第四章：静磁场

第四章：静磁场

- § 4.1 稳恒电场

第四章：静磁场

- § 4.1 稳恒电场
- § 4.2 静磁场的矢势及其微分方程和边值关系

第四章：静磁场

- § 4.1 稳恒电场
- § 4.2 静磁场的矢势及其微分方程和边值关系
- § 4.3 静电场方法在静磁场中的应用

第四章：静磁场

第四章：静磁场

§4.1 稳恒电场

§ 4.1 稳恒电场

静磁场来自于稳恒电流，电流是靠电场驱动 $(\vec{j} = \sigma_c \vec{E})$，故先讨论稳恒电场。

§ 4.1 稳恒电场

静磁场来自于稳恒电流，电流是靠电场驱动 $(\vec{\boldsymbol{j}} = \sigma_c \vec{\boldsymbol{E}})$，故先讨论稳恒电场。

稳恒电场：$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \vec{\boldsymbol{j}} \neq 0$ 区别于静电场：$\vec{\boldsymbol{j}} = 0$

§4.1 稳恒电场

静磁场来自于稳恒电流，电流是靠电场驱动 ($\vec{j} = \sigma_c \vec{E}$)，故先讨论稳恒电场。

稳恒电场：$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \vec{j} \neq 0$　　　　区别于静电场：$\vec{j} = 0$

一、存在稳恒电流的必要条件 —— 外来等效电场 $\vec{E}_{外}$

§ 4.1 稳恒电场

静磁场来自于稳恒电流，电流是靠电场驱动 $(\vec{j} = \sigma_c \vec{E})$，故先讨论稳恒电场。

稳恒电场：$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \vec{j} \neq 0$　　区别于静电场：$\vec{j} = 0$

一、存在稳恒电流的必要条件 —— 外来等效电场 $\vec{E}_{外}$

物理图像：

§ 4.1 稳恒电场

静磁场来自于稳恒电流，电流是靠电场驱动 ($\vec{j} = \sigma_c \vec{E}$)，故先讨论稳恒电场。

稳恒电场：$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \vec{j} \neq 0$　　　区别于静电场：$\vec{j} = 0$

一、存在稳恒电流的必要条件 —— 外来等效电场 $\vec{E}_{外}$

物理图像：

稳定电流是导体内电荷（电子）稳定流动，电子碰撞晶格离子，能量转化为导体内部焦耳热，电磁能被损耗，转化为热能。为保持稳定电流，必须有外来等效电场 $\vec{E}_{外}$ 做功。

§ 4.1 稳恒电场

静磁场来自于稳恒电流，电流是靠电场驱动 $(\vec{j} = \sigma_c \vec{E})$，故先讨论稳恒电场。

稳恒电场：$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \vec{j} \neq 0$ 区别于静电场：$\vec{j} = 0$

一、存在稳恒电流的必要条件 —— 外来等效电场 $\vec{E}_{外}$

物理图像：

稳定电流是导体内电荷（电子）稳定流动，电子碰撞晶格离子，能量转化为导体内部焦耳热，电磁能被损耗，转化为热能。为保持稳定电流，必须有外来等效电场 $\vec{E}_{外}$ 做功。

证明：

§4.1 稳恒电场

静磁场来自于稳恒电流，电流是靠电场驱动 ($\vec{j} = \sigma_c \vec{E}$)，故先讨论稳恒电场。

稳恒电场：$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \vec{j} \neq 0$　　　区别于静电场：$\vec{j} = 0$

一、存在稳恒电流的必要条件 —— 外来等效电场 $\vec{E}_{外}$

物理图像：

稳定电流是导体内电荷（电子）稳定流动，电子碰撞晶格离子，能量转化为导体内部焦耳热，电磁能被损耗，转化为热能。为保持稳定电流，必须有外来等效电场 $\vec{E}_{外}$ 做功。

证明：　出发点：能量守恒与转化方程 $\vec{j} \cdot \vec{E} = -\dfrac{\partial w}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{S},$

§ 4.1 稳恒电场

静磁场来自于稳恒电流，电流是靠电场驱动 ($\vec{j} = \sigma_c \vec{E}$)，故先讨论稳恒电场。

稳恒电场：$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \vec{j} \neq 0$ 　　区别于静电场：$\vec{j} = 0$

一、存在稳恒电流的必要条件 —— 外来等效电场 $\vec{E}_{外}$

物理图像：

稳定电流是导体内电荷（电子）稳定流动，电子碰撞晶格离子，能量转化为导体内部焦耳热，电磁能被损耗，转化为热能。为保持稳定电流，必须有外来等效电场 $\vec{E}_{外}$ 做功。

证明： 出发点：能量守恒与转化方程 $\vec{j} \cdot \vec{E} = -\dfrac{\partial w}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{S}$, 　$\vec{S}$ 为 Poynting 矢量

§ 4.1 稳恒电场

静磁场来自于稳恒电流，电流是靠电场驱动 ($\vec{j} = \sigma_c \vec{E}$)，故先讨论稳恒电场。

稳恒电场：$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \vec{j} \neq 0$　　　　区别于静电场：$\vec{j} = 0$

一、存在稳恒电流的必要条件 —— 外来等效电场 $\vec{E}_{外}$

物理图像：

稳定电流是导体内电荷（电子）稳定流动，电子碰撞晶格离子，能量转化为导体内部焦耳热，电磁能被损耗，转化为热能。为保持稳定电流，必须有外来等效电场 $\vec{E}_{外}$ 做功。

证明：　出发点：能量守恒与转化方程 $\vec{j} \cdot \vec{E} = -\dfrac{\partial w}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{S}$,　　$\vec{S}$ 为 Poynting 矢量

稳定：$\partial / \partial t = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{j} \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \vec{S}$　　而：$\vec{j} = \sigma_c (\vec{E} + \vec{E}_{外})$

§ 4.1 稳恒电场

静磁场来自于稳恒电流，电流是靠电场驱动 $(\vec{j}=\sigma_c\vec{E})$，故先讨论稳恒电场。

稳恒电场：$\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0,\quad \vec{j}\neq 0$　　　区别于静电场：$\vec{j}=0$

一、存在稳恒电流的必要条件 —— 外来等效电场 $\vec{E}_{外}$

物理图像：

稳定电流是导体内电荷（电子）稳定流动，电子碰撞晶格离子，能量转化为导体内部焦耳热，电磁能被损耗，转化为热能。为保持稳定电流，必须有外来等效电场 $\vec{E}_{外}$ 做功。

证明：　出发点：能量守恒与转化方程 $\vec{j}\cdot\vec{E}=-\dfrac{\partial w}{\partial t}-\nabla\cdot\vec{S}$，　$\vec{S}$ 为 Poynting 矢量

稳定：$\partial/\partial t=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{j}\cdot\vec{E}=-\nabla\cdot\vec{S}$　　而：$\vec{j}=\sigma_c(\vec{E}+\vec{E}_{外})$

$$\Longrightarrow\quad \int\vec{j}\cdot\vec{E}_{外}\,\mathrm{d}\tau=\int\frac{1}{\sigma_c}\vec{j}^{\,2}\,\mathrm{d}\tau+\oint\vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma$$

§ 4.1 稳恒电场

静磁场来自于稳恒电流，电流是靠电场驱动 ($\vec{j}=\sigma_c\vec{E}$)，故先讨论稳恒电场。

稳恒电场：$\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0,\quad \vec{j}\neq 0$　　　区别于静电场：$\vec{j}=0$

一、存在稳恒电流的必要条件 —— 外来等效电场 $\vec{E}_{外}$

物理图像：

稳定电流是导体内电荷（电子）稳定流动，电子碰撞晶格离子，能量转化为导体内部焦耳热，电磁能被损耗，转化为热能。为保持稳定电流，必须有外来等效电场 $\vec{E}_{外}$ 做功。

证明：　出发点：能量守恒与转化方程 $\vec{j}\cdot\vec{E}=-\dfrac{\partial w}{\partial t}-\nabla\cdot\vec{S}$，　$\vec{S}$ 为 Poynting 矢量

稳定：$\partial/\partial t=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{j}\cdot\vec{E}=-\nabla\cdot\vec{S}$　　而：$\vec{j}=\sigma_c(\vec{E}+\vec{E}_{外})$

$$\Longrightarrow\quad \int\vec{j}\cdot\vec{E}_{外}\,\mathrm{d}\tau=\int\frac{1}{\sigma_c}\vec{j}^{\,2}\,\mathrm{d}\tau+\oint\vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma$$

整个空间积分，对恒定场，右边第二项为 0 $\quad\Longrightarrow\quad \displaystyle\int\vec{j}\cdot\vec{E}_{外}\,\mathrm{d}\tau=\int\frac{1}{\sigma_c}\vec{j}^{\,2}\,\mathrm{d}\tau$

§ 4.1 稳恒电场

静磁场来自于稳恒电流，电流是靠电场驱动 $(\vec{j} = \sigma_c \vec{E})$，故先讨论稳恒电场。

稳恒电场：$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \vec{j} \neq 0$ 区别于静电场：$\vec{j} = 0$

一、存在稳恒电流的必要条件 —— 外来等效电场 $\vec{E}_{外}$

物理图像：

稳定电流是导体内电荷（电子）稳定流动，电子碰撞晶格离子，能量转化为导体内部焦耳热，电磁能被损耗，转化为热能。为保持稳定电流，必须有外来等效电场 $\vec{E}_{外}$ 做功。

证明： 出发点：能量守恒与转化方程 $\vec{j} \cdot \vec{E} = -\dfrac{\partial w}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{S}$， $\vec{S}$ 为 Poynting 矢量

稳定：$\partial/\partial t = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{j} \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \vec{S}$ 而：$\vec{j} = \sigma_c(\vec{E} + \vec{E}_{外})$

$$\Longrightarrow \quad \int \vec{j} \cdot \vec{E}_{外}\, \mathrm{d}\tau = \int \frac{1}{\sigma_c} \vec{j}^{\,2}\, \mathrm{d}\tau + \oint \vec{n} \cdot \vec{S}\, \mathrm{d}\sigma$$

整个空间积分，对恒定场，右边第二项为 0 $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int \vec{j} \cdot \vec{E}_{外}\, \mathrm{d}\tau = \int \frac{1}{\sigma_c} \vec{j}^{\,2}\, \mathrm{d}\tau$

从而，$\vec{E}_{外} = 0$ 必导致 $\vec{j} = 0$

思考： 由：$\vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{S}} - \dfrac{\partial w}{\partial t}$，对恒定场，$\dfrac{\partial w}{\partial t} = 0$，两边对无穷大空间积分

思考： 由：$\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{S}} - \dfrac{\partial w}{\partial t}$，对恒定场，$\dfrac{\partial w}{\partial t} = 0$，两边对无穷大空间积分

$$\int_{\mathcal{V}_\infty}\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{d}\tau = -\oint_{\mathcal{S}_\infty}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{S}}\,\mathrm{d}\sigma,$$

对恒定场，对 $\mathcal{S}_\infty$ 的面积分为 0 (why?)

思考： 由：$\vec{j}\cdot\vec{E} = -\nabla\cdot\vec{S} - \dfrac{\partial w}{\partial t}$，对恒定场，$\dfrac{\partial w}{\partial t} = 0$，两边对无穷大空间积分

$$\int_{\mathcal{V}_\infty} \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau = -\oint_{\mathcal{S}_\infty} \vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma,$$

对恒定场，对 $\mathcal{S}_\infty$ 的面积分为 0 (why?)

从而：$W = \displaystyle\int_{\mathcal{V}_\infty} \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau = 0$ —— 体系焦耳热损耗为 0 ?

思考： 由：$\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}=-\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{S}}-\dfrac{\partial w}{\partial t}$，对恒定场，$\dfrac{\partial w}{\partial t}=0$，两边对无穷大空间积分

$$\int_{\mathcal{V}_\infty}\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{d}\tau=-\oint_{\mathcal{S}_\infty}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{S}}\,\mathrm{d}\sigma,$$

对恒定场，对 $\mathcal{S}_\infty$ 的面积分为 0 (why?)

从而：$W=\displaystyle\int_{\mathcal{V}_\infty}\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{d}\tau=0$ —— 体系焦耳热损耗为 0 ?

☞ $$0=\int_{\mathcal{V}_\infty}\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{d}\tau=\underbrace{\int_{\mathcal{V}_\infty}\frac{1}{\sigma_c}\vec{\boldsymbol{j}}^{\,2}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{这项才是焦耳热}}-\underbrace{\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_{外}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{外电源做功}}$$

利用了：存在等效外电场 $\vec{\boldsymbol{j}}=\sigma_c(\vec{\boldsymbol{E}}+\vec{\boldsymbol{E}}_{外})$

思考： 由：$\vec{j}\cdot\vec{E} = -\nabla\cdot\vec{S} - \dfrac{\partial w}{\partial t}$，对恒定场，$\dfrac{\partial w}{\partial t} = 0$，两边对无穷大空间积分

$$\int_{\mathcal{V}_\infty}\vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau = -\oint_{\mathcal{S}_\infty}\vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma,$$

对恒定场，对 $\mathcal{S}_\infty$ 的面积分为 0　(why?)

从而：$W = \displaystyle\int_{\mathcal{V}_\infty}\vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau = 0$　—— 体系焦耳热损耗为 0？

☞
$$0 = \int_{\mathcal{V}_\infty}\vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau = \underbrace{\int_{\mathcal{V}_\infty}\frac{1}{\sigma_c}\vec{j}^{\,2}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{这项才是焦耳热}} - \underbrace{\int_{\mathcal{V}}\vec{j}\cdot\vec{E}_{外}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{外电源做功}}$$

利用了：存在等效外电场
$\vec{j} = \sigma_c(\vec{E} + \vec{E}_{外})$

对非稳定场：
$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}}\vec{j}\cdot\vec{E}_{外}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{外电源做功}} = \underbrace{\int_{\mathcal{V}}\frac{1}{\sigma_c}\vec{j}^{\,2}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{焦耳热}} + \underbrace{\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma}_{\text{流出的电磁能}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{V}} w\,\mathrm{d}\tau}_{\text{电磁能的增加}}$$

思考： 由：$\vec{j}\cdot\vec{E} = -\nabla\cdot\vec{S} - \dfrac{\partial w}{\partial t}$，对恒定场，$\dfrac{\partial w}{\partial t} = 0$，两边对无穷大空间积分

$$\int_{\mathcal{V}_\infty} \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau = -\oint_{\mathcal{S}_\infty} \vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma,$$

对恒定场，对 $\mathcal{S}_\infty$ 的面积分为 0 (why?)

从而：$W = \displaystyle\int_{\mathcal{V}_\infty} \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau = 0$ —— 体系焦耳热损耗为 0 ?

☞

$$0 = \int_{\mathcal{V}_\infty} \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau = \underbrace{\int_{\mathcal{V}_\infty} \frac{1}{\sigma_c}\vec{j}^{\,2}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{这项才是焦耳热}} - \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \vec{j}\cdot\vec{E}_{外}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{外电源做功}}$$

利用了：存在等效外电场 $\vec{j} = \sigma_c(\vec{E} + \vec{E}_{外})$

对非稳定场：
$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}} \vec{j}\cdot\vec{E}_{外}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{外电源做功}} = \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\sigma_c}\vec{j}^{\,2}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{焦耳热}} + \underbrace{\oint_{\mathcal{S}} \vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma}_{\text{流出的电磁能}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{V}} w\,\mathrm{d}\tau}_{\text{电磁能的增加}}$$

二、稳恒电场满足的方程和边值关系

思考： 由：$\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}=-\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{S}}-\dfrac{\partial w}{\partial t}$，对恒定场，$\dfrac{\partial w}{\partial t}=0$，两边对无穷大空间积分

$$\int_{\mathcal{V}_\infty}\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{d}\tau=-\oint_{\mathcal{S}_\infty}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{S}}\,\mathrm{d}\sigma,$$

对恒定场，对 $\mathcal{S}_\infty$ 的面积分为 0　(why?)

从而：$W=\displaystyle\int_{\mathcal{V}_\infty}\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{d}\tau=0$　—— 体系焦耳热损耗为 0 ?

☞

$$0=\int_{\mathcal{V}_\infty}\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{d}\tau=\underbrace{\int_{\mathcal{V}_\infty}\frac{1}{\sigma_c}\vec{\boldsymbol{j}}^{\,2}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{这项才是焦耳热}}-\underbrace{\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_{\text{外}}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{外电源做功}}$$

利用了：存在等效外电场
$\vec{\boldsymbol{j}}=\sigma_c(\vec{\boldsymbol{E}}+\vec{\boldsymbol{E}}_{\text{外}})$

对非稳定场：

$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_{\text{外}}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{外电源做功}}=\underbrace{\int_{\mathcal{V}}\frac{1}{\sigma_c}\vec{\boldsymbol{j}}^{\,2}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{焦耳热}}+\underbrace{\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{S}}\,\mathrm{d}\sigma}_{\text{流出的电磁能}}+\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{V}}w\,\mathrm{d}\tau}_{\text{电磁能的增加}}$$

二、稳恒电场满足的方程和边值关系

由 Maxwell 方程：

思考： 由：$\vec{j}\cdot\vec{E} = -\nabla\cdot\vec{S} - \dfrac{\partial w}{\partial t}$，对恒定场，$\dfrac{\partial w}{\partial t} = 0$，两边对无穷大空间积分

$$\int_{\mathcal{V}_\infty} \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau = -\oint_{\mathcal{S}_\infty} \vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma,$$

对恒定场，对 $\mathcal{S}_\infty$ 的面积分为 0 (why?)

从而：$W = \displaystyle\int_{\mathcal{V}_\infty} \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau = 0$ —— 体系焦耳热损耗为 0 ?

☞
$$0 = \int_{\mathcal{V}_\infty} \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau = \underbrace{\int_{\mathcal{V}_\infty} \frac{1}{\sigma_c}\vec{j}^{\,2}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{这项才是焦耳热}} - \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \vec{j}\cdot\vec{E}_{外}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{外电源做功}}$$

利用了：存在等效外电场 $\vec{j} = \sigma_c(\vec{E} + \vec{E}_{外})$

对非稳定场：
$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}} \vec{j}\cdot\vec{E}_{外}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{外电源做功}} = \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\sigma_c}\vec{j}^{\,2}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{焦耳热}} + \underbrace{\oint_{\mathcal{S}} \vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma}_{\text{流出的电磁能}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{V}} w\,\mathrm{d}\tau}_{\text{电磁能的增加}}$$

二、稳恒电场满足的方程和边值关系

由 Maxwell 方程：

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0, \qquad \nabla\cdot\vec{D} = \rho_f \qquad \nabla\times\vec{H} = \vec{j}_f$$

思考： 由：$\vec{j}\cdot\vec{E} = -\nabla\cdot\vec{S} - \dfrac{\partial w}{\partial t}$，对恒定场，$\dfrac{\partial w}{\partial t} = 0$，两边对无穷大空间积分

$$\int_{\mathcal{V}_\infty} \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau = -\oint_{\mathcal{S}_\infty} \vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma,$$

对恒定场，对 $\mathcal{S}_\infty$ 的面积分为 0 (why?)

从而：$W = \displaystyle\int_{\mathcal{V}_\infty} \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau = 0$ —— 体系焦耳热损耗为 0 ?

$$0 = \int_{\mathcal{V}_\infty} \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau = \underbrace{\int_{\mathcal{V}_\infty} \frac{1}{\sigma_c}\vec{j}^{\,2}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{这项才是焦耳热}} - \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \vec{j}\cdot\vec{E}_{外}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{外电源做功}}$$

利用了：存在等效外电场 $\vec{j} = \sigma_c(\vec{E} + \vec{E}_{外})$

对非稳定场：

$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}} \vec{j}\cdot\vec{E}_{外}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{外电源做功}} = \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\sigma_c}\vec{j}^{\,2}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{焦耳热}} + \underbrace{\oint_{\mathcal{S}} \vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma}_{\text{流出的电磁能}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{V}} w\,\mathrm{d}\tau}_{\text{电磁能的增加}}$$

二、稳恒电场满足的方程和边值关系

由 Maxwell 方程：

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0, \qquad \nabla\cdot\vec{D} = \rho_f \qquad \nabla\times\vec{H} = \vec{j}_f$$

$$\vec{j}_f = \sigma_c(\vec{E} + \vec{E}_{外}) \qquad \nabla\cdot\vec{j}_f = -\frac{\partial\rho_f}{\partial t} = 0$$

$\vec{E}_{外}$ 为外来非电动力的等价场，在电动力学中需要给定方可求解。

思考： 由：$\vec{j}\cdot\vec{E} = -\nabla\cdot\vec{S} - \dfrac{\partial w}{\partial t}$，对恒定场，$\dfrac{\partial w}{\partial t} = 0$，两边对无穷大空间积分

$$\int_{\mathcal{V}_\infty} \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau = -\oint_{\mathcal{S}_\infty} \vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma,$$

对恒定场，对 $\mathcal{S}_\infty$ 的面积分为 0 (why?)

从而：$W = \displaystyle\int_{\mathcal{V}_\infty} \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau = 0$ —— 体系焦耳热损耗为 0？

$$0 = \int_{\mathcal{V}_\infty} \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau = \underbrace{\int_{\mathcal{V}_\infty} \frac{1}{\sigma_c}\vec{j}^{\,2}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{这项才是焦耳热}} - \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \vec{j}\cdot\vec{E}_{外}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{外电源做功}}$$

利用了：存在等效外电场 $\vec{j} = \sigma_c(\vec{E} + \vec{E}_{外})$

对非稳定场：

$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}} \vec{j}\cdot\vec{E}_{外}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{外电源做功}} = \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\sigma_c}\vec{j}^{\,2}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{焦耳热}} + \underbrace{\oint_{\mathcal{S}} \vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma}_{\text{流出的电磁能}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{V}} w\,\mathrm{d}\tau}_{\text{电磁能的增加}}$$

二、稳恒电场满足的方程和边值关系

由 Maxwell 方程：

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0, \qquad \nabla\cdot\vec{D} = \rho_f \qquad \nabla\times\vec{H} = \vec{j}_f$$

$$\vec{j}_f = \sigma_c(\vec{E} + \vec{E}_{外}) \qquad \nabla\cdot\vec{j}_f = -\frac{\partial\rho_f}{\partial t} = 0$$

$\vec{E}_{外}$ 为外来非电动力的等价场，在电动力学中需要给定方可求解。

$\vec{E}_{外} \neq 0$ 的区称为电源区 电动力学一般仅讨论 $\vec{E}_{外} = 0$ 的区，从而：$\vec{j}_f = \sigma_c\vec{E}$

思考： 由：$\vec{j}\cdot\vec{E} = -\nabla\cdot\vec{S} - \dfrac{\partial w}{\partial t}$，对恒定场，$\dfrac{\partial w}{\partial t} = 0$，两边对无穷大空间积分

$$\int_{\mathcal{V}_\infty} \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau = -\oint_{\mathcal{S}_\infty} \vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma,$$

对恒定场，对 $\mathcal{S}_\infty$ 的面积分为 0 (why?)

从而：$W = \int_{\mathcal{V}_\infty} \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau = 0$ —— 体系焦耳热损耗为 0 ?

☞ $$0 = \int_{\mathcal{V}_\infty} \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau = \underbrace{\int_{\mathcal{V}_\infty} \frac{1}{\sigma_c}\vec{j}^{\,2}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{这项才是焦耳热}} - \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \vec{j}\cdot\vec{E}_{外}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{外电源做功}}$$

利用了：存在等效外电场 $\vec{j} = \sigma_c(\vec{E} + \vec{E}_{外})$

对非稳定场：
$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}} \vec{j}\cdot\vec{E}_{外}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{外电源做功}} = \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\sigma_c}\vec{j}^{\,2}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{焦耳热}} + \underbrace{\oint_{\mathcal{S}} \vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma}_{\text{流出的电磁能}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{V}} w\,\mathrm{d}\tau}_{\text{电磁能的增加}}$$

二、稳恒电场满足的方程和边值关系

由 Maxwell 方程：

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0, \qquad \nabla\cdot\vec{D} = \rho_f \qquad \nabla\times\vec{H} = \vec{j}_f$$

$$\vec{j}_f = \sigma_c(\vec{E} + \vec{E}_{外}) \qquad \nabla\cdot\vec{j}_f = -\frac{\partial\rho_f}{\partial t} = 0$$

$\vec{E}_{外}$ 为外来非电动力的等价场，在电动力学中需要给定方可求解。

$\vec{E}_{外} \neq 0$ 的区称为电源区 电动力学一般仅讨论 $\vec{E}_{外} = 0$ 的区，从而：$\vec{j}_f = \sigma_c\vec{E}$

由于 $\nabla\times\vec{E} = 0$，因此与静电场相同，仍然可引进标量势：$\vec{E} = -\nabla\varphi$

稳恒电场方程化为：

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla \varphi) = \rho_f \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{j}}_f = -\nabla \cdot (\sigma_c \nabla \varphi) = 0 \quad (2)$$

稳恒电场方程化为：
$$\nabla \cdot \vec{D} = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla \varphi) = \rho_f \quad (1)$$
$$\nabla \cdot \vec{j}_f = -\nabla \cdot (\sigma_c \nabla \varphi) = 0 \quad (2)$$

相应的边值关系：
$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f \quad \Longrightarrow \quad \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\sigma_f$$

稳恒电场方程化为：

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}} = -\nabla\cdot(\epsilon\nabla\varphi) = \rho_f \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}_f = -\nabla\cdot(\sigma_c\nabla\varphi) = 0 \tag{2}$$

相应的边值关系：

$$\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}_2-\vec{\boldsymbol{D}}_1) = \sigma_f \quad\Longrightarrow\quad \epsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\epsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = -\sigma_f \tag{3}$$

$$\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{E}}_2-\vec{\boldsymbol{E}}_1) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \varphi_2 = \varphi_1$$

稳恒电场方程化为：

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla \varphi) = \rho_f \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{j}}_f = -\nabla \cdot (\sigma_c \nabla \varphi) = 0 \quad (2)$$

相应的边值关系：

$$\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}_2 - \vec{\boldsymbol{D}}_1) = \sigma_f \quad \Longrightarrow \quad \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\sigma_f \quad (3)$$

$$\vec{\boldsymbol{n}} \times (\vec{\boldsymbol{E}}_2 - \vec{\boldsymbol{E}}_1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi_2 = \varphi_1 \quad (4)$$

$$\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{j}}_2 - \vec{\boldsymbol{j}}_1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sigma_{c1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma_{c2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$$

当界面无面电流时

稳恒电场方程化为：

$$\nabla\cdot\vec{D} = -\nabla\cdot(\epsilon\nabla\varphi) = \rho_f \qquad (1)$$

$$\nabla\cdot\vec{j}_f = -\nabla\cdot(\sigma_c\nabla\varphi) = 0 \qquad (2)$$

相应的边值关系：

$$\vec{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma_f \quad\Longrightarrow\quad \epsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\epsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=-\sigma_f \qquad (3)$$

$$\vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \varphi_2=\varphi_1 \qquad (4)$$

$$\vec{n}\cdot(\vec{j}_2-\vec{j}_1)=0 \quad\Longrightarrow\quad \sigma_{c1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\sigma_{c2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \qquad (5)$$

当界面无面电流时

对均匀导体内部：(2) 式化为 Laplace 方程：$\nabla^2\varphi=0$

稳恒电场方程化为：
$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}} = -\nabla\cdot(\epsilon\nabla\varphi) = \rho_f \qquad (1)$$
$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}_f = -\nabla\cdot(\sigma_c\nabla\varphi) = 0 \qquad (2)$$

相应的边值关系：

$$\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}_2-\vec{\boldsymbol{D}}_1)=\sigma_f \quad\Longrightarrow\quad \epsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\epsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=-\sigma_f \qquad (3)$$
$$\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{E}}_2-\vec{\boldsymbol{E}}_1)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \varphi_2=\varphi_1 \qquad (4)$$
$$\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{j}}_2-\vec{\boldsymbol{j}}_1)=0 \quad\Longrightarrow\quad \sigma_{c1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\sigma_{c2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$$ 当界面无面电流时 (5)

对均匀导体内部：(2) 式化为 Laplace 方程：$\nabla^2\varphi = 0$

联立 (3 – 5) 可解得 φ及界面面电荷密度 σ_f（与静电情况不同，此时导体不是等势体）。

稳恒电场方程化为：
$$\nabla\cdot\vec{D} = -\nabla\cdot(\epsilon\nabla\varphi) = \rho_f \quad (1)$$
$$\nabla\cdot\vec{j}_f = -\nabla\cdot(\sigma_c\nabla\varphi) = 0 \quad (2)$$

相应的边值关系：

$$\vec{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1) = \sigma_f \quad \Longrightarrow \quad \epsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} - \epsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = -\sigma_f \quad (3)$$
$$\vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi_2 = \varphi_1 \quad (4)$$
$$\vec{n}\cdot(\vec{j}_2-\vec{j}_1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sigma_{c1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \sigma_{c2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \quad (5)$$
当界面无面电流时

对均匀导体内部：(2) 式化为 Laplace 方程：$\nabla^2\varphi = 0$

联立 (3 – 5) 可解得 φ及界面面电荷密度 σ_f（与静电情况不同，此时导体不是等势体）。

同时，由 (1) 式知 $\rho_f = -\epsilon\nabla^2\varphi = 0$，即均匀导体区内无自由电荷（与静电情况相同）。

稳恒电场方程化为：
$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}}=-\nabla\cdot(\epsilon\nabla\varphi)=\rho_f \quad (1)$$
$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}_f=-\nabla\cdot(\sigma_c\nabla\varphi)=0 \quad (2)$$

相应的边值关系：

$$\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}_2-\vec{\boldsymbol{D}}_1)=\sigma_f \quad\Longrightarrow\quad \epsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\epsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=-\sigma_f \quad (3)$$
$$\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{E}}_2-\vec{\boldsymbol{E}}_1)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \varphi_2=\varphi_1 \quad (4)$$
$$\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{j}}_2-\vec{\boldsymbol{j}}_1)=0 \quad\Longrightarrow\quad \sigma_{c1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\sigma_{c2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \quad \text{当界面无面电流时} \quad (5)$$

对均匀导体内部：(2) 式化为 Laplace 方程：$\nabla^2\varphi=0$

联立 (3 – 5) 可解得 φ及界面面电荷密度 σ_f（与静电情况不同，此时导体不是等势体）。

同时，由 (1) 式知 $\rho_f=-\epsilon\nabla^2\varphi=0$，即均匀导体区内无自由电荷（与静电情况相同）。

对电源区：表现为电极，视为求解区的边界，电极常为理想导体，电导率$\sigma_c\to\infty$，而 $\vec{\boldsymbol{j}}$ 有限，

故 $\vec{\boldsymbol{E}}=0$，电极是等势体，类似于静电问题，要给定电极的电势或电流

稳恒电场方程化为：
$$\nabla\cdot\vec{D} = -\nabla\cdot(\epsilon\nabla\varphi) = \rho_f \qquad (1)$$
$$\nabla\cdot\vec{j}_f = -\nabla\cdot(\sigma_c\nabla\varphi) = 0 \qquad (2)$$

相应的边值关系：
$$\vec{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma_f \quad\Longrightarrow\quad \epsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\epsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=-\sigma_f \qquad (3)$$
$$\vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \varphi_2=\varphi_1 \qquad (4)$$
$$\vec{n}\cdot(\vec{j}_2-\vec{j}_1)=0 \quad\Longrightarrow\quad \sigma_{c1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\sigma_{c2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \quad \text{当界面无面电流时} \qquad (5)$$

对均匀导体内部：(2) 式化为 Laplace 方程：$\nabla^2\varphi = 0$

联立 (3 – 5) 可解得 φ及界面面电荷密度 σ_f（与静电情况不同，此时导体不是等势体）。

同时，由 (1) 式知 $\rho_f = -\epsilon\nabla^2\varphi = 0$，即均匀导体区内无自由电荷（与静电情况相同）。

对电源区：表现为电极，视为求解区的边界，电极常为理想导体，电导率$\sigma_c\to\infty$，而 $\vec{j}$ 有限，

故 $\vec{E}=0$，电极是等势体，类似于静电问题，要给定电极的电势或电流

$$I=\oint\vec{n}\cdot\vec{j}\,\mathrm{d}\sigma=-\oint\sigma_c\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}\sigma,$$ σ_c，φ 为导体电导率和电势，$\vec{n}$ 由电极指向导体

稳恒电场方程化为：
$$\nabla \cdot \vec{D} = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla \varphi) = \rho_f \quad (1)$$
$$\nabla \cdot \vec{j}_f = -\nabla \cdot (\sigma_c \nabla \varphi) = 0 \quad (2)$$

相应的边值关系：
$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f \implies \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\sigma_f \quad (3)$$
$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \iff \varphi_2 = \varphi_1 \quad (4)$$
$$\vec{n} \cdot (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) = 0 \implies \sigma_{c1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma_{c2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \quad \text{当界面无面电流时} \quad (5)$$

对均匀导体内部：(2) 式化为 Laplace 方程：$\nabla^2 \varphi = 0$

联立 (3 – 5) 可解得 φ及界面面电荷密度 σ_f（与静电情况不同，此时导体不是等势体）。

同时，由 (1) 式知 $\rho_f = -\epsilon \nabla^2 \varphi = 0$，即均匀导体区内无自由电荷（与静电情况相同）。

对电源区：表现为电极，视为求解区的边界，电极常为理想导体，电导率$\sigma_c \to \infty$，而 $\vec{j}$ 有限，

故 $\vec{E} = 0$，电极是等势体，类似于静电问题，要给定电极的电势或电流

$$I = \oint \vec{n} \cdot \vec{j}\, \mathrm{d}\sigma = -\oint \sigma_c \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}\sigma,$$ σ_c，φ 为导体电导率和电势，$\vec{n}$ 由电极指向导体

对导体外：由于导体表面的电势和面电荷密度已在求解导体内部电场中求出

稳恒电场方程化为：

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}}=-\nabla\cdot(\epsilon\nabla\varphi)=\rho_f \quad (1)$$

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}_f=-\nabla\cdot(\sigma_c\nabla\varphi)=0 \quad (2)$$

相应的边值关系：

$$\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}_2-\vec{\boldsymbol{D}}_1)=\sigma_f \quad \Longrightarrow \quad \epsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\epsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=-\sigma_f \quad (3)$$

$$\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{E}}_2-\vec{\boldsymbol{E}}_1)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi_2=\varphi_1 \quad (4)$$

$$\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{j}}_2-\vec{\boldsymbol{j}}_1)=0 \quad \Longrightarrow \quad \sigma_{c1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\sigma_{c2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \quad \text{当界面无面电流时} \quad (5)$$

对均匀导体内部：(2) 式化为 Laplace 方程：$\nabla^2\varphi=0$

联立 (3 – 5) 可解得 φ及界面面电荷密度 σ_f（与静电情况不同，此时导体不是等势体）。

同时，由 (1) 式知 $\rho_f=-\epsilon\nabla^2\varphi=0$，即均匀导体区内无自由电荷（与静电情况相同）。

对电源区：表现为电极，视为求解区的边界，电极常为理想导体，电导率$\sigma_c\to\infty$，而 $\vec{\boldsymbol{j}}$ 有限，

故 $\vec{\boldsymbol{E}}=0$，电极是等势体，类似于静电问题，要给定电极的电势或电流

$$I=\oint\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\sigma=-\oint\sigma_c\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}\sigma,$$ σ_c，φ 为导体电导率和电势，$\vec{\boldsymbol{n}}$ 由电极指向导体

对导体外：由于导体表面的电势和面电荷密度已在求解导体内部电场中求出

导体作为导体外介质区的边界，导体外的电场即化为静电场边值问题解决

三、稳恒电场与静电场的类比

三、稳恒电场与静电场的类比

稳恒电场：$\vec{j}_f \neq 0$ 静电场：$\vec{j}_f = 0$

三、稳恒电场与静电场的类比

稳恒电场：$\vec{j}_f \neq 0$

$\nabla \times \vec{E} = 0$

静电场：$\vec{j}_f = 0$

$\nabla \times \vec{E} = 0$

三、稳恒电场与静电场的类比

稳恒电场：$\vec{\boldsymbol{j}}_f \neq 0$

$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = 0$

$\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi$

静电场：$\vec{\boldsymbol{j}}_f = 0$

$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = 0$

$\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi$

三、稳恒电场与静电场的类比

稳恒电场：$\vec{\boldsymbol{j}}_f \neq 0$

$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = 0$

$\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi$

$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{j}}_f = 0$

静电场：$\vec{\boldsymbol{j}}_f = 0$

$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = 0$

$\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi$

$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = 0$ (无电荷区)

三、稳恒电场与静电场的类比

稳恒电场：$\vec{\boldsymbol{j}}_f \neq 0$	静电场：$\vec{\boldsymbol{j}}_f = 0$	
$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = 0$	$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = 0$	
$\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi$	$\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi$	
$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{j}}_f = 0$	$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = 0$	(无电荷区)
$\vec{\boldsymbol{j}}_f = \sigma_c \vec{\boldsymbol{E}} = -\sigma_c \nabla\varphi$ (欧姆定律)	$\vec{\boldsymbol{D}} = \epsilon \vec{\boldsymbol{E}} = -\epsilon\nabla\varphi$	(本构关系)

三、稳恒电场与静电场的类比

稳恒电场：$\vec{j}_f \neq 0$

$\nabla \times \vec{E} = 0$

$\vec{E} = -\nabla \varphi$

$\nabla \cdot \vec{j}_f = 0$

$\vec{j}_f = \sigma_c \vec{E} = -\sigma_c \nabla \varphi$ (欧姆定律)

$\nabla^2 \varphi = 0$

静电场：$\vec{j}_f = 0$

$\nabla \times \vec{E} = 0$

$\vec{E} = -\nabla \varphi$

$\nabla \cdot \vec{D} = 0$ (无电荷区)

$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = -\epsilon \nabla \varphi$ (本构关系)

$\nabla^2 \varphi = 0$

三、稳恒电场与静电场的类比

稳恒电场：$\vec{j}_f \neq 0$

$\nabla \times \vec{E} = 0$

$\vec{E} = -\nabla\varphi$

$\nabla \cdot \vec{j}_f = 0$

$\vec{j}_f = \sigma_c \vec{E} = -\sigma_c \nabla\varphi$ (欧姆定律)

$\nabla^2\varphi = 0$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 & \text{(不同导体界面)} \\ \sigma_{c1}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \sigma_{c2}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n} & \text{(界面无面电流)} \end{cases}$$

静电场：$\vec{j}_f = 0$

$\nabla \times \vec{E} = 0$

$\vec{E} = -\nabla\varphi$

$\nabla \cdot \vec{D} = 0$ (无电荷区)

$\vec{D} = \epsilon\vec{E} = -\epsilon\nabla\varphi$ (本构关系)

$\nabla^2\varphi = 0$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 & \text{(不同介质界面)} \\ \epsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \epsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n} & \text{(界面无面电荷)} \end{cases}$$

三、稳恒电场与静电场的类比

稳恒电场：$\vec{j}_f \neq 0$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

$$\nabla \cdot \vec{j}_f = 0$$

$$\vec{j}_f = \sigma_c \vec{E} = -\sigma_c \nabla\varphi \qquad \text{(欧姆定律)}$$

$$\nabla^2\varphi = 0$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 & \text{(不同导体界面)} \\ \sigma_{c1}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \sigma_{c2}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n} & \text{(界面无面电流)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I = -\displaystyle\oint \sigma_c \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma & \text{(给定电极电流)} \\ \text{或} & \text{或} \\ \varphi = c_0 & \text{(给定电极电势)} \end{cases}$$

静电场：$\vec{j}_f = 0$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \qquad \text{(无电荷区)}$$

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} = -\epsilon\nabla\varphi \qquad \text{(本构关系)}$$

$$\nabla^2\varphi = 0$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 & \text{(不同介质界面)} \\ \epsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \epsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n} & \text{(界面无面电荷)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q = -\displaystyle\oint \epsilon \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma & \text{(给定导体电量)} \\ \text{或} & \text{或} \\ \varphi = c_0 & \text{(给定导体电势)} \end{cases}$$

三、稳恒电场与静电场的类比

稳恒电场：$\vec{j}_f \neq 0$

$\nabla \times \vec{E} = 0$

$\vec{E} = -\nabla\varphi$

$\nabla \cdot \vec{j}_f = 0$

$\vec{j}_f = \sigma_c \vec{E} = -\sigma_c \nabla\varphi$ (欧姆定律)

$\nabla^2\varphi = 0$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \\ \sigma_{c1}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \sigma_{c2}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n} \end{cases}$$

(不同导体界面)
(界面无面电流)

$$\begin{cases} I = -\oint \sigma_c \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma \\ \text{或} \\ \varphi = c_0 \end{cases}$$

(给定电极电流)
或
(给定电极电势)

静电场：$\vec{j}_f = 0$

$\nabla \times \vec{E} = 0$

$\vec{E} = -\nabla\varphi$

$\nabla \cdot \vec{D} = 0$ (无电荷区)

$\vec{D} = \epsilon\vec{E} = -\epsilon\nabla\varphi$ (本构关系)

$\nabla^2\varphi = 0$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \\ \epsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \epsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n} \end{cases}$$

(不同介质界面)
(界面无面电荷)

$$\begin{cases} Q = -\oint \epsilon \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma \\ \text{或} \\ \varphi = c_0 \end{cases}$$

(给定导体电量)
或
(给定导体电势)

对应：
$$\begin{cases} \vec{D} \leftrightarrow \vec{j} \\ \epsilon \leftrightarrow \sigma_c \\ Q \leftrightarrow I \end{cases}$$

稳恒电场问题退化为静电场问题

例 1：球形电容器内外球半径分别为 a 和 b，其间填充介电常数 ϵ，电导率 σ_c 的介质，内外球电压 V_0，求内外球间的电场强度和电容器的漏电阻。

例 1：球形电容器内外球半径分别为 a 和 b，其间填充介电常数 ϵ，电导率 σ_c 的介质，内外球电压 V_0，求内外球间的电场强度和电容器的漏电阻。

两球间满足：$\nabla^2\varphi = 0$，且球对称，故：$\varphi(r) = \sum_n (a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}}) P_n(\cos\theta) = a_0 + \frac{b_0}{r}$

(球对称，取 $n = 0$ 项)

例 1：球形电容器内外球半径分别为 a 和 b，其间填充介电常数 ϵ，电导率 σ_c 的介质，内外球电压 V_0，求内外球间的电场强度和电容器的漏电阻。

两球间满足：$\nabla^2\varphi = 0$，且球对称，故：$\varphi(r) = \sum_n (a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}}) P_n(\cos\theta) = a_0 + \frac{b_0}{r}$

(球对称，取 $n = 0$ 项)

球间电压 V_0，故：$\varphi(a) - \varphi(b) = V_0 \quad \Longrightarrow \quad b_0\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_0 \quad \Longrightarrow \quad b_0 = \frac{abV_0}{b-a}$

例 1：球形电容器内外球半径分别为 a 和 b，其间填充介电常数 ϵ，电导率 σ_c 的介质，内外球电压 V_0，求内外球间的电场强度和电容器的漏电阻。

两球间满足：$\nabla^2\varphi = 0$，且球对称，故：$\varphi(r) = \sum_n (a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}}) P_n(\cos\theta) = a_0 + \frac{b_0}{r}$

(球对称，取 $n=0$ 项)

球间电压 V_0，故：$\varphi(a) - \varphi(b) = V_0 \quad \Longrightarrow \quad b_0 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_0 \quad \Longrightarrow \quad b_0 = \frac{abV_0}{b-a}$

$$\varphi(r) = a_0 + \frac{abV_0}{(b-a)r} \quad \Longrightarrow \quad \vec{E} = -\nabla\varphi(r) = \frac{abV_0}{b-a}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

例 1：球形电容器内外球半径分别为 a 和 b，其间填充介电常数 ϵ，电导率 σ_c 的介质，内外球电压 V_0，求内外球间的电场强度和电容器的漏电阻。

两球间满足：$\nabla^2\varphi = 0$，且球对称，故：$\varphi(r) = \sum_n (a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}}) P_n(\cos\theta) = a_0 + \frac{b_0}{r}$

(球对称，取 $n = 0$ 项)

球间电压 V_0，故：$\varphi(a) - \varphi(b) = V_0 \quad \Longrightarrow \quad b_0 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_0 \quad \Longrightarrow \quad b_0 = \frac{abV_0}{b-a}$

$$\varphi(r) = a_0 + \frac{abV_0}{(b-a)r} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi(r) = \frac{abV_0}{b-a}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}$$

电流密度：$\vec{\boldsymbol{j}} = \sigma_c \vec{\boldsymbol{E}}$， 电流强度：$I = \oint \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{j}}\, \mathrm{d}\sigma = \frac{\sigma_c abV_0}{b-a} \oint \hat{\boldsymbol{e}}_r \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3} r^2 \mathrm{d}\Omega = \frac{4\pi abV_0\sigma_c}{b-a}$

例 1：球形电容器内外球半径分别为 a 和 b，其间填充介电常数 ϵ，电导率 σ_c 的介质，内外球电压 V_0，求内外球间的电场强度和电容器的漏电阻。

两球间满足：$\nabla^2\varphi = 0$，且球对称，故：$\varphi(r) = \sum_n (a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}}) P_n(\cos\theta) = a_0 + \frac{b_0}{r}$

(球对称，取 $n = 0$ 项)

球间电压 V_0，故：$\varphi(a) - \varphi(b) = V_0 \quad \Longrightarrow \quad b_0 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_0 \quad \Longrightarrow \quad b_0 = \frac{abV_0}{b-a}$

$$\varphi(r) = a_0 + \frac{abV_0}{(b-a)r} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi(r) = \frac{abV_0}{b-a}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}$$

电流密度：$\vec{\boldsymbol{j}} = \sigma_c \vec{\boldsymbol{E}}$， 电流强度：$I = \oint \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{j}}\, \mathrm{d}\sigma = \frac{\sigma_c abV_0}{b-a} \oint \hat{\boldsymbol{e}}_r \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3} r^2 \mathrm{d}\Omega = \frac{4\pi abV_0\sigma_c}{b-a}$

漏电阻：$R = \frac{V_0}{I} = \frac{(b-a)}{4\pi ab\sigma_c}$

例 1：球形电容器内外球半径分别为 a 和 b，其间填充介电常数 ϵ，电导率 σ_c 的介质，内外球电压 V_0，求内外球间的电场强度和电容器的漏电阻。

两球间满足：$\nabla^2\varphi = 0$，且球对称，故：$\varphi(r) = \sum_n (a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}})P_n(\cos\theta) = a_0 + \frac{b_0}{r}$

(球对称，取 $n = 0$ 项)

球间电压 V_0，故：$\varphi(a) - \varphi(b) = V_0 \quad \Longrightarrow \quad b_0\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_0 \quad \Longrightarrow \quad b_0 = \frac{abV_0}{b-a}$

$$\varphi(r) = a_0 + \frac{abV_0}{(b-a)r} \quad \Longrightarrow \quad \vec{E} = -\nabla\varphi(r) = \frac{abV_0}{b-a}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

电流密度：$\vec{j} = \sigma_c\vec{E}$，　电流强度：$I = \oint \vec{n}\cdot\vec{j}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{\sigma_c abV_0}{b-a}\oint \hat{e}_r\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}r^2\mathrm{d}\Omega = \frac{4\pi abV_0\sigma_c}{b-a}$

漏电阻：$R = \frac{V_0}{I} = \frac{(b-a)}{4\pi ab\sigma_c}$

例 2：一大电解槽中充满电导率为 σ_{c2} 的液体，期间流有均匀电流 $\vec{j}_0$，现在电解槽中放置一半径为 a 电导率为 σ_{c1} 的小球，求稳恒时的电流分布和电荷分布。

例 1：球形电容器内外球半径分别为 a 和 b，其间填充介电常数 ϵ，电导率 σ_c 的介质，内外球电压 V_0，求内外球间的电场强度和电容器的漏电阻。

两球间满足：$\nabla^2\varphi = 0$，且球对称，故：$\varphi(r) = \sum_n (a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}}) P_n(\cos\theta) = a_0 + \frac{b_0}{r}$

(球对称，取 $n = 0$ 项)

球间电压 V_0，故：$\varphi(a) - \varphi(b) = V_0 \quad \Longrightarrow \quad b_0\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_0 \quad \Longrightarrow \quad b_0 = \frac{abV_0}{b-a}$

$$\varphi(r) = a_0 + \frac{abV_0}{(b-a)r} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi(r) = \frac{abV_0}{b-a}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}$$

电流密度：$\vec{\boldsymbol{j}} = \sigma_c \vec{\boldsymbol{E}}$，电流强度：$I = \oint \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{\sigma_c abV_0}{b-a}\oint \hat{\boldsymbol{e}}_r \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3} r^2 \mathrm{d}\Omega = \frac{4\pi abV_0\sigma_c}{b-a}$

漏电阻：$R = \frac{V_0}{I} = \frac{(b-a)}{4\pi ab\sigma_c}$

例 2：一大电解槽中充满电导率为 σ_{c2} 的液体，期间流有均匀电流 $\vec{j}_0$，现在电解槽中放置一半径为 a 电导率为 σ_{c1} 的小球，求稳恒时的电流分布和电荷分布。

此问题类似于在均匀静电场中放置一介质球问题

例 1：球形电容器内外球半径分别为 a 和 b，其间填充介电常数 ϵ，电导率 σ_c 的介质，内外球电压 V_0，求内外球间的电场强度和电容器的漏电阻。

两球间满足：$\nabla^2\varphi = 0$，且球对称，故：$\varphi(r) = \sum_n (a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}}) P_n(\cos\theta) = a_0 + \frac{b_0}{r}$

(球对称，取 $n = 0$ 项)

球间电压 V_0，故：$\varphi(a) - \varphi(b) = V_0 \quad \Longrightarrow \quad b_0\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_0 \quad \Longrightarrow \quad b_0 = \frac{abV_0}{b-a}$

$$\varphi(r) = a_0 + \frac{abV_0}{(b-a)r} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi(r) = \frac{abV_0}{b-a}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}$$

电流密度：$\vec{\boldsymbol{j}} = \sigma_c \vec{\boldsymbol{E}}$，　电流强度：$I = \oint \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{j}}\, \mathrm{d}\sigma = \frac{\sigma_c abV_0}{b-a} \oint \hat{\boldsymbol{e}}_r \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3} r^2 \mathrm{d}\Omega = \frac{4\pi abV_0\sigma_c}{b-a}$

漏电阻：$R = \frac{V_0}{I} = \frac{(b-a)}{4\pi ab\sigma_c}$

例 2：一大电解槽中充满电导率为 σ_{c2} 的液体，期间流有均匀电流 $\vec{j}_0$，现在电解槽中放置一半径为 a 电导率为 σ_{c1} 的小球，求稳恒时的电流分布和电荷分布。

此问题类似于在均匀静电场中放置一介质球问题

设球内外电势分别为 φ_1，φ_2

$$\varphi_1 = \sum_n a_n r^n P_n(\cos\theta), \qquad \varphi_2 = \sum_n b_n r^{-1-n} P_n(\cos\theta) - \frac{j_0}{\sigma_c} r\cos\theta,$$

$$\varphi_1 = \sum_n a_n r^n P_n(\cos\theta), \qquad \varphi_2 = \sum_n b_n r^{-1-n} P_n(\cos\theta) - \frac{j_0}{\sigma_c} r\cos\theta,$$

在界面 $r = a$：$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \sigma_{c1}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \sigma_{c2}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}, \qquad$ 此时 $\dfrac{\partial}{\partial n} = \dfrac{\partial}{\partial r}$

$$\varphi_1 = \sum_n a_n r^n P_n(\cos\theta), \qquad \varphi_2 = \sum_n b_n r^{-1-n} P_n(\cos\theta) - \frac{j_0}{\sigma_c} r\cos\theta,$$

在界面 $r = a$：$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \sigma_{c1}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \sigma_{c2}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}, \qquad$ 此时 $\dfrac{\partial}{\partial n} = \dfrac{\partial}{\partial r}$

类似于均匀电场中的介质球问题，可解得：

$$\varphi_1 = \sum_n a_n r^n P_n(\cos\theta), \qquad \varphi_2 = \sum_n b_n r^{-1-n} P_n(\cos\theta) - \frac{j_0}{\sigma_c} r\cos\theta,$$

在界面 $r = a$：$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \sigma_{c1}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \sigma_{c2}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n},$ 此时 $\dfrac{\partial}{\partial n} = \dfrac{\partial}{\partial r}$

类似于均匀电场中的介质球问题，可解得：

$$\varphi_1 = -\frac{3j_0}{\sigma_{c1} + 2\sigma_{c2}} r\cos\theta,$$

$$\varphi_1 = \sum_n a_n r^n P_n(\cos\theta), \qquad \varphi_2 = \sum_n b_n r^{-1-n} P_n(\cos\theta) - \frac{j_0}{\sigma_c} r\cos\theta,$$

在界面 $r = a$：$\varphi_1 = \varphi_2$，$\quad \sigma_{c1}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \sigma_{c2}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}$， 此时 $\dfrac{\partial}{\partial n} = \dfrac{\partial}{\partial r}$

类似于均匀电场中的介质球问题，可解得：

$$\varphi_1 = -\frac{3j_0}{\sigma_{c1} + 2\sigma_{c2}} r\cos\theta, \qquad \varphi_2 = -\frac{j_0}{\sigma_{c2}} r\cos\theta + \frac{(\sigma_{c1} - \sigma_{c2})j_0}{\sigma_{c2}(\sigma_{c1} + 2\sigma_{c2})} \frac{a^3}{r^2} \cos\theta$$

$$\varphi_1 = \sum_n a_n r^n P_n(\cos\theta), \qquad \varphi_2 = \sum_n b_n r^{-1-n} P_n(\cos\theta) - \frac{j_0}{\sigma_c} r\cos\theta,$$

在界面 $r=a$： $\varphi_1 = \varphi_2, \quad \sigma_{c1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \sigma_{c2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n},$ 此时 $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$

类似于均匀电场中的介质球问题，可解得：

$$\varphi_1 = -\frac{3j_0}{\sigma_{c1}+2\sigma_{c2}} r\cos\theta, \qquad \varphi_2 = -\frac{j_0}{\sigma_{c2}} r\cos\theta + \frac{(\sigma_{c1}-\sigma_{c2})j_0}{\sigma_{c2}(\sigma_{c1}+2\sigma_{c2})}\frac{a^3}{r^2}\cos\theta$$

电流分布：$\vec{\boldsymbol{j}}_1 = -\sigma_{c1}\nabla\varphi_1(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{3\sigma_{c1}}{\sigma_{c1}+2\sigma_{c2}}\vec{\boldsymbol{j}}_0$

$$\varphi_1 = \sum_n a_n r^n P_n(\cos\theta), \qquad \varphi_2 = \sum_n b_n r^{-1-n} P_n(\cos\theta) - \frac{j_0}{\sigma_c} r\cos\theta,$$

在界面 $r = a$：$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \sigma_{c1}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \sigma_{c2}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}, \qquad$ 此时 $\dfrac{\partial}{\partial n} = \dfrac{\partial}{\partial r}$

类似于均匀电场中的介质球问题，可解得：

$$\varphi_1 = -\frac{3j_0}{\sigma_{c1}+2\sigma_{c2}} r\cos\theta, \qquad \varphi_2 = -\frac{j_0}{\sigma_{c2}} r\cos\theta + \frac{(\sigma_{c1}-\sigma_{c2})j_0}{\sigma_{c2}(\sigma_{c1}+2\sigma_{c2})}\frac{a^3}{r^2}\cos\theta$$

电流分布：$\vec{\boldsymbol{j}}_1 = -\sigma_{c1}\nabla\varphi_1(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{3\sigma_{c1}}{\sigma_{c1}+2\sigma_{c2}}\vec{\boldsymbol{j}}_0$

$$\vec{\boldsymbol{j}}_2 = -\sigma_{c2}\nabla\varphi_2(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{j}}_0 + \frac{(\sigma_{c1}-\sigma_{c2})a^3}{\sigma_{c1}+2\sigma_{c2}}\left[\frac{3(\vec{\boldsymbol{j}}_0\cdot\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{r}}}{r^5} - \frac{\vec{\boldsymbol{j}}_0}{r^3}\right]$$

$$\varphi_1=\sum_n a_n r^n P_n(\cos\theta),\qquad \varphi_2=\sum_n b_n r^{-1-n}P_n(\cos\theta)-\frac{j_0}{\sigma_c}r\cos\theta,$$

在界面 $r=a$：$\varphi_1=\varphi_2,\quad \sigma_{c1}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\sigma_{c2}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n},\qquad$ 此时 $\dfrac{\partial}{\partial n}=\dfrac{\partial}{\partial r}$

类似于均匀电场中的介质球问题，可解得：

$$\varphi_1=-\frac{3j_0}{\sigma_{c1}+2\sigma_{c2}}r\cos\theta,\qquad \varphi_2=-\frac{j_0}{\sigma_{c2}}r\cos\theta+\frac{(\sigma_{c1}-\sigma_{c2})j_0}{\sigma_{c2}(\sigma_{c1}+2\sigma_{c2})}\frac{a^3}{r^2}\cos\theta$$

电流分布：$\vec{\boldsymbol{j}}_1=-\sigma_{c1}\nabla\varphi_1(\vec{\boldsymbol{r}})=\dfrac{3\sigma_{c1}}{\sigma_{c1}+2\sigma_{c2}}\vec{\boldsymbol{j}}_0$

$$\vec{\boldsymbol{j}}_2=-\sigma_{c2}\nabla\varphi_2(\vec{\boldsymbol{r}})=\vec{\boldsymbol{j}}_0+\frac{(\sigma_{c1}-\sigma_{c2})a^3}{\sigma_{c1}+2\sigma_{c2}}\left[\frac{3(\vec{\boldsymbol{j}}_0\cdot\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{r}}}{r^5}-\frac{\vec{\boldsymbol{j}}_0}{r^3}\right]$$

导体球面电荷分布：$\sigma_f=-\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}_2-\vec{\boldsymbol{D}}_1)=\left[\epsilon_0\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial r}-\epsilon_0\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right]_{r=a}$

$$\varphi_1 = \sum_n a_n r^n P_n(\cos\theta), \qquad \varphi_2 = \sum_n b_n r^{-1-n} P_n(\cos\theta) - \frac{j_0}{\sigma_c} r\cos\theta,$$

在界面 $r=a$：$\varphi_1 = \varphi_2$，$\quad \sigma_{c1}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \sigma_{c2}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}$，$\qquad$ 此时 $\dfrac{\partial}{\partial n} = \dfrac{\partial}{\partial r}$

类似于均匀电场中的介质球问题，可解得：

$$\varphi_1 = -\frac{3j_0}{\sigma_{c1}+2\sigma_{c2}} r\cos\theta, \qquad \varphi_2 = -\frac{j_0}{\sigma_{c2}} r\cos\theta + \frac{(\sigma_{c1}-\sigma_{c2})j_0}{\sigma_{c2}(\sigma_{c1}+2\sigma_{c2})}\frac{a^3}{r^2}\cos\theta$$

电流分布：$\vec{\boldsymbol{j}}_1 = -\sigma_{c1}\nabla\varphi_1(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{3\sigma_{c1}}{\sigma_{c1}+2\sigma_{c2}}\vec{\boldsymbol{j}}_0$

$$\vec{\boldsymbol{j}}_2 = -\sigma_{c2}\nabla\varphi_2(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{j}}_0 + \frac{(\sigma_{c1}-\sigma_{c2})a^3}{\sigma_{c1}+2\sigma_{c2}}\left[\frac{3(\vec{\boldsymbol{j}}_0\cdot\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{r}}}{r^5} - \frac{\vec{\boldsymbol{j}}_0}{r^3}\right]$$

导体球面电荷分布：$\sigma_f = -\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}_2 - \vec{\boldsymbol{D}}_1) = \left[\epsilon_0\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial r} - \epsilon_0\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right]_{r=a}$

$$= \frac{3(\sigma_{c1}-\sigma_{c2})}{\sigma_{c1}+2\sigma_{c2}} j_0\cos\theta$$

$$\varphi_1=\sum_n a_n r^n P_n(\cos\theta),\qquad \varphi_2=\sum_n b_n r^{-1-n}P_n(\cos\theta)-\frac{j_0}{\sigma_c}r\cos\theta,$$

在界面 $r=a$：$\varphi_1=\varphi_2,\quad \sigma_{c1}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\sigma_{c2}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n},\qquad$ 此时 $\dfrac{\partial}{\partial n}=\dfrac{\partial}{\partial r}$

类似于均匀电场中的介质球问题，可解得：

$$\varphi_1=-\frac{3j_0}{\sigma_{c1}+2\sigma_{c2}}r\cos\theta,\qquad \varphi_2=-\frac{j_0}{\sigma_{c2}}r\cos\theta+\frac{(\sigma_{c1}-\sigma_{c2})j_0}{\sigma_{c2}(\sigma_{c1}+2\sigma_{c2})}\frac{a^3}{r^2}\cos\theta$$

电流分布：$\vec{\boldsymbol{j}}_1=-\sigma_{c1}\nabla\varphi_1(\vec{\boldsymbol{r}})=\dfrac{3\sigma_{c1}}{\sigma_{c1}+2\sigma_{c2}}\vec{\boldsymbol{j}}_0$

$$\vec{\boldsymbol{j}}_2=-\sigma_{c2}\nabla\varphi_2(\vec{\boldsymbol{r}})=\vec{\boldsymbol{j}}_0+\frac{(\sigma_{c1}-\sigma_{c2})a^3}{\sigma_{c1}+2\sigma_{c2}}\left[\frac{3(\vec{\boldsymbol{j}}_0\cdot\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{r}}}{r^5}-\frac{\vec{\boldsymbol{j}}_0}{r^3}\right]$$

导体球面电荷分布：$\sigma_f=-\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}_2-\vec{\boldsymbol{D}}_1)=\left[\epsilon_0\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial r}-\epsilon_0\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right]_{r=a}$

$$=\frac{3(\sigma_{c1}-\sigma_{c2})}{\sigma_{c1}+2\sigma_{c2}}j_0\cos\theta$$

当 $\sigma_{c1}\gg\sigma_{c2}$ 时：$\vec{\boldsymbol{j}}_1=3\vec{\boldsymbol{j}}_0,\qquad \vec{\boldsymbol{j}}_2=\vec{\boldsymbol{j}}_0+a^3\left[\dfrac{3(\vec{\boldsymbol{j}}_0\cdot\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{r}}}{r^5}-\dfrac{\vec{\boldsymbol{j}}_0}{r^3}\right]\xrightarrow{r\to\infty}\vec{\boldsymbol{j}}_0$

$$\varphi_1 = \sum_n a_n r^n P_n(\cos\theta), \qquad \varphi_2 = \sum_n b_n r^{-1-n} P_n(\cos\theta) - \frac{j_0}{\sigma_c} r\cos\theta,$$

在界面 $r = a$：$\varphi_1 = \varphi_2$，$\sigma_{c1}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \sigma_{c2}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}$，　此时 $\dfrac{\partial}{\partial n} = \dfrac{\partial}{\partial r}$

类似于均匀电场中的介质球问题，可解得：

$$\varphi_1 = -\frac{3j_0}{\sigma_{c1}+2\sigma_{c2}} r\cos\theta, \qquad \varphi_2 = -\frac{j_0}{\sigma_{c2}} r\cos\theta + \frac{(\sigma_{c1}-\sigma_{c2})j_0}{\sigma_{c2}(\sigma_{c1}+2\sigma_{c2})}\frac{a^3}{r^2}\cos\theta$$

电流分布：$\vec{\boldsymbol{j}}_1 = -\sigma_{c1}\nabla\varphi_1(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{3\sigma_{c1}}{\sigma_{c1}+2\sigma_{c2}}\vec{\boldsymbol{j}}_0$

$$\vec{\boldsymbol{j}}_2 = -\sigma_{c2}\nabla\varphi_2(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{j}}_0 + \frac{(\sigma_{c1}-\sigma_{c2})a^3}{\sigma_{c1}+2\sigma_{c2}}\left[\frac{3(\vec{\boldsymbol{j}}_0\cdot\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{r}}}{r^5} - \frac{\vec{\boldsymbol{j}}_0}{r^3}\right]$$

导体球面电荷分布：$\sigma_f = -\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}_2 - \vec{\boldsymbol{D}}_1) = \left[\epsilon_0\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial r} - \epsilon_0\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right]_{r=a}$

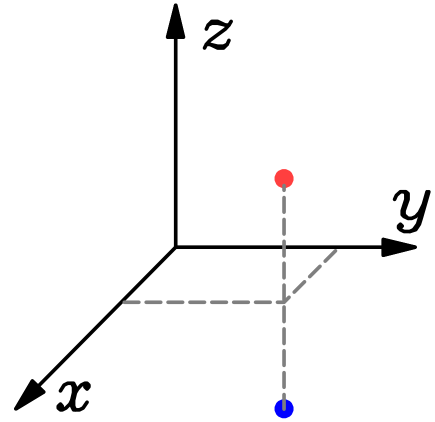
$$= \frac{3(\sigma_{c1}-\sigma_{c2})}{\sigma_{c1}+2\sigma_{c2}} j_0\cos\theta$$

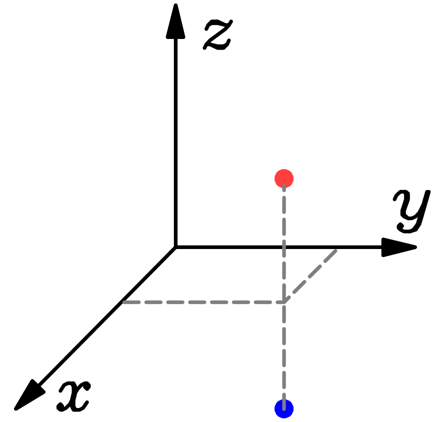
当 $\sigma_{c1} \gg \sigma_{c2}$ 时：$\vec{\boldsymbol{j}}_1 = 3\vec{\boldsymbol{j}}_0$，　$\vec{\boldsymbol{j}}_2 = \vec{\boldsymbol{j}}_0 + a^3\left[\dfrac{3(\vec{\boldsymbol{j}}_0\cdot\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{r}}}{r^5} - \dfrac{\vec{\boldsymbol{j}}_0}{r^3}\right] \xrightarrow{r\to\infty} \vec{\boldsymbol{j}}_0$

当 $\sigma_{c1} \ll \sigma_{c2}$ 时：$\vec{\boldsymbol{j}}_1 \to 0$，　$\vec{\boldsymbol{j}}_2 = \vec{\boldsymbol{j}}_0 - \dfrac{a^3}{2}\left[\dfrac{3(\vec{\boldsymbol{j}}_0\cdot\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{r}}}{r^5} - \dfrac{\vec{\boldsymbol{j}}_0}{r^3}\right] \xrightarrow{r\to\infty} \vec{\boldsymbol{j}}_0$

例3：有两平面围成直角电容器，其内充满电导率为 σ_c 的液体，取该两平面为 xoz 和 yoz 面。现在在 (x_0, y_0, z_0) $(x_0, y_0, -z_0)$ 两点分别放置正负电极并通有电流 I，求导电液体中的电势。

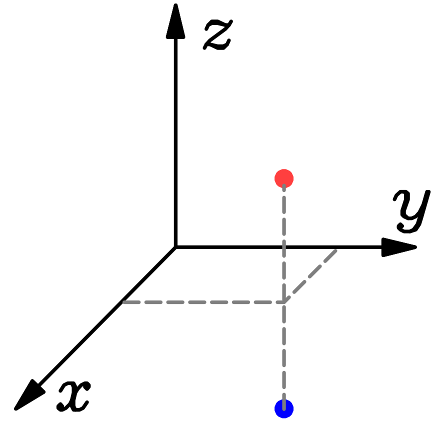
例 3：有两平面围成直角电容器，其内充满电导率为 σ_c 的液体，取该两平面为 xoz 和 yoz 面。现在在 (x_0, y_0, z_0) $(x_0, y_0, -z_0)$ 两点分别放置正负电极并通有电流 I，求导电液体中的电势。





例3：有两平面围成直角电容器，其内充满电导率为 σ_c 的液体，取该两平面为 xoz 和 yoz 面。现在在 (x_0, y_0, z_0) $(x_0, y_0, -z_0)$ 两点分别放置正负电极并通有电流 I，求导电液体中的电势。

稳恒电场问题，且除了 $(x_0, y_0, \pm z_0)$ 两个点电极之外电势满足：$\nabla^2\varphi = 0$



例3：有两平面围成直角电容器，其内充满电导率为 σ_c 的液体，取该两平面为 xoz 和 yoz 面。现在在 (x_0, y_0, z_0) $(x_0, y_0, -z_0)$ 两点分别放置正负电极并通有电流 I，求导电液体中的电势。

稳恒电场问题，且除了 $(x_0, y_0, \pm z_0)$ 两个点电极之外电势满足：$\nabla^2\varphi = 0$

电极电流：

$$I = \oint_{S_1} \sigma_c \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma \Longrightarrow \oint_{S_1} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma = \frac{(\epsilon_0 I/\sigma_c)}{\epsilon_0}$$

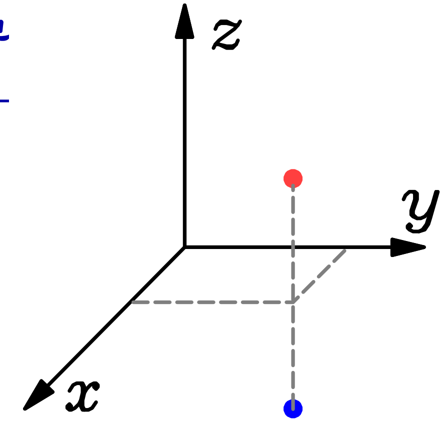
$$-I = \oint_{S_2} \sigma_c \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma \Longrightarrow \oint_{S_2} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma = -\frac{(\epsilon_0 I/\sigma_c)}{\epsilon_0}$$

$\overset{\text{类比}}{\Longleftrightarrow}$

$$\oint_{S_1} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{S_2} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma = \frac{Q_2}{\epsilon_0}$$

例 3：有两平面围成直角电容器，其内充满电导率为 σ_c 的液体，取该两平面为 xoz 和 yoz 面。现在在 (x_0, y_0, z_0) $(x_0, y_0, -z_0)$ 两点分别放置正负电极并通有电流 I，求导电液体中的电势。

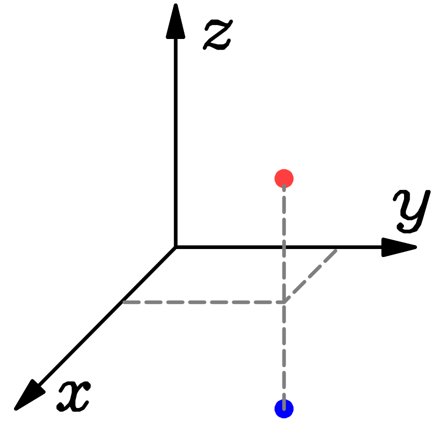


稳恒电场问题，且除了 $(x_0, y_0, \pm z_0)$ 两个点电极之外电势满足：$\nabla^2\varphi = 0$

电极电流：

$$\begin{aligned} I &= \oint_{S_1} \sigma_c \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma \Longrightarrow \oint_{S_1} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma = \frac{(\epsilon_0 I/\sigma_c)}{\epsilon_0} \\ -I &= \oint_{S_2} \sigma_c \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma \Longrightarrow \oint_{S_2} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma = -\frac{(\epsilon_0 I/\sigma_c)}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad \overset{\text{类比}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{aligned} \oint_{S_1} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma &= \frac{Q_1}{\epsilon_0} \\ \oint_{S_2} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma &= \frac{Q_2}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

S_1，S_2 分别是包围点电极 (x_0, y_0, z_0)，$(x_0, y_0, -z_0)$ 的任意的小闭合曲面



例 3：有两平面围成直角电容器，其内充满电导率为 σ_c 的液体，取该两平面为 xoz 和 yoz 面。现在在 (x_0, y_0, z_0) $(x_0, y_0, -z_0)$ 两点分别放置正负电极并通有电流 I，求导电液体中的电势。

稳恒电场问题，且除了 $(x_0, y_0, \pm z_0)$ 两个点电极之外电势满足：$\nabla^2\varphi = 0$

电极电流：

$$I = \oint_{S_1} \sigma_c \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma \implies \oint_{S_1} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma = \frac{(\epsilon_0 I/\sigma_c)}{\epsilon_0}$$

$$-I = \oint_{S_2} \sigma_c \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma \implies \oint_{S_2} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma = -\frac{(\epsilon_0 I/\sigma_c)}{\epsilon_0}$$

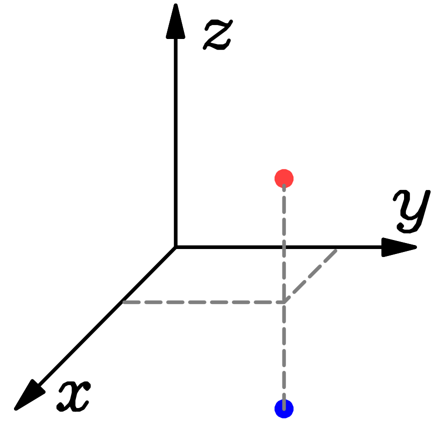
$\overset{\text{类比}}{\Longleftrightarrow}$

$$\oint_{S_1} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{S_2} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma = \frac{Q_2}{\epsilon_0}$$

S_1，S_2 分别是包围点电极 (x_0, y_0, z_0)，$(x_0, y_0, -z_0)$ 的任意的小闭合曲面

问题类似于在 $(x_0, y_0, +z_0)$ 处放点电荷 $Q_1 = Q$



例 3：有两平面围成直角电容器，其内充满电导率为 σ_c 的液体，取该两平面为 xoz 和 yoz 面。现在在 (x_0, y_0, z_0) $(x_0, y_0, -z_0)$ 两点分别放置正负电极并通有电流 I，求导电液体中的电势。

稳恒电场问题，且除了 $(x_0, y_0, \pm z_0)$ 两个点电极之外电势满足：$\nabla^2\varphi = 0$

电极电流：

$$I = \oint_{S_1} \sigma_c \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma \Longrightarrow \oint_{S_1} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma = \frac{(\epsilon_0 I/\sigma_c)}{\epsilon_0}$$

$$-I = \oint_{S_2} \sigma_c \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma \Longrightarrow \oint_{S_2} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma = -\frac{(\epsilon_0 I/\sigma_c)}{\epsilon_0}$$

$$\overset{\text{类比}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\oint_{S_1} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$

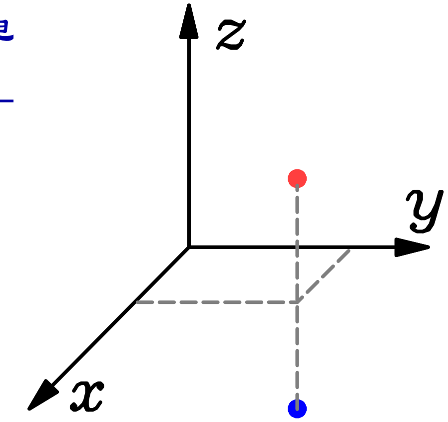
$$\oint_{S_2} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma = \frac{Q_2}{\epsilon_0}$$

S_1，S_2 分别是包围点电极 (x_0, y_0, z_0)，$(x_0, y_0, -z_0)$ 的任意的小闭合曲面

问题类似于在 $(x_0, y_0, +z_0)$ 处放点电荷 $Q_1 = Q$

在 $(x_0, y_0, -z_0)$ 处放点电荷 $Q_2 = -Q$ 的静电问题，其中 $Q = \epsilon_0 I/\sigma_c$

例 3：有两平面围成直角电容器，其内充满电导率为 σ_c 的液体，取该两平面为 xoz 和 yoz 面。现在在 (x_0, y_0, z_0) $(x_0, y_0, -z_0)$ 两点分别放置正负电极并通有电流 I，求导电液体中的电势。



稳恒电场问题，且除了 $(x_0, y_0, \pm z_0)$ 两个点电极之外电势满足：$\nabla^2\varphi = 0$

电极电流：

$$\begin{aligned} I &= \oint_{S_1} \sigma_c \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma \Longrightarrow \oint_{S_1} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma = \frac{(\epsilon_0 I/\sigma_c)}{\epsilon_0} \\ -I &= \oint_{S_2} \sigma_c \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma \Longrightarrow \oint_{S_2} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma = -\frac{(\epsilon_0 I/\sigma_c)}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad \overset{\text{类比}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{aligned} \oint_{S_1} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma &= \frac{Q_1}{\epsilon_0} \\ \oint_{S_2} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma &= \frac{Q_2}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

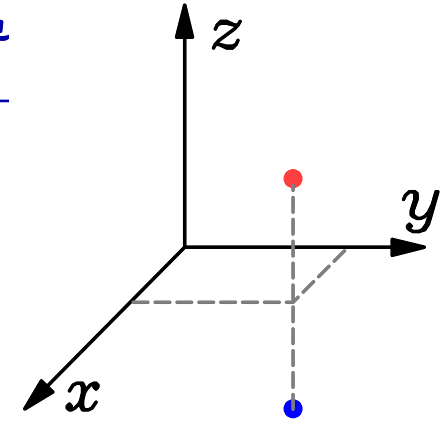
S_1，S_2 分别是包围点电极 (x_0, y_0, z_0)，$(x_0, y_0, -z_0)$ 的任意的小闭合曲面

问题类似于在 $(x_0, y_0, +z_0)$ 处放点电荷 $Q_1 = Q$

在 $(x_0, y_0, -z_0)$ 处放点电荷 $Q_2 = -Q$ 的静电问题，其中 $Q = \epsilon_0 I/\sigma_c$

边界条件：

例3：有两平面围成直角电容器，其内充满电导率为 σ_c 的液体，取该两平面为 xoz 和 yoz 面。现在在 (x_0, y_0, z_0) $(x_0, y_0, -z_0)$ 两点分别放置正负电极并通有电流 I，求导电液体中的电势。



稳恒电场问题，且除了 $(x_0, y_0, \pm z_0)$ 两个点电极之外电势满足：$\nabla^2\varphi = 0$

电极电流：

$$I = \oint_{S_1} \sigma_c \vec{n}\cdot\vec{E}\mathrm{d}\sigma \Longrightarrow \oint_{S_1} \vec{n}\cdot\vec{E}\mathrm{d}\sigma = \frac{(\epsilon_0 I/\sigma_c)}{\epsilon_0}$$

$$-I = \oint_{S_2} \sigma_c \vec{n}\cdot\vec{E}\mathrm{d}\sigma \Longrightarrow \oint_{S_2} \vec{n}\cdot\vec{E}\mathrm{d}\sigma = -\frac{(\epsilon_0 I/\sigma_c)}{\epsilon_0}$$

$\overset{\text{类比}}{\Longleftrightarrow}$

$$\oint_{S_1} \vec{n}\cdot\vec{E}\mathrm{d}\sigma = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$

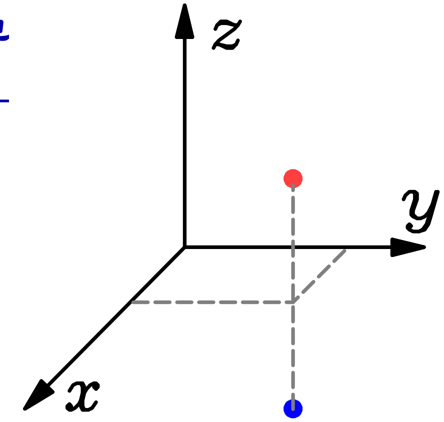
$$\oint_{S_2} \vec{n}\cdot\vec{E}\mathrm{d}\sigma = \frac{Q_2}{\epsilon_0}$$

S_1，S_2 分别是包围点电极 (x_0, y_0, z_0)，$(x_0, y_0, -z_0)$ 的任意的小闭合曲面

问题类似于在 $(x_0, y_0, +z_0)$ 处放点电荷 $Q_1 = Q$

在 $(x_0, y_0, -z_0)$ 处放点电荷 $Q_2 = -Q$ 的静电问题，其中 $Q = \epsilon_0 I/\sigma_c$

边界条件：导体仅存在于 $x > 0$ 和 $y > 0$ 区，



例 3：有两平面围成直角电容器，其内充满电导率为 σ_c 的液体，取该两平面为 xoz 和 yoz 面。现在在 (x_0, y_0, z_0) $(x_0, y_0, -z_0)$ 两点分别放置正负电极并通有电流 I，求导电液体中的电势。

稳恒电场问题，且除了 $(x_0, y_0, \pm z_0)$ 两个点电极之外电势满足：$\nabla^2\varphi = 0$

电极电流：

$$I = \oint_{S_1} \sigma_c \vec{n}\cdot\vec{E}\mathrm{d}\sigma \Longrightarrow \oint_{S_1} \vec{n}\cdot\vec{E}\mathrm{d}\sigma = \frac{(\epsilon_0 I/\sigma_c)}{\epsilon_0}$$

$$-I = \oint_{S_2} \sigma_c \vec{n}\cdot\vec{E}\mathrm{d}\sigma \Longrightarrow \oint_{S_2} \vec{n}\cdot\vec{E}\mathrm{d}\sigma = -\frac{(\epsilon_0 I/\sigma_c)}{\epsilon_0}$$

$\overset{\text{类比}}{\Longleftrightarrow}$

$$\oint_{S_1} \vec{n}\cdot\vec{E}\mathrm{d}\sigma = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{S_2} \vec{n}\cdot\vec{E}\mathrm{d}\sigma = \frac{Q_2}{\epsilon_0}$$

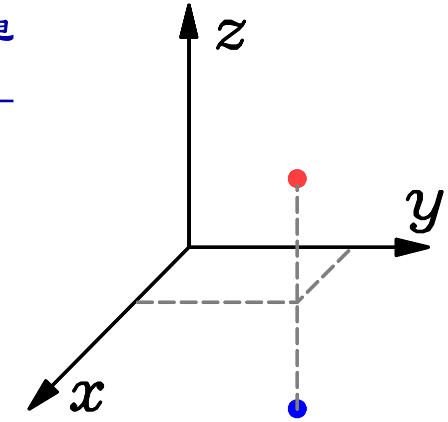
S_1，S_2 分别是包围点电极 (x_0, y_0, z_0)，$(x_0, y_0, -z_0)$ 的任意的小闭合曲面

问题类似于在 $(x_0, y_0, +z_0)$ 处放点电荷 $Q_1 = Q$

在 $(x_0, y_0, -z_0)$ 处放点电荷 $Q_2 = -Q$ 的静电问题，其中 $Q = \epsilon_0 I/\sigma_c$

边界条件：导体仅存在于 $x > 0$ 和 $y > 0$ 区，

在 $x = 0$ 面，$\vec{n}\cdot(\vec{j}_2 - \vec{j}_1) = 0$，在 $x < 0$ 区无电流，$\vec{j}_1 = 0$，故有 $\vec{n}\cdot\vec{j}_2 = 0$



例 3：有两平面围成直角电容器，其内充满电导率为 σ_c 的液体，取该两平面为 xoz 和 yoz 面。现在在 (x_0, y_0, z_0) $(x_0, y_0, -z_0)$ 两点分别放置正负电极并通有电流 I，求导电液体中的电势。

稳恒电场问题，且除了 $(x_0, y_0, \pm z_0)$ 两个点电极之外电势满足：$\nabla^2\varphi = 0$

电极电流：

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_{S_1} \sigma_c \vec{n} \cdot \vec{E} d\sigma \implies \oint_{S_1} \vec{n} \cdot \vec{E} d\sigma = \frac{(\epsilon_0 I/\sigma_c)}{\epsilon_0} \\
-I &= \oint_{S_2} \sigma_c \vec{n} \cdot \vec{E} d\sigma \implies \oint_{S_2} \vec{n} \cdot \vec{E} d\sigma = -\frac{(\epsilon_0 I/\sigma_c)}{\epsilon_0}
\end{aligned}
\quad \overset{\text{类比}}{\Longleftrightarrow} \quad
\begin{aligned}
\oint_{S_1} \vec{n} \cdot \vec{E} d\sigma &= \frac{Q_1}{\epsilon_0} \\
\oint_{S_2} \vec{n} \cdot \vec{E} d\sigma &= \frac{Q_2}{\epsilon_0}
\end{aligned}
$$

S_1，S_2 分别是包围点电极 (x_0, y_0, z_0)，$(x_0, y_0, -z_0)$ 的任意的小闭合曲面

问题类似于在 $(x_0, y_0, +z_0)$ 处放点电荷 $Q_1 = Q$

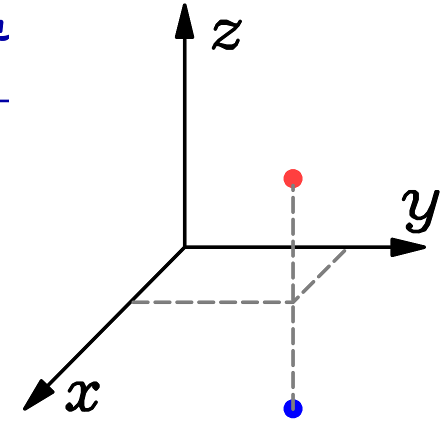
在 $(x_0, y_0, -z_0)$ 处放点电荷 $Q_2 = -Q$ 的静电问题，其中 $Q = \epsilon_0 I/\sigma_c$

边界条件：导体仅存在于 $x > 0$ 和 $y > 0$ 区，

在 $x = 0$ 面，$\vec{n} \cdot (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) = 0$，在 $x < 0$ 区无电流，$\vec{j}_1 = 0$，故有 $\vec{n} \cdot \vec{j}_2 = 0$

即：$\vec{n} \cdot \sigma_c \vec{E} = 0, \quad \implies \quad E_x = 0 \quad \text{at } x = 0^+$ 同理：$E_y = 0 \quad \text{at } y = 0^+$

例3：有两平面围成直角电容器，其内充满电导率为 σ_c 的液体，取该两平面为 xoz 和 yoz 面。现在在 (x_0, y_0, z_0) $(x_0, y_0, -z_0)$ 两点分别放置正负电极并通有电流 I，求导电液体中的电势。



稳恒电场问题，且除了 $(x_0, y_0, \pm z_0)$ 两个点电极之外电势满足：$\nabla^2\varphi = 0$

电极电流：

$$\begin{aligned} I &= \oint_{S_1} \sigma_c \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma \implies \oint_{S_1} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma = \frac{(\epsilon_0 I/\sigma_c)}{\epsilon_0} \\ -I &= \oint_{S_2} \sigma_c \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma \implies \oint_{S_2} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma = -\frac{(\epsilon_0 I/\sigma_c)}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad \overset{\text{类比}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{aligned} \oint_{S_1} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma &= \frac{Q_1}{\epsilon_0} \\ \oint_{S_2} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma &= \frac{Q_2}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

S_1，S_2 分别是包围点电极 (x_0, y_0, z_0)，$(x_0, y_0, -z_0)$ 的任意的小闭合曲面

问题类似于在 $(x_0, y_0, +z_0)$ 处放点电荷 $Q_1 = Q$

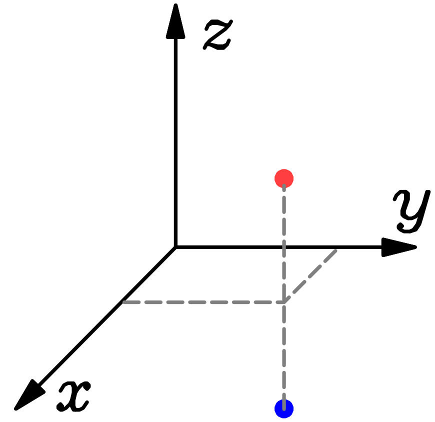
在 $(x_0, y_0, -z_0)$ 处放点电荷 $Q_2 = -Q$ 的静电问题，其中 $Q = \epsilon_0 I/\sigma_c$

边界条件：导体仅存在于 $x > 0$ 和 $y > 0$ 区，

在 $x = 0$ 面，$\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{j}}_2 - \vec{\boldsymbol{j}}_1) = 0$，在 $x < 0$ 区无电流，$\vec{\boldsymbol{j}}_1 = 0$，故有 $\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{j}}_2 = 0$

即：$\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \sigma_c \vec{\boldsymbol{E}} = 0, \quad \implies \quad E_x = 0 \quad \text{at } x = 0^+$ 　　同理：$E_y = 0 \quad \text{at } y = 0^+$

故放置如下“像电荷”：



例 3：有两平面围成直角电容器，其内充满电导率为 σ_c 的液体，取该两平面为 xoz 和 yoz 面。现在在 (x_0, y_0, z_0) $(x_0, y_0, -z_0)$ 两点分别放置正负电极并通有电流 I，求导电液体中的电势。

稳恒电场问题，且除了 $(x_0, y_0, \pm z_0)$ 两个点电极之外电势满足：$\nabla^2\varphi = 0$

电极电流：

$$I = \oint_{S_1} \sigma_c \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma \Longrightarrow \oint_{S_1} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma = \frac{(\epsilon_0 I/\sigma_c)}{\epsilon_0}$$

$$-I = \oint_{S_2} \sigma_c \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma \Longrightarrow \oint_{S_2} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma = -\frac{(\epsilon_0 I/\sigma_c)}{\epsilon_0}$$

$\overset{\text{类比}}{\Longleftrightarrow}$

$$\oint_{S_1} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{S_2} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma = \frac{Q_2}{\epsilon_0}$$

S_1，S_2 分别是包围点电极 (x_0, y_0, z_0)，$(x_0, y_0, -z_0)$ 的任意的小闭合曲面

问题类似于在 $(x_0, y_0, +z_0)$ 处放点电荷 $Q_1 = Q$

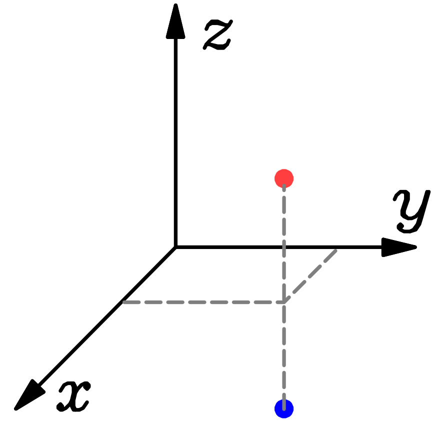
在 $(x_0, y_0, -z_0)$ 处放点电荷 $Q_2 = -Q$ 的静电问题，其中 $Q = \epsilon_0 I/\sigma_c$

边界条件：导体仅存在于 $x > 0$ 和 $y > 0$ 区，

在 $x = 0$ 面，$\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{j}}_2 - \vec{\boldsymbol{j}}_1) = 0$，在 $x < 0$ 区无电流，$\vec{\boldsymbol{j}}_1 = 0$，故有 $\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{j}}_2 = 0$

即：$\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \sigma_c \vec{\boldsymbol{E}} = 0, \quad \Longrightarrow \quad E_x = 0 \quad \text{at } x = 0^+$ 　　同理：$E_y = 0 \quad \text{at } y = 0^+$

故放置如下“像电荷”：$Q_3 = +Q_1 \ \text{at} \ (-x_0, y_0, z_0)$，　$Q_4 = +Q_2 \ \text{at} \ (-x_0, y_0, -z_0)$



例 3：有两平面围成直角电容器，其内充满电导率为 σ_c 的液体，取该两平面为 xoz 和 yoz 面。现在在 (x_0, y_0, z_0) $(x_0, y_0, -z_0)$ 两点分别放置正负电极并通有电流 I，求导电液体中的电势。

稳恒电场问题，且除了 $(x_0, y_0, \pm z_0)$ 两个点电极之外电势满足：$\nabla^2\varphi = 0$

电极电流：

$$I = \oint_{S_1} \sigma_c \vec{n}\cdot\vec{E}\mathrm{d}\sigma \Longrightarrow \oint_{S_1} \vec{n}\cdot\vec{E}\mathrm{d}\sigma = \frac{(\epsilon_0 I/\sigma_c)}{\epsilon_0} \quad \overset{\text{类比}}{\Longleftrightarrow} \quad \oint_{S_1} \vec{n}\cdot\vec{E}\mathrm{d}\sigma = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$

$$-I = \oint_{S_2} \sigma_c \vec{n}\cdot\vec{E}\mathrm{d}\sigma \Longrightarrow \oint_{S_2} \vec{n}\cdot\vec{E}\mathrm{d}\sigma = -\frac{(\epsilon_0 I/\sigma_c)}{\epsilon_0} \qquad \oint_{S_2} \vec{n}\cdot\vec{E}\mathrm{d}\sigma = \frac{Q_2}{\epsilon_0}$$

S_1，S_2 分别是包围点电极 (x_0, y_0, z_0)，$(x_0, y_0, -z_0)$ 的任意的小闭合曲面

问题类似于在 $(x_0, y_0, +z_0)$ 处放点电荷 $Q_1 = Q$

在 $(x_0, y_0, -z_0)$ 处放点电荷 $Q_2 = -Q$ 的静电问题，其中 $Q = \epsilon_0 I/\sigma_c$

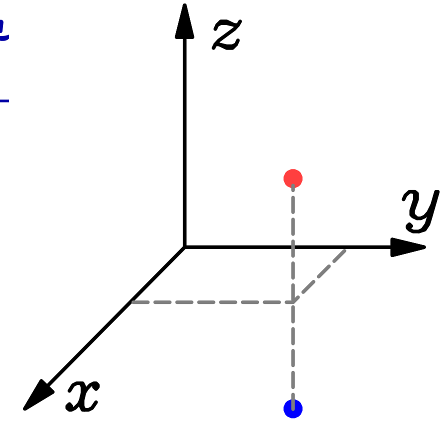
边界条件：导体仅存在于 $x > 0$ 和 $y > 0$ 区，

在 $x = 0$ 面，$\vec{n}\cdot(\vec{j}_2 - \vec{j}_1) = 0$，在 $x < 0$ 区无电流，$\vec{j}_1 = 0$，故有 $\vec{n}\cdot\vec{j}_2 = 0$

即：$\vec{n}\cdot\sigma_c\vec{E} = 0, \quad \Longrightarrow \quad E_x = 0 \quad \text{at } x = 0^+$ 同理：$E_y = 0 \quad \text{at } y = 0^+$

故放置如下“像电荷”：$Q_3 = +Q_1$ at $(-x_0, y_0, z_0)$， $Q_4 = +Q_2$ at $(-x_0, y_0, -z_0)$

Q_1，Q_2，Q_3，Q_4 保证了在 $x = 0$ 面，$E_x = 0$



例 3：有两平面围成直角电容器，其内充满电导率为 σ_c 的液体，取该两平面为 xoz 和 yoz 面。现在在 (x_0, y_0, z_0) $(x_0, y_0, -z_0)$ 两点分别放置正负电极并通有电流 I，求导电液体中的电势。

稳恒电场问题，且除了 $(x_0, y_0, \pm z_0)$ 两个点电极之外电势满足：$\nabla^2\varphi = 0$

电极电流：

$$\begin{aligned} I &= \oint_{S_1} \sigma_c \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma \Longrightarrow \oint_{S_1} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma = \frac{(\epsilon_0 I/\sigma_c)}{\epsilon_0} \\ -I &= \oint_{S_2} \sigma_c \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma \Longrightarrow \oint_{S_2} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma = -\frac{(\epsilon_0 I/\sigma_c)}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad \overset{\text{类比}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{aligned} \oint_{S_1} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma &= \frac{Q_1}{\epsilon_0} \\ \oint_{S_2} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}\sigma &= \frac{Q_2}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

S_1，S_2 分别是包围点电极 (x_0, y_0, z_0)，$(x_0, y_0, -z_0)$ 的任意的小闭合曲面

问题类似于在 $(x_0, y_0, +z_0)$ 处放点电荷 $Q_1 = Q$

在 $(x_0, y_0, -z_0)$ 处放点电荷 $Q_2 = -Q$ 的静电问题，其中 $Q = \epsilon_0 I/\sigma_c$

边界条件：导体仅存在于 $x > 0$ 和 $y > 0$ 区，

在 $x = 0$ 面，$\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{j}}_2 - \vec{\boldsymbol{j}}_1) = 0$，在 $x < 0$ 区无电流，$\vec{\boldsymbol{j}}_1 = 0$，故有 $\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{j}}_2 = 0$

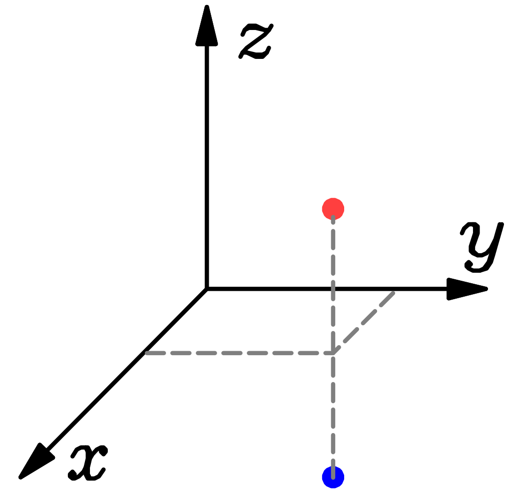
即：$\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \sigma_c \vec{\boldsymbol{E}} = 0$, $\Longrightarrow$ $E_x = 0$ at $x = 0^+$ 同理：$E_y = 0$ at $y = 0^+$

故放置如下“像电荷”：$Q_3 = +Q_1$ at $(-x_0, y_0, z_0)$，$Q_4 = +Q_2$ at $(-x_0, y_0, -z_0)$

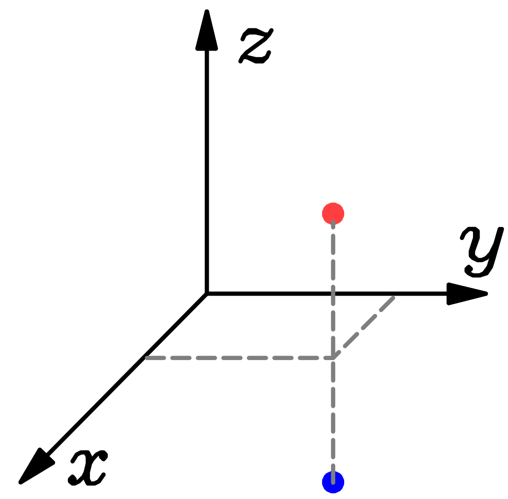
Q_1，Q_2，Q_3，Q_4 保证了在 $x = 0$ 面，$E_x = 0$ 注意此处像电荷与静电不同

在静电问题中：$Q_3 = -Q_1$，$Q_4 = -Q_2$ 保证在 $x = 0$ 面上 $\vec{\boldsymbol{E}} = E_x \hat{\boldsymbol{e}}_x$ (等势面)

Let there be light

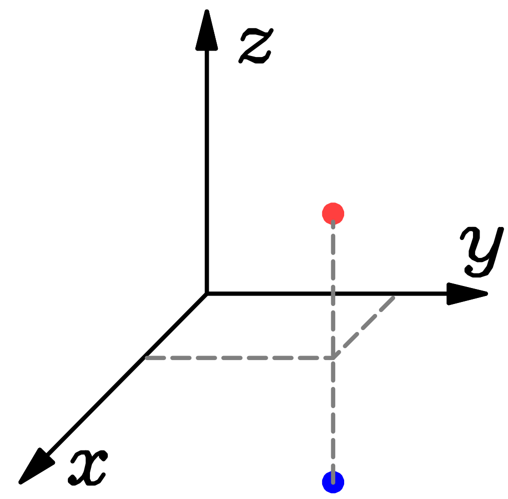


为保证 $y=0$ 面，$E_y=0$，还需放置以下四个“像电荷”



为保证 $y=0$ 面，$E_y=0$，还需放置以下四个“像电荷”

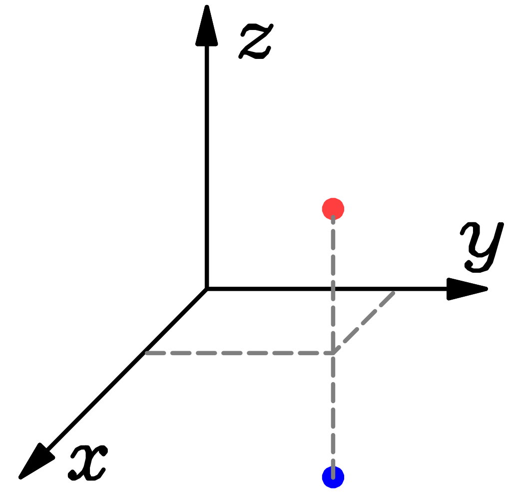
$$Q_1' = +Q_1 \quad \text{at} \quad (x_0, -y_0, z_0),$$
$$Q_2' = +Q_2 \quad \text{at} \quad (x_0, -y_0, -z_0),$$
$$Q_3' = +Q_3 \quad \text{at} \quad (-x_0, -y_0, z_0),$$
$$Q_4' = +Q_4 \quad \text{at} \quad (-x_0, -y_0, -z_0)$$



为保证 $y=0$ 面，$E_y=0$，还需放置以下四个“像电荷”

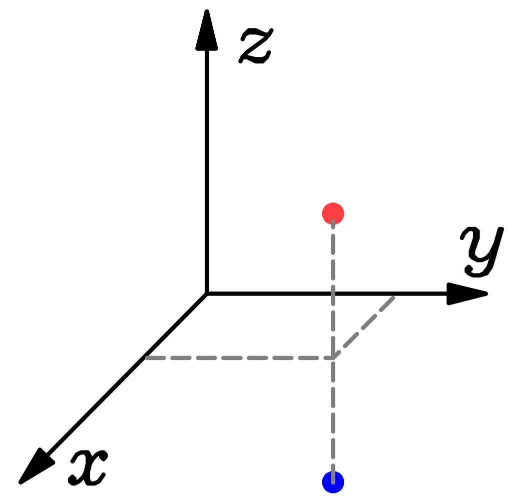
$$
\begin{aligned}
Q_1' &= +Q_1 \quad \text{at} \quad (x_0, -y_0, z_0), \\
Q_2' &= +Q_2 \quad \text{at} \quad (x_0, -y_0, -z_0), \\
Q_3' &= +Q_3 \quad \text{at} \quad (-x_0, -y_0, z_0), \\
Q_4' &= +Q_4 \quad \text{at} \quad (-x_0, -y_0, -z_0)
\end{aligned}
$$

最后，空间电势由以下 8 个点电荷的电势之和



为保证 $y=0$ 面，$E_y=0$，还需放置以下四个“像电荷”

$$Q_1' = +Q_1 \quad \text{at} \quad (x_0, -y_0, z_0),$$
$$Q_2' = +Q_2 \quad \text{at} \quad (x_0, -y_0, -z_0),$$
$$Q_3' = +Q_3 \quad \text{at} \quad (-x_0, -y_0, z_0),$$
$$Q_4' = +Q_4 \quad \text{at} \quad (-x_0, -y_0, -z_0)$$

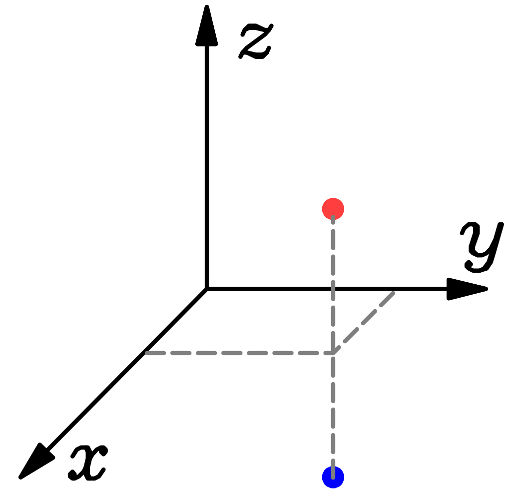


最后，空间电势由以下 8 个点电荷的电势之和

$$\begin{array}{llll} (x_0, y_0, z_0): & Q & (x_0, y_0, -z_0): & -Q \\ (-x_0, y_0, z_0): & Q & (-x_0, y_0, -z_0): & -Q \\ (x_0, -y_0, z_0): & Q & (x_0, -y_0, -z_0): & -Q \\ (-x_0, -y_0, z_0): & Q & (-x_0, -y_0, -z_0): & -Q \end{array}$$

为保证 $y=0$ 面，$E_y=0$，还需放置以下四个“像电荷”

$$Q_1' = +Q_1 \quad \text{at} \quad (x_0, -y_0, z_0),$$
$$Q_2' = +Q_2 \quad \text{at} \quad (x_0, -y_0, -z_0),$$
$$Q_3' = +Q_3 \quad \text{at} \quad (-x_0, -y_0, z_0),$$
$$Q_4' = +Q_4 \quad \text{at} \quad (-x_0, -y_0, -z_0)$$



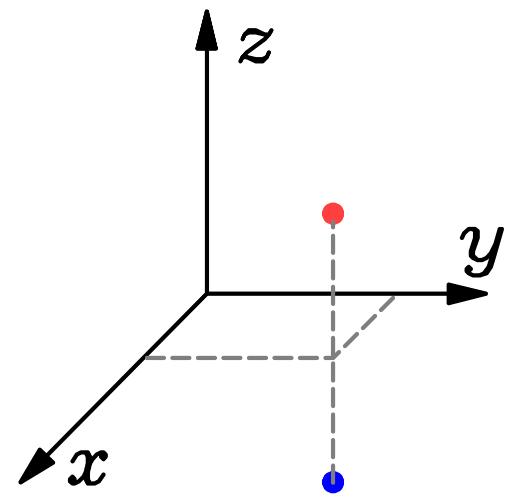
最后，空间电势由以下 8 个点电荷的电势之和

(x_0, y_0, z_0) :	Q	$(x_0, y_0, -z_0)$:	$-Q$
$(-x_0, y_0, z_0)$:	Q	$(-x_0, y_0, -z_0)$:	$-Q$
$(x_0, -y_0, z_0)$:	Q	$(x_0, -y_0, -z_0)$:	$-Q$
$(-x_0, -y_0, z_0)$:	Q	$(-x_0, -y_0, -z_0)$:	$-Q$

其中 $Q = \epsilon_0 I/\sigma_c$

为保证 $y=0$ 面，$E_y=0$，还需放置以下四个“像电荷”

$$Q_1' = +Q_1 \quad \text{at} \quad (x_0, -y_0, z_0),$$
$$Q_2' = +Q_2 \quad \text{at} \quad (x_0, -y_0, -z_0),$$
$$Q_3' = +Q_3 \quad \text{at} \quad (-x_0, -y_0, z_0),$$
$$Q_4' = +Q_4 \quad \text{at} \quad (-x_0, -y_0, -z_0)$$



最后，空间电势由以下 8 个点电荷的电势之和

(x_0, y_0, z_0) :	Q	$(x_0, y_0, -z_0)$:	$-Q$
$(-x_0, y_0, z_0)$:	Q	$(-x_0, y_0, -z_0)$:	$-Q$
$(x_0, -y_0, z_0)$:	Q	$(x_0, -y_0, -z_0)$:	$-Q$
$(-x_0, -y_0, z_0)$:	Q	$(-x_0, -y_0, -z_0)$:	$-Q$

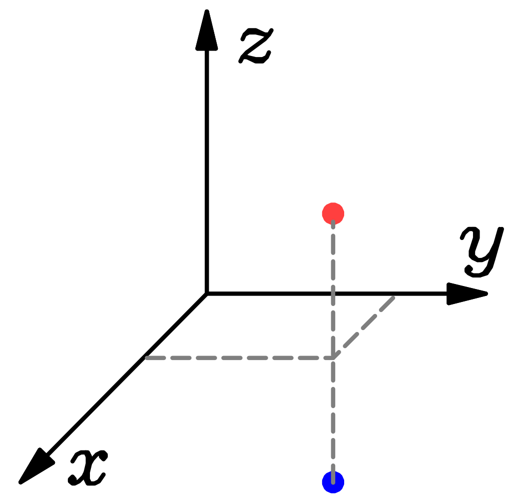
其中 $Q = \epsilon_0 I/\sigma_c$

思考：$z>0$ 的半空间充满电导率为 σ_c 的介质，$z<0$ 为真空。

在 $(0, \pm 1, 1)$ 两点分别放置正负电极并通有电流 I，求 $z<0$ 区的电势。

为保证 $y=0$ 面，$E_y=0$，还需放置以下四个“像电荷”

$$Q_1' = +Q_1 \quad \text{at} \quad (x_0, -y_0, z_0),$$
$$Q_2' = +Q_2 \quad \text{at} \quad (x_0, -y_0, -z_0),$$
$$Q_3' = +Q_3 \quad \text{at} \quad (-x_0, -y_0, z_0),$$
$$Q_4' = +Q_4 \quad \text{at} \quad (-x_0, -y_0, -z_0)$$



最后，空间电势由以下 8 个点电荷的电势之和

$$\begin{array}{llll}
(x_0, y_0, z_0): & Q & (x_0, y_0, -z_0): & -Q \\
(-x_0, y_0, z_0): & Q & (-x_0, y_0, -z_0): & -Q \\
(x_0, -y_0, z_0): & Q & (x_0, -y_0, -z_0): & -Q \\
(-x_0, -y_0, z_0): & Q & (-x_0, -y_0, -z_0): & -Q
\end{array}$$

其中 $Q = \epsilon_0 I/\sigma_c$

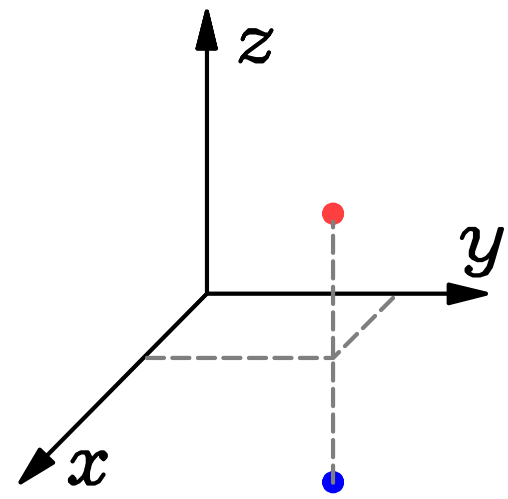
思考：$z>0$ 的半空间充满电导率为 σ_c 的介质，$z<0$ 为真空。

在 $(0, \pm 1, 1)$ 两点分别放置正负电极并通有电流 I，求 $z<0$ 区的电势。

例 4：如图所示接有电源的电子线路内存在稳定电流，试证明单位时间通过闭合曲面 S 流入的能量等于电源消耗的功率 IV。

为保证 $y=0$ 面，$E_y=0$，还需放置以下四个“像电荷”

$$Q_1' = +Q_1 \quad \text{at} \quad (x_0, -y_0, z_0),$$
$$Q_2' = +Q_2 \quad \text{at} \quad (x_0, -y_0, -z_0),$$
$$Q_3' = +Q_3 \quad \text{at} \quad (-x_0, -y_0, z_0),$$
$$Q_4' = +Q_4 \quad \text{at} \quad (-x_0, -y_0, -z_0)$$



最后，空间电势由以下 8 个点电荷的电势之和

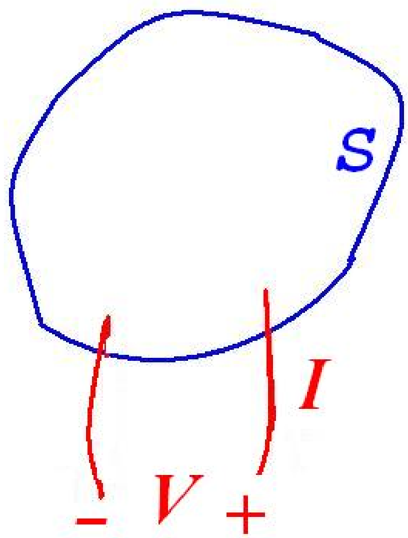
(x_0, y_0, z_0) :	Q	$(x_0, y_0, -z_0)$:	$-Q$
$(-x_0, y_0, z_0)$:	Q	$(-x_0, y_0, -z_0)$:	$-Q$
$(x_0, -y_0, z_0)$:	Q	$(x_0, -y_0, -z_0)$:	$-Q$
$(-x_0, -y_0, z_0)$:	Q	$(-x_0, -y_0, -z_0)$:	$-Q$

其中 $Q = \epsilon_0 I/\sigma_c$

思考：$z>0$ 的半空间充满电导率为 σ_c 的介质，$z<0$ 为真空。

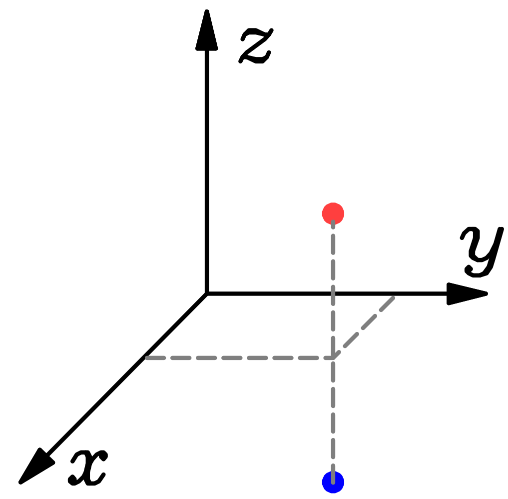
在 $(0, \pm 1, 1)$ 两点分别放置正负电极并通有电流 I，求 $z<0$ 区的电势

例 4：如图所示接有电源的电子线路内存在稳定电流，试证明单位时间通过闭合曲面 S 流入的能量等于电源消耗的功率 IV。



为保证 $y=0$ 面，$E_y=0$，还需放置以下四个“像电荷”

$$Q_1' = +Q_1 \quad \text{at} \quad (x_0, -y_0, z_0),$$
$$Q_2' = +Q_2 \quad \text{at} \quad (x_0, -y_0, -z_0),$$
$$Q_3' = +Q_3 \quad \text{at} \quad (-x_0, -y_0, z_0),$$
$$Q_4' = +Q_4 \quad \text{at} \quad (-x_0, -y_0, -z_0)$$



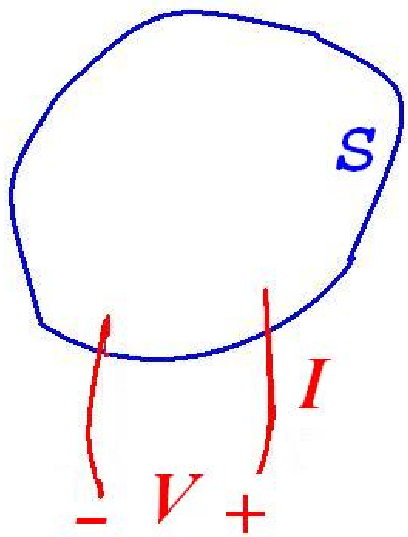
最后，空间电势由以下 8 个点电荷的电势之和

(x_0, y_0, z_0) :	Q	$(x_0, y_0, -z_0)$:	$-Q$
$(-x_0, y_0, z_0)$:	Q	$(-x_0, y_0, -z_0)$:	$-Q$
$(x_0, -y_0, z_0)$:	Q	$(x_0, -y_0, -z_0)$:	$-Q$
$(-x_0, -y_0, z_0)$:	Q	$(-x_0, -y_0, -z_0)$:	$-Q$

其中 $Q = \epsilon_0 I/\sigma_c$

思考：$z>0$ 的半空间充满电导率为 σ_c 的介质，$z<0$ 为真空。
在 $(0, \pm 1, 1)$ 两点分别放置正负电极并通有电流 I，求 $z<0$ 区的电势

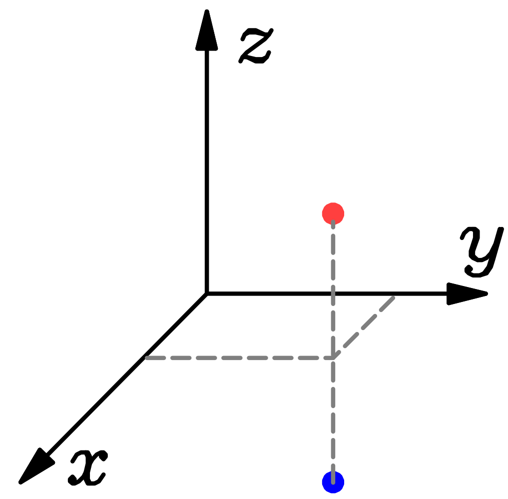
例 4：如图所示接有电源的电子线路内存在稳定电流，试证明单位时间通过闭合曲面 S 流入的能量等于电源消耗的功率 IV。



在线路理论中，电源消耗的功率：$P = IV$，转化为线路的焦耳热

为保证 $y=0$ 面，$E_y=0$，还需放置以下四个“像电荷”

$$
\begin{aligned}
Q_1' &= +Q_1 \quad \text{at} \quad (x_0, -y_0, z_0),\\
Q_2' &= +Q_2 \quad \text{at} \quad (x_0, -y_0, -z_0),\\
Q_3' &= +Q_3 \quad \text{at} \quad (-x_0, -y_0, z_0),\\
Q_4' &= +Q_4 \quad \text{at} \quad (-x_0, -y_0, -z_0)
\end{aligned}
$$



最后，空间电势由以下 8 个点电荷的电势之和

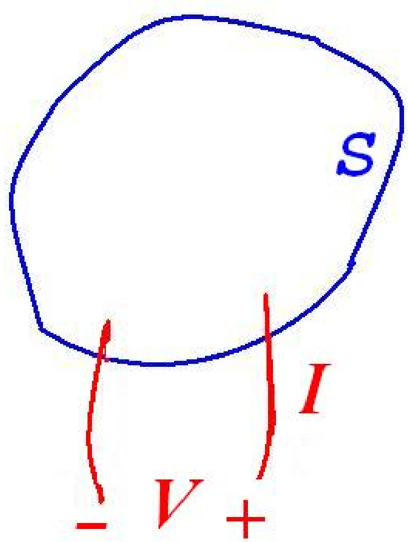
(x_0, y_0, z_0) :	Q	$(x_0, y_0, -z_0)$:	$-Q$
$(-x_0, y_0, z_0)$:	Q	$(-x_0, y_0, -z_0)$:	$-Q$
$(x_0, -y_0, z_0)$:	Q	$(x_0, -y_0, -z_0)$:	$-Q$
$(-x_0, -y_0, z_0)$:	Q	$(-x_0, -y_0, -z_0)$:	$-Q$

其中 $Q=\epsilon_0 I/\sigma_c$

思考：$z>0$ 的半空间充满电导率为 σ_c 的介质，$z<0$ 为真空。

在 $(0,\pm 1,1)$ 两点分别放置正负电极并通有电流 I，求 $z<0$ 区的电势

例 4：如图所示接有电源的电子线路内存在稳定电流，试证明单位时间通过闭合曲面 S 流入的能量等于电源消耗的功率 IV。

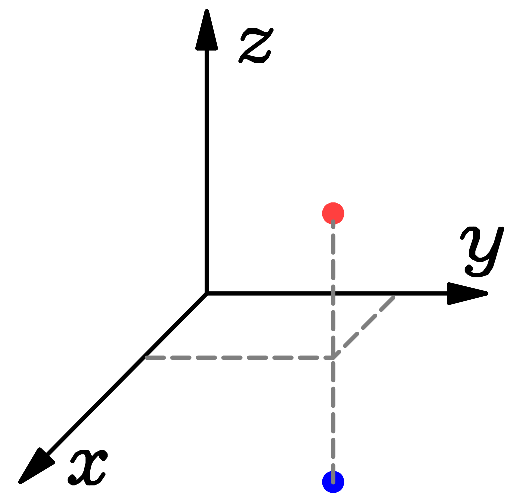


在线路理论中，电源消耗的功率：$P=IV$，转化为线路的焦耳热

从场的观点来看，能量是通过 Poynting 矢量经闭合面 S 流进线路中的元件

为保证 $y=0$ 面，$E_y=0$，还需放置以下四个“像电荷”

$$Q_1' = +Q_1 \quad \text{at} \quad (x_0, -y_0, z_0),$$
$$Q_2' = +Q_2 \quad \text{at} \quad (x_0, -y_0, -z_0),$$
$$Q_3' = +Q_3 \quad \text{at} \quad (-x_0, -y_0, z_0),$$
$$Q_4' = +Q_4 \quad \text{at} \quad (-x_0, -y_0, -z_0)$$



最后，空间电势由以下 8 个点电荷的电势之和

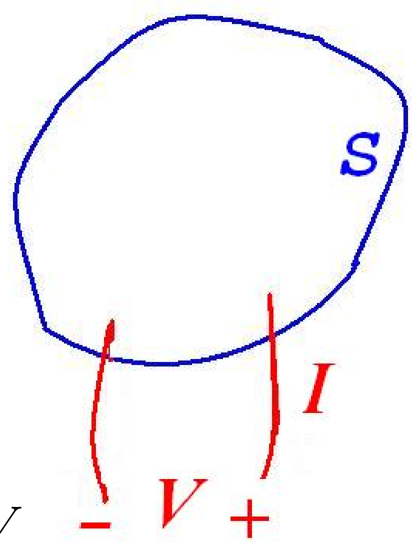
(x_0, y_0, z_0) :	Q	$(x_0, y_0, -z_0)$:	$-Q$
$(-x_0, y_0, z_0)$:	Q	$(-x_0, y_0, -z_0)$:	$-Q$
$(x_0, -y_0, z_0)$:	Q	$(x_0, -y_0, -z_0)$:	$-Q$
$(-x_0, -y_0, z_0)$:	Q	$(-x_0, -y_0, -z_0)$:	$-Q$

其中 $Q = \epsilon_0 I/\sigma_c$

思考：$z>0$ 的半空间充满电导率为 σ_c 的介质，$z<0$ 为真空。

在 $(0, \pm 1, 1)$ 两点分别放置正负电极并通有电流 I，求 $z<0$ 区的电势

例 4：如图所示接有电源的电子线路内存在稳定电流，试证明单位时间通过闭合曲面 S 流入的能量等于电源消耗的功率 IV。

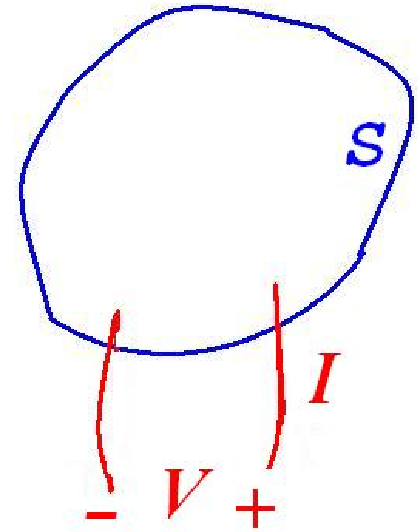


在线路理论中，电源消耗的功率：$P=IV$，转化为线路的焦耳热

从场的观点来看，能量是通过 Poynting 矢量经闭合面 S 流进线路中的元件

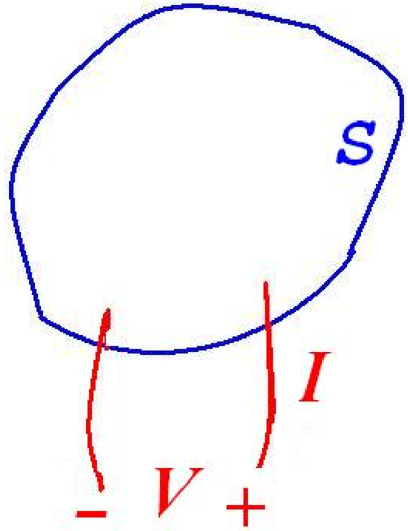
现证明通过单位时间闭合面 S 流入的能量 $W = -\oint \vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma = P = IV$

Let there be light



Let there be light

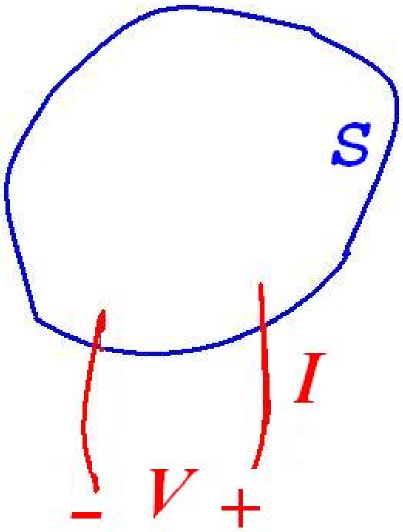
Maxwell 方程：$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = -\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi$



Let there be light

Maxwell 方程：$\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{E} = -\nabla\varphi$

$$W = -\oint_S \vec{n} \cdot \vec{S}\,\mathrm{d}\sigma = \oint_S \vec{n} \cdot (\nabla\varphi \times \vec{H})\,\mathrm{d}\sigma$$

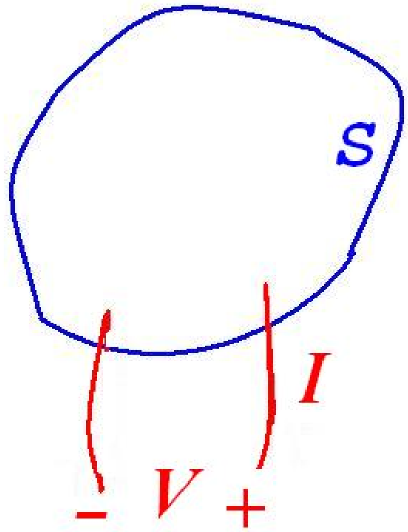


Let there be light

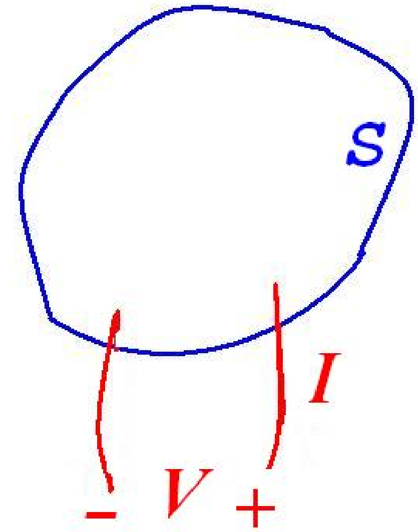
Maxwell 方程：$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = -\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla \varphi$

$$W = -\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{S}} \, \mathrm{d}\sigma = \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\nabla\varphi \times \vec{\boldsymbol{H}}) \, \mathrm{d}\sigma$$

利用：$\nabla \times (\varphi \vec{\boldsymbol{H}}) = (\nabla\varphi) \times \vec{\boldsymbol{H}} + \varphi \nabla \times \vec{\boldsymbol{H}}$



Let there be light



Maxwell 方程：$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}=-\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{E}}=-\nabla\varphi$

$$W=-\oint_{S}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{S}}\,\mathrm{d}\sigma=\oint_{S}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\nabla\varphi\times\vec{\boldsymbol{H}})\,\mathrm{d}\sigma$$

利用：$\nabla\times(\varphi\vec{\boldsymbol{H}})=(\nabla\varphi)\times\vec{\boldsymbol{H}}+\varphi\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}$

$$W=\oint_{S}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\nabla\times(\varphi\vec{\boldsymbol{H}})\right]\mathrm{d}\sigma-\oint_{S}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\varphi\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}})\,\mathrm{d}\sigma$$

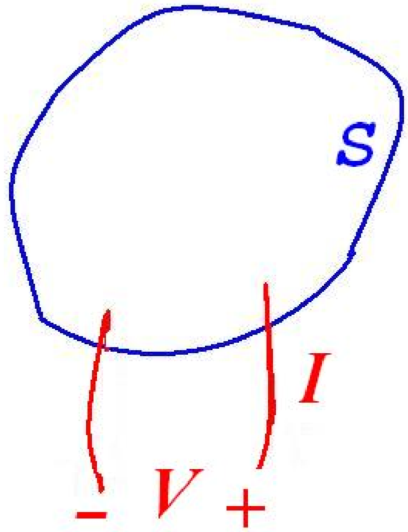
Let there be light

Maxwell 方程：$\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{E}=-\nabla\varphi$

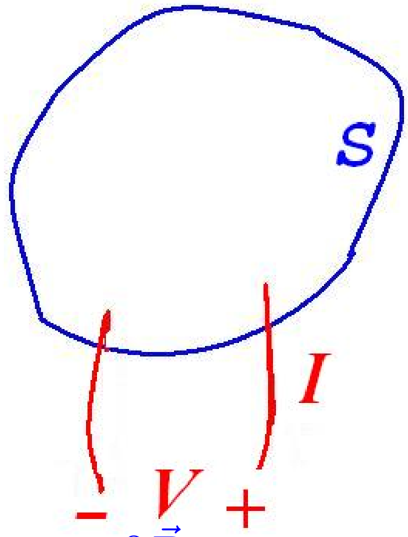
$$W=-\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma=\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot(\nabla\varphi\times\vec{H})\,\mathrm{d}\sigma$$

利用：$\nabla\times(\varphi\vec{H})=(\nabla\varphi)\times\vec{H}+\varphi\nabla\times\vec{H}$

$$\begin{aligned}W&=\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot[\nabla\times(\varphi\vec{H})]\,\mathrm{d}\sigma-\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot(\varphi\nabla\times\vec{H})\,\mathrm{d}\sigma\\&=\int_{\mathcal{V}}\underbrace{\nabla\cdot[\nabla\times(\varphi\vec{H})]}_{\text{旋度的散度为 0}}\,\mathrm{d}\tau-\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot(\varphi\underbrace{\nabla\times\vec{H}}_{\nabla\times\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{j}})\,\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$



Let there be light



Maxwell 方程：$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}=-\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{E}}=-\nabla\varphi$

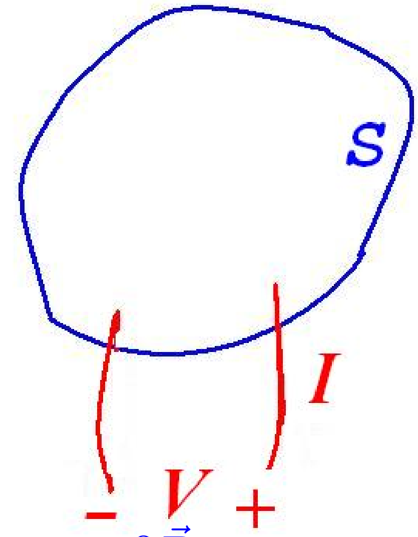
$$W=-\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{S}}\,\mathrm{d}\sigma=\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\nabla\varphi\times\vec{\boldsymbol{H}})\,\mathrm{d}\sigma$$

利用：$\nabla\times(\varphi\vec{\boldsymbol{H}})=(\nabla\varphi)\times\vec{\boldsymbol{H}}+\varphi\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}$

$$\begin{aligned}W&=\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\nabla\times(\varphi\vec{\boldsymbol{H}})\right]\mathrm{d}\sigma-\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\varphi\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}})\,\mathrm{d}\sigma\\&=\int_{\mathcal{V}}\underbrace{\nabla\cdot\left[\nabla\times(\varphi\vec{\boldsymbol{H}})\right]}_{\text{旋度的散度为 0}}\mathrm{d}\tau-\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\varphi\underbrace{\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}}_{\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t}=\vec{j}})\,\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

利用了稳定电流：$\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t}=0$

Let there be light



Maxwell 方程：$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}=-\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{E}}=-\nabla\varphi$

$$W=-\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{S}}\,\mathrm{d}\sigma=\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\nabla\varphi\times\vec{\boldsymbol{H}})\,\mathrm{d}\sigma$$

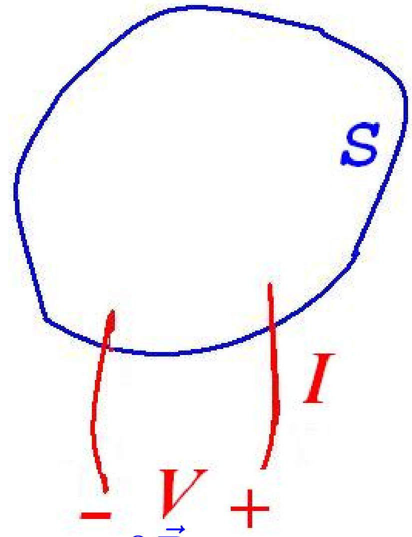
利用：$\nabla\times(\varphi\vec{\boldsymbol{H}})=(\nabla\varphi)\times\vec{\boldsymbol{H}}+\varphi\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}$

$$\begin{aligned}W&=\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\nabla\times(\varphi\vec{\boldsymbol{H}})\right]\mathrm{d}\sigma-\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\varphi\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}})\,\mathrm{d}\sigma\\&=\int_{\mathcal{V}}\underbrace{\nabla\cdot\left[\nabla\times(\varphi\vec{\boldsymbol{H}})\right]}_{\text{旋度的散度为 }0}\mathrm{d}\tau-\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\varphi\underbrace{\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}}_{\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t}=\vec{j}})\,\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

利用了稳定电流：$\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t}=0$

$$W=\boxed{-\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{S}}\,\mathrm{d}\sigma=-\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\varphi\vec{\boldsymbol{j}})\,\mathrm{d}\sigma}$$

Let there be light



Maxwell 方程：$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}=-\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{E}}=-\nabla\varphi$

$$W=-\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{S}}\,\mathrm{d}\sigma=\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\nabla\varphi\times\vec{\boldsymbol{H}})\,\mathrm{d}\sigma$$

利用：$\nabla\times(\varphi\vec{\boldsymbol{H}})=(\nabla\varphi)\times\vec{\boldsymbol{H}}+\varphi\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}$

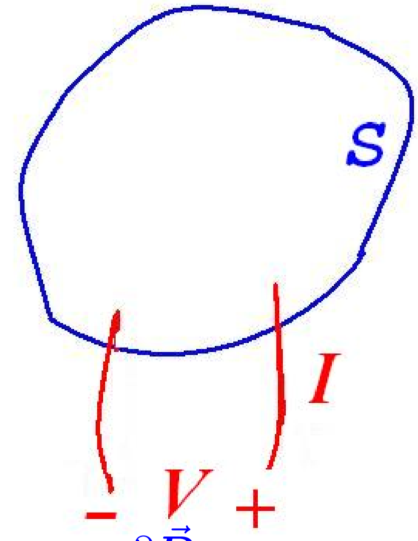
$$\begin{aligned}W&=\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\nabla\times(\varphi\vec{\boldsymbol{H}})\right]\mathrm{d}\sigma-\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\varphi\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}})\,\mathrm{d}\sigma\\&=\int_{\mathcal{V}}\underbrace{\nabla\cdot\left[\nabla\times(\varphi\vec{\boldsymbol{H}})\right]}_{\text{旋度的散度为 0}}\mathrm{d}\tau-\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\varphi\underbrace{\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}}_{\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t}=\vec{j}})\,\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

利用了稳定电流：$\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t}=0$

$$W=\boxed{-\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{S}}\,\mathrm{d}\sigma=-\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\varphi\vec{\boldsymbol{j}})\,\mathrm{d}\sigma}$$

曲面积分仅在与导线相交处不为 0，

Let there be light



Maxwell 方程：$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}=-\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}=0\quad\Longrightarrow\quad\vec{\boldsymbol{E}}=-\nabla\varphi$

$$W=-\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{S}}\,\mathrm{d}\sigma=\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\nabla\varphi\times\vec{\boldsymbol{H}})\,\mathrm{d}\sigma$$

利用：$\nabla\times(\varphi\vec{\boldsymbol{H}})=(\nabla\varphi)\times\vec{\boldsymbol{H}}+\varphi\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}$

$$\begin{aligned}W&=\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\nabla\times(\varphi\vec{\boldsymbol{H}})\right]\mathrm{d}\sigma-\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\varphi\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}})\,\mathrm{d}\sigma\\&=\int_{\mathcal{V}}\underbrace{\nabla\cdot\left[\nabla\times(\varphi\vec{\boldsymbol{H}})\right]}_{\text{旋度的散度为 0}}\mathrm{d}\tau-\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\varphi\underbrace{\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}}_{\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}=\vec{\boldsymbol{j}}+\frac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t}=\vec{\boldsymbol{j}}})\,\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

利用了稳定电流：$\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t}=0$

$$W=\boxed{-\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{S}}\,\mathrm{d}\sigma=-\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\varphi\vec{\boldsymbol{j}})\,\mathrm{d}\sigma}$$

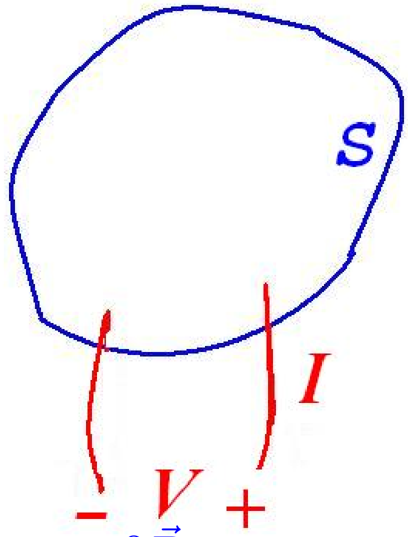
曲面积分仅在与导线相交处不为 0，
利用在导线上 φ 为常数

Let there be light

Maxwell 方程：$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}} = -\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi$

$$W = -\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{S}}\,\mathrm{d}\sigma = \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\nabla\varphi\times\vec{\boldsymbol{H}})\,\mathrm{d}\sigma$$

利用：$\nabla\times(\varphi\vec{\boldsymbol{H}}) = (\nabla\varphi)\times\vec{\boldsymbol{H}} + \varphi\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}$



$$W = \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot[\nabla\times(\varphi\vec{\boldsymbol{H}})]\,\mathrm{d}\sigma - \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\varphi\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}})\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \underbrace{\nabla\cdot[\nabla\times(\varphi\vec{\boldsymbol{H}})]}_{\text{旋度的散度为 0}}\,\mathrm{d}\tau - \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\varphi\underbrace{\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}}_{\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}=\vec{\jmath}+\frac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t}=\vec{\jmath}})\,\mathrm{d}\sigma$$

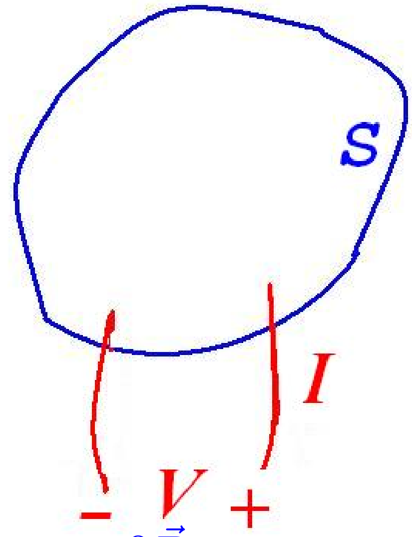
利用了稳定电流：$\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t} = 0$

$$W = \boxed{-\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{S}}\,\mathrm{d}\sigma = -\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\varphi\vec{\boldsymbol{j}})\,\mathrm{d}\sigma}$$

曲面积分仅在与导线相交处不为 0，利用在导线上 φ 为常数

$$= -(-\varphi_{+}I - \varphi_{-}I)$$

Let there be light



Maxwell 方程：$\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{E}=-\nabla\varphi$

$$W=-\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma=\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot(\nabla\varphi\times\vec{H})\,\mathrm{d}\sigma$$

利用：$\nabla\times(\varphi\vec{H})=(\nabla\varphi)\times\vec{H}+\varphi\nabla\times\vec{H}$

$$W=\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot\left[\nabla\times(\varphi\vec{H})\right]\mathrm{d}\sigma-\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot(\varphi\nabla\times\vec{H})\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_{\mathcal{V}}\underbrace{\nabla\cdot\left[\nabla\times(\varphi\vec{H})\right]}_{\text{旋度的散度为 }0}\mathrm{d}\tau-\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot(\varphi\underbrace{\nabla\times\vec{H}}_{\nabla\times\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{j}})\,\mathrm{d}\sigma$$

利用了稳定电流：$\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}=0$

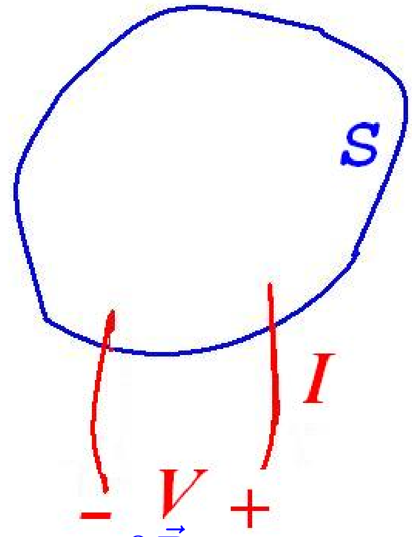
$$W=\boxed{-\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma=-\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot(\varphi\vec{j})\,\mathrm{d}\sigma}$$

曲面积分仅在与导线相交处不为 0，
利用在导线上 φ 为常数

$$=-(-\varphi_+I-\varphi_-I)$$

利用了 $\int\vec{n}\cdot\vec{j}\,\mathrm{d}\sigma=I$ 且正（负）极处电流流入（出）曲面

Let there be light



Maxwell 方程：$\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0\quad\Longrightarrow\quad\vec{E}=-\nabla\varphi$

$$W=-\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma=\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot(\nabla\varphi\times\vec{H})\,\mathrm{d}\sigma$$

利用：$\nabla\times(\varphi\vec{H})=(\nabla\varphi)\times\vec{H}+\varphi\nabla\times\vec{H}$

$$W=\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot\left[\nabla\times(\varphi\vec{H})\right]\mathrm{d}\sigma-\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot(\varphi\nabla\times\vec{H})\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_{\mathcal{V}}\underbrace{\nabla\cdot\left[\nabla\times(\varphi\vec{H})\right]}_{\text{旋度的散度为 }0}\mathrm{d}\tau-\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot(\varphi\underbrace{\nabla\times\vec{H}}_{\nabla\times\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{j}})\,\mathrm{d}\sigma$$

利用了稳定电流：$\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}=0$

$$W=\boxed{-\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma=-\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot(\varphi\vec{j})\,\mathrm{d}\sigma}$$

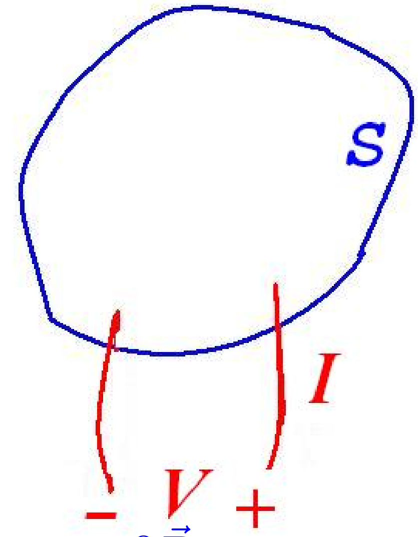
曲面积分仅在与导线相交处不为 0，利用在导线上 φ 为常数

$$=-(-\varphi_+I-\varphi_-I)$$

利用了 $\int\vec{n}\cdot\vec{j}\,\mathrm{d}\sigma=I$ 且正（负）极处电流流入（出）曲面

$$=I(\varphi_+-\varphi_-)=IV$$

Let there be light



Maxwell 方程：$\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{E} = -\nabla\varphi$

$$W = -\oint_{\mathcal{S}} \vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma = \oint_{\mathcal{S}} \vec{n}\cdot(\nabla\varphi\times\vec{H})\,\mathrm{d}\sigma$$

利用：$\nabla\times(\varphi\vec{H}) = (\nabla\varphi)\times\vec{H} + \varphi\nabla\times\vec{H}$

$$W = \oint_{\mathcal{S}} \vec{n}\cdot[\nabla\times(\varphi\vec{H})]\,\mathrm{d}\sigma - \oint_{\mathcal{S}} \vec{n}\cdot(\varphi\nabla\times\vec{H})\,\mathrm{d}\sigma$$
$$= \int_{\mathcal{V}} \underbrace{\nabla\cdot[\nabla\times(\varphi\vec{H})]}_{\text{旋度的散度为 0}}\,\mathrm{d}\tau - \oint_{\mathcal{S}} \vec{n}\cdot(\varphi\underbrace{\nabla\times\vec{H}}_{\nabla\times\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{j}})\,\mathrm{d}\sigma$$

利用了稳定电流：$\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} = 0$

$$W = \boxed{-\oint_{\mathcal{S}} \vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma = -\oint_{\mathcal{S}} \vec{n}\cdot(\varphi\vec{j})\,\mathrm{d}\sigma}$$

曲面积分仅在与导线相交处不为 0，
利用在导线上 φ 为常数

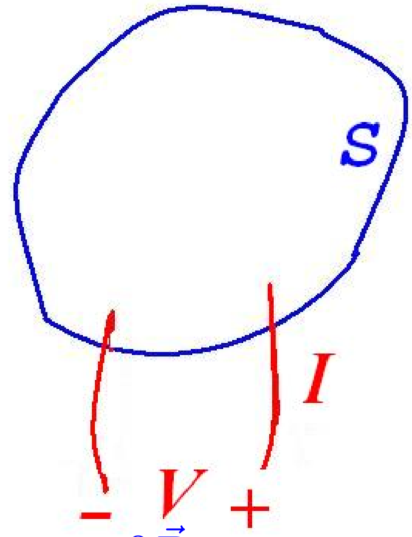
$$= -(-\varphi_+ I - \varphi_- I)$$

利用了 $\int \vec{n}\cdot\vec{j}\,\mathrm{d}\sigma = I$ 且正（负）极处电流流入（出）曲面

$$= I(\varphi_+ - \varphi_-) = IV$$

—— 从场的观点看,能量由闭合曲面流入线路

Let there be light



Maxwell 方程：$\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{E}=-\nabla\varphi$

$$W=-\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma=\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot(\nabla\varphi\times\vec{H})\,\mathrm{d}\sigma$$

利用：$\nabla\times(\varphi\vec{H})=(\nabla\varphi)\times\vec{H}+\varphi\nabla\times\vec{H}$

$$W=\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot[\nabla\times(\varphi\vec{H})]\,\mathrm{d}\sigma-\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot(\varphi\nabla\times\vec{H})\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_{\mathcal{V}}\underbrace{\nabla\cdot[\nabla\times(\varphi\vec{H})]}_{\text{旋度的散度为 }0}\,\mathrm{d}\tau-\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot(\varphi\underbrace{\nabla\times\vec{H}}_{\nabla\times\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{j}})\,\mathrm{d}\sigma$$

利用了稳定电流：$\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}=0$

$$W=\boxed{-\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma=-\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot(\varphi\vec{j})\,\mathrm{d}\sigma}$$

曲面积分仅在与导线相交处不为 0，利用在导线上 φ 为常数

$$=-(-\varphi_+I-\varphi_-I)$$

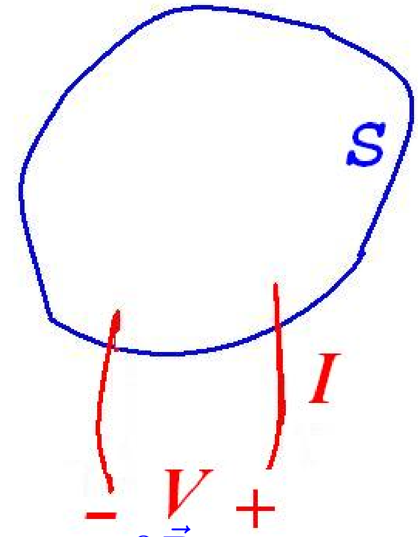
利用了 $\int\vec{n}\cdot\vec{j}\,\mathrm{d}\sigma=I$ 且正（负）极处电流流入（出）曲面

$$=I(\varphi_+-\varphi_-)=IV$$

—— 从场的观点看,能量由闭合曲面流入线路

讨论：

Let there be light



Maxwell 方程：$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}} = -\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi$

$$W = -\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{S}}\,\mathrm{d}\sigma = \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\nabla\varphi\times\vec{\boldsymbol{H}})\,\mathrm{d}\sigma$$

利用：$\nabla\times(\varphi\vec{\boldsymbol{H}}) = (\nabla\varphi)\times\vec{\boldsymbol{H}} + \varphi\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}$

$$W = \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\nabla\times(\varphi\vec{\boldsymbol{H}})\right]\mathrm{d}\sigma - \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\varphi\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}})\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \underbrace{\nabla\cdot\left[\nabla\times(\varphi\vec{\boldsymbol{H}})\right]}_{\text{旋度的散度为 0}}\mathrm{d}\tau - \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\varphi\underbrace{\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}}_{\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t}=\vec{j}})\,\mathrm{d}\sigma$$

利用了稳定电流：$\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t} = 0$

$$W = \boxed{-\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{S}}\,\mathrm{d}\sigma = -\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\varphi\vec{\boldsymbol{j}})\,\mathrm{d}\sigma}$$

曲面积分仅在与导线相交处不为 0，利用在导线上 φ 为常数

$$= -(-\varphi_+ I - \varphi_- I)$$

利用了 $\int \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}\,\mathrm{d}\sigma = I$ 且正（负）极处电流流入（出）曲面

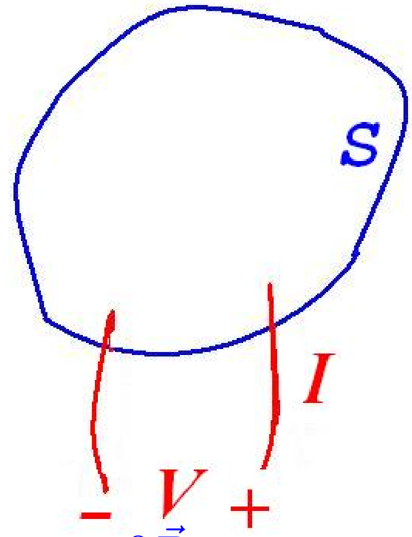
$$= I(\varphi_+ - \varphi_-) = IV$$

—— 从场的观点看,能量由闭合曲面流入线路

讨论：

1. 对缓变电流，如日常用的交流电，仍可近似认为：$\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} = 0$，$\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t} = 0$，上述结论仍然成立。

Let there be light



Maxwell 方程：$\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{E} = -\nabla\varphi$

$$W = -\oint_S \vec{n} \cdot \vec{S}\, d\sigma = \oint_S \vec{n} \cdot (\nabla\varphi \times \vec{H})\, d\sigma$$

利用：$\nabla \times (\varphi\vec{H}) = (\nabla\varphi) \times \vec{H} + \varphi\nabla \times \vec{H}$

$$W = \oint_S \vec{n} \cdot [\nabla \times (\varphi\vec{H})]\, d\sigma - \oint_S \vec{n} \cdot (\varphi\nabla \times \vec{H})\, d\sigma$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \underbrace{\nabla \cdot [\nabla \times (\varphi\vec{H})]}_{\text{旋度的散度为 }0}\, d\tau - \oint_S \vec{n} \cdot (\varphi \underbrace{\nabla \times \vec{H}}_{\nabla\times\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{j}})\, d\sigma$$

利用了稳定电流：$\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$

$$W = \boxed{-\oint_S \vec{n} \cdot \vec{S}\, d\sigma = -\oint_S \vec{n} \cdot (\varphi\vec{j})\, d\sigma}$$

曲面积分仅在与导线相交处不为 0，
利用在导线上 φ 为常数

$$= -(-\varphi_+ I - \varphi_- I)$$

利用了 $\int \vec{n} \cdot \vec{j}\, d\sigma = I$ 且正（负）极处电流流入（出）曲面

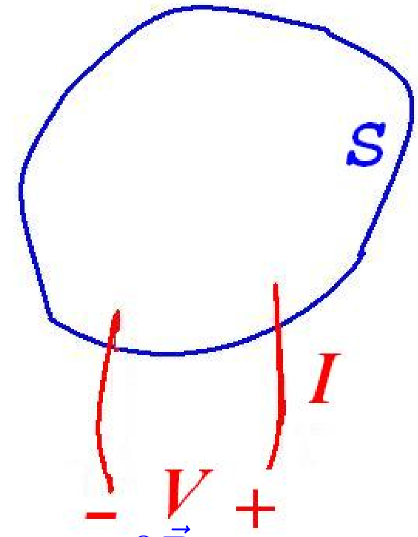
$$= I(\varphi_+ - \varphi_-) = IV$$

—— 从场的观点看,能量由闭合曲面流入线路

讨论：

1. 对缓变电流，如日常用的交流电，仍可近似认为：$\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$，$\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$，上述结论仍然成立。

2. 对辐射天线，电流变化快，$\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$，$\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \neq 0$，电源提供的能量除少量被线路耗散之外，



Maxwell 方程：$\nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{E} = -\nabla\varphi$

$$W = -\oint_S \vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma = \oint_S \vec{n}\cdot(\nabla\varphi\times\vec{H})\,\mathrm{d}\sigma$$

利用：$\nabla\times(\varphi\vec{H}) = (\nabla\varphi)\times\vec{H} + \varphi\nabla\times\vec{H}$

$$W = \oint_S \vec{n}\cdot[\nabla\times(\varphi\vec{H})]\,\mathrm{d}\sigma - \oint_S \vec{n}\cdot(\varphi\nabla\times\vec{H})\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \underbrace{\nabla\cdot[\nabla\times(\varphi\vec{H})]}_{\text{旋度的散度为 }0}\,\mathrm{d}\tau - \oint_S \vec{n}\cdot(\varphi\underbrace{\nabla\times\vec{H}}_{\nabla\times\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{j}})\,\mathrm{d}\sigma$$

利用了稳定电流：$\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} = 0$

$$W = \boxed{-\oint_S \vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma = -\oint_S \vec{n}\cdot(\varphi\vec{j})\,\mathrm{d}\sigma}$$

曲面积分仅在与导线相交处不为 0，
利用在导线上 φ 为常数

$$= -(-\varphi_+ I - \varphi_- I)$$

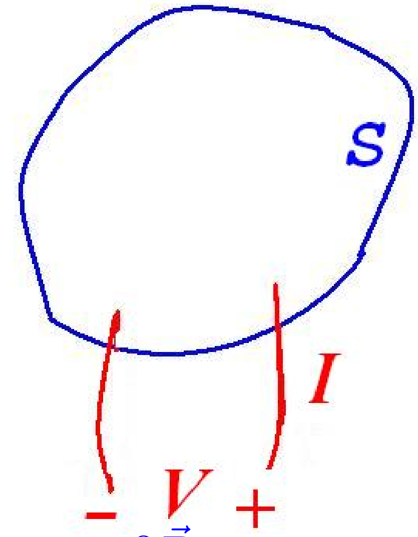
利用了 $\int \vec{n}\cdot\vec{j}\,\mathrm{d}\sigma = I$ 且正（负）极处电流流入（出）曲面

$$= I(\varphi_+ - \varphi_-) = IV$$

—— 从场的观点看,能量由闭合曲面流入线路

讨论：

1. 对缓变电流，如日常用的交流电，仍可近似认为：$\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0,\quad \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} = 0$，上述结论仍然成立。
2. 对辐射天线，电流变化快，$\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \neq 0,\quad \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \neq 0$，电源提供的能量除少量被线路耗散之外，大部分能量以电磁波形式被辐射出去。



Maxwell 方程：$\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{E} = -\nabla\varphi$

$$W = -\oint_S \vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma = \oint_S \vec{n}\cdot(\nabla\varphi\times\vec{H})\,\mathrm{d}\sigma$$

利用：$\nabla\times(\varphi\vec{H}) = (\nabla\varphi)\times\vec{H} + \varphi\nabla\times\vec{H}$

$$\begin{aligned} W &= \oint_S \vec{n}\cdot[\nabla\times(\varphi\vec{H})]\,\mathrm{d}\sigma - \oint_S \vec{n}\cdot(\varphi\nabla\times\vec{H})\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_{\mathcal{V}} \underbrace{\nabla\cdot[\nabla\times(\varphi\vec{H})]}_{\text{旋度的散度为 0}}\,\mathrm{d}\tau - \oint_S \vec{n}\cdot(\varphi\underbrace{\nabla\times\vec{H}}_{\nabla\times\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{j}})\,\mathrm{d}\sigma \end{aligned}$$

利用了稳定电流：$\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} = 0$

$$\begin{aligned} W &= \boxed{-\oint_S \vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma = -\oint_S \vec{n}\cdot(\varphi\vec{j})\,\mathrm{d}\sigma} \\ &= -(-\varphi_+ I - \varphi_- I) \\ &= I(\varphi_+ - \varphi_-) = IV \end{aligned}$$

曲面积分仅在与导线相交处不为 0，利用在导线上 φ 为常数

利用了 $\int \vec{n}\cdot\vec{j}\,\mathrm{d}\sigma = I$ 且正（负）极处电流流入（出）曲面

—— 从场的观点看,能量由闭合曲面流入线路

讨论：

1. 对缓变电流，如日常用的交流电，仍可近似认为：$\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$，$\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} = 0$，上述结论仍然成立。
2. 对辐射天线，电流变化快，$\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \neq 0$，$\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \neq 0$，电源提供的能量除少量被线路耗散之外，大部分能量以电磁波形式被辐射出去。

思考： 若闭合曲面 S' 包围了线路及电源区 $W = \oint_{S'} \vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma = ?$