数 (geometric algebra) 形式

   Geometric algebra 是一种较新的数学工具

   据 Hestenes 称，可普遍应用于经典和量子理论

   参考文献：Hestenes, New Foundations for Classical Mechanics 2nd ed.
   Am J Phys **71**, 104 (2003), *ibid* **61** 491, 505 (1993)
   Baylis, Electrodynamics: A Modern Geometric Approach 1999

2. 外微分形式 (differential forms)

Maxwell 方程形式上可简化成两个方程

参考文献：I V Lindell, Differential Forms in Electromagnetics (2004)
W Hehl，Foundations of Classical Electrodynamics (2006)
刘觉平， 电动力学

3. Clifford 代数 (Clifford algebra)，也称几何代数 (geometric algebra) 形式

Geometric algebra 是一种较新的数学工具

据 Hestenes 称，可普遍应用于经典和量子理论

参考文献：Hestenes, New Foundations for Classical Mechanics 2nd ed.
Am J Phys **71**, 104 (2003), *ibid* **61** 491, 505 (1993)
Baylis, Electrodynamics: A Modern Geometric Approach 1999

六、洛伦兹力

2. 外微分形式 (differential forms)

Maxwell 方程形式上可简化成两个方程

参考文献：I V Lindell, Differential Forms in Electromagnetics (2004)
W Hehl，Foundations of Classical Electrodynamics (2006)
刘觉平，电动力学

3. Clifford 代数 (Clifford algebra)，也称几何代数 (geometric algebra) 形式

Geometric algebra 是一种较新的数学工具

据 Hestenes 称，可普遍应用于经典和量子理论

参考文献：Hestenes, New Foundations for Classical Mechanics 2nd ed.
Am J Phys **71**, 104 (2003), *ibid* **61** 491, 505 (1993)
Baylis, Electrodynamics: A Modern Geometric Approach 1999

六、洛伦兹力

连续分布的电荷，单位体积受力： $\vec{\boldsymbol{f}} = \rho\vec{\boldsymbol{E}} + \rho\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = \rho\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$

2. 外微分形式 (differential forms)

 Maxwell 方程形式上可简化成两个方程

 参考文献：I V Lindell, Differential Forms in Electromagnetics (2004)
 W Hehl， Foundations of Classical Electrodynamics (2006)
 刘觉平， 电动力学

3. Clifford 代数 (Clifford algebra)，也称几何代数 (geometric algebra) 形式

 Geometric algebra 是一种较新的数学工具

 据 Hestenes 称，可普遍应用于经典和量子理论

 参考文献：Hestenes, New Foundations for Classical Mechanics 2nd ed.
 Am J Phys **71**, 104 (2003), *ibid* **61** 491, 505 (1993)
 Baylis, Electrodynamics: A Modern Geometric Approach 1999

六、洛伦兹力

连续分布的电荷，单位体积受力： $\vec{f} = \rho\vec{E} + \rho\vec{v}\times\vec{B} = \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}$

$\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 包括 $\rho\, d\tau$ 和 $\vec{j}\, d\tau$ 本身产生的场

2. 外微分形式 (differential forms)

   Maxwell 方程形式上可简化成两个方程

   参考文献：I V Lindell, Differential Forms in Electromagnetics (2004)
   W Hehl，Foundations of Classical Electrodynamics (2006)
   刘觉平， 电动力学

3. Clifford 代数 (Clifford algebra)，也称几何代数 (geometric algebra) 形式

   Geometric algebra 是一种较新的数学工具

   据 Hestenes 称，可普遍应用于经典和量子理论

   参考文献：Hestenes, New Foundations for Classical Mechanics 2nd ed.
   Am J Phys **71**, 104 (2003), *ibid* **61** 491, 505 (1993)
   Baylis, Electrodynamics: A Modern Geometric Approach 1999

六、洛伦兹力

连续分布的电荷，单位体积受力： $\vec{\boldsymbol{f}} = \rho\vec{\boldsymbol{E}} + \rho\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = \rho\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$

$\vec{\boldsymbol{E}}$ 和 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 包括 $\rho\, d\tau$ 和 $\vec{\boldsymbol{j}}\, d\tau$ 本身产生的场

点电荷在外场中的受力： $\vec{\boldsymbol{F}} = q\vec{\boldsymbol{E}} + q\,\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$ $\vec{\boldsymbol{E}}$、$\vec{\boldsymbol{B}}$ 为外场