§8.5 真空中电动力学基本方程的协变性

§8.5 真空中电动力学基本方程的协变性

把电动力学方程写成四维协变形式，方程每一项都是四维同阶张量

§8.5 真空中电动力学基本方程的协变性

把电动力学方程写成四维协变形式，方程每一项都是四维同阶张量

一、电动力学的基本方程

§8.5 真空中电动力学基本方程的协变性

把电动力学方程写成四维协变形式，方程每一项都是四维同阶张量

一、电动力学的基本方程

1. 电荷守恒 (连续性方程)

§ 8.5 真空中电动力学基本方程的协变性

把电动力学方程写成四维协变形式，方程每一项都是四维同阶张量

一、电动力学的基本方程

1. 电荷守恒 (连续性方程)

2. 达朗贝尔方程 (在引入矢势和标势并应用洛仑兹规范之后)

§ 8.5 真空中电动力学基本方程的协变性

把电动力学方程写成四维协变形式，方程每一项都是四维同阶张量

一、电动力学的基本方程

1. 电荷守恒 (连续性方程)

2. 达朗贝尔方程 (在引入矢势和标势并应用洛仑兹规范之后)

3. 麦克斯韦方程

§ 8.5 真空中电动力学基本方程的协变性

把电动力学方程写成四维协变形式，方程每一项都是四维同阶张量

一、电动力学的基本方程

1. 电荷守恒 (连续性方程)

2. 达朗贝尔方程 (在引入矢势和标势并应用洛仑兹规范之后)

3. 麦克斯韦方程

4. 洛仑兹力

§ 8.5 真空中电动力学基本方程的协变性

把电动力学方程写成四维协变形式，方程每一项都是四维同阶张量

一、电动力学的基本方程

1. 电荷守恒 (连续性方程)
2. 达朗贝尔方程 (在引入矢势和标势并应用洛仑兹规范之后)
3. 麦克斯韦方程
4. 洛仑兹力

二、四维电流密度矢量　电荷守恒定律的协变性

§ 8.5 真空中电动力学基本方程的协变性

把电动力学方程写成四维协变形式，方程每一项都是四维同阶张量

一、电动力学的基本方程

1. 电荷守恒 (连续性方程)
2. 达朗贝尔方程 (在引入矢势和标势并应用洛仑兹规范之后)
3. 麦克斯韦方程
4. 洛仑兹力

二、四维电流密度矢量　电荷守恒定律的协变性

实验表明，带电体的电荷总量与运动状态无关。故电量 Q 是标量。

§ 8.5 真空中电动力学基本方程的协变性

把电动力学方程写成四维协变形式，方程每一项都是四维同阶张量

一、电动力学的基本方程

1. 电荷守恒 (连续性方程)
2. 达朗贝尔方程 (在引入矢势和标势并应用洛仑兹规范之后)
3. 麦克斯韦方程
4. 洛仑兹力

二、四维电流密度矢量　电荷守恒定律的协变性

实验表明，带电体的电荷总量与运动状态无关。故电量 Q 是标量。

例如，电中性物体由带负电的电子与带正电的原子核构成，电子与核的运动速度显然不同，但不管物体是否运动，物体都能保持电中性。表明电荷总量与运动状态无关。

若带电体静止，$Q = \int \rho_0 \, \mathrm{d}\tau_0$，

Let there be light

若带电体静止，$Q = \int \rho_0 \, \mathrm{d}\tau_0$，若带电体以速度 u 运动，沿运动方向长度缩短，垂直运动方向线度不变：$\mathrm{d}\,\tau = \mathrm{d}\,\tau_0/\gamma_u$，电量不变，从而 $\rho = \gamma_u \rho_0$

若带电体静止，$Q = \int \rho_0 \, \mathrm{d}\tau_0$，若带电体以速度 u 运动，沿运动方向长度缩短，垂直运动方向线度不变：$\mathrm{d}\,\tau = \mathrm{d}\,\tau_0/\gamma_u$，电量不变，从而 $\rho = \gamma_u \rho_0$

带电体以速度 $\vec{\boldsymbol{u}}$ 运动，则三维空间的电流密度为 $\vec{\boldsymbol{j}} = \rho \vec{\boldsymbol{u}}$。

若带电体静止，$Q = \int \rho_0 \, \mathrm{d}\tau_0$，若带电体以速度 u 运动，沿运动方向长度缩短，垂直运动方向线度不变：$\mathrm{d}\,\tau = \mathrm{d}\,\tau_0/\gamma_u$，电量不变，从而 $\rho = \gamma_u \rho_0$

带电体以速度 $\vec{\boldsymbol{u}}$ 运动，则三维空间的电流密度为 $\vec{\boldsymbol{j}} = \rho \vec{\boldsymbol{u}}$。

现引入四维电流密度：$j_\mu = \rho_0 U_\mu$，由于静止电荷密度 ρ_0 是标量，U_μ 是四维速度矢量。因此四维电流密度 j_μ 是四维矢量。

若带电体静止，$Q = \int \rho_0 \, \mathrm{d}\tau_0$，若带电体以速度 u 运动，沿运动方向长度缩短，垂直运动方向线度不变：$\mathrm{d}\,\tau = \mathrm{d}\,\tau_0/\gamma_u$，电量不变，从而 $\rho = \gamma_u \rho_0$

带电体以速度 $\vec{\boldsymbol{u}}$ 运动，则三维空间的电流密度为 $\vec{\boldsymbol{j}} = \rho \vec{\boldsymbol{u}}$。

现引入四维电流密度：$j_\mu = \rho_0 U_\mu$，由于静止电荷密度 ρ_0 是标量，U_μ 是四维速度矢量。因此四维电流密度 j_μ 是四维矢量。

利用 $U_\mu = \gamma_u(\vec{\boldsymbol{u}}, ic)$，$\rho = \gamma_u \rho_0$ 及 $\vec{\boldsymbol{j}} = \rho \, \vec{\boldsymbol{u}} \quad \Longrightarrow \quad j_\mu = (\vec{\boldsymbol{j}}, ic\rho)$

若带电体静止，$Q=\displaystyle\int\rho_0\,\mathrm{d}\tau_0$，若带电体以速度 u 运动，沿运动方向长度缩短，垂直运动方向线度不变：$\mathrm{d}\,\tau=\mathrm{d}\,\tau_0/\gamma_u$，电量不变，从而 $\rho=\gamma_u\rho_0$

带电体以速度 $\vec{\boldsymbol{u}}$ 运动，则三维空间的电流密度为 $\vec{\boldsymbol{j}}=\rho\vec{\boldsymbol{u}}$。

现引入四维电流密度：$j_\mu=\rho_0 U_\mu$，由于静止电荷密度 ρ_0 是标量，U_μ 是四维速度矢量。因此四维电流密度 j_μ 是四维矢量。

利用 $U_\mu=\gamma_u(\vec{\boldsymbol{u}},ic)$，$\rho=\gamma_u\rho_0$ 及 $\vec{\boldsymbol{j}}=\rho\,\vec{\boldsymbol{u}}\quad\Longrightarrow\quad j_\mu=(\vec{\boldsymbol{j}},ic\rho)$

相对论中，时空统一为四维形式，在非相对论中两个不同的物理量 $\vec{\boldsymbol{j}}$, ρ 现统一为一个四维电流密度矢量 j_μ。

若带电体静止，$Q=\int \rho_0\,\mathrm{d}\tau_0$，若带电体以速度 u 运动，沿运动方向长度缩短，垂直运动方向线度不变：$\mathrm{d}\,\tau=\mathrm{d}\,\tau_0/\gamma_u$，电量不变，从而 $\rho=\gamma_u\rho_0$

带电体以速度 $\vec{\boldsymbol{u}}$ 运动，则三维空间的电流密度为 $\vec{\boldsymbol{j}}=\rho\vec{\boldsymbol{u}}$。

现引入四维电流密度：$j_\mu=\rho_0 U_\mu$，由于静止电荷密度 ρ_0 是标量，U_μ 是四维速度矢量。因此四维电流密度 j_μ 是四维矢量。

利用 $U_\mu=\gamma_u(\vec{\boldsymbol{u}},ic)$，$\rho=\gamma_u\rho_0$ 及 $\vec{\boldsymbol{j}}=\rho\,\vec{\boldsymbol{u}} \quad\Longrightarrow\quad j_\mu=(\vec{\boldsymbol{j}},ic\rho)$

相对论中，时空统一为四维形式，在非相对论中两个不同的物理量 $\vec{\boldsymbol{j}}$, ρ 现统一为一个四维电流密度矢量 j_μ。

j_μ 是四维矢量：$j'_\mu=a_{\mu\nu}j_\nu$

若带电体静止，$Q = \int \rho_0 \, \mathrm{d}\tau_0$，若带电体以速度 u 运动，沿运动方向长度缩短，垂直运动方向线度不变：$\mathrm{d}\,\tau = \mathrm{d}\,\tau_0/\gamma_u$，电量不变，从而 $\rho = \gamma_u \rho_0$

带电体以速度 $\vec{\boldsymbol{u}}$ 运动，则三维空间的电流密度为 $\vec{\boldsymbol{j}} = \rho \vec{\boldsymbol{u}}$。

现引入四维电流密度：$j_\mu = \rho_0 U_\mu$，由于静止电荷密度 ρ_0 是标量，U_μ 是四维速度矢量。因此四维电流密度 j_μ 是四维矢量。

利用 $U_\mu = \gamma_u(\vec{\boldsymbol{u}}, ic)$，$\rho = \gamma_u \rho_0$ 及 $\vec{\boldsymbol{j}} = \rho\, \vec{\boldsymbol{u}} \quad \Longrightarrow \quad j_\mu = (\vec{\boldsymbol{j}}, ic\rho)$

相对论中，时空统一为四维形式，在非相对论中两个不同的物理量 $\vec{\boldsymbol{j}}$，ρ 现统一为一个四维电流密度矢量 j_μ。

j_μ 是四维矢量：$j'_\mu = a_{\mu\nu} j_\nu$

电荷守恒定律：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{j}} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0$ 　　具有洛仑兹协变性。

若带电体静止，$Q = \int \rho_0 \, \mathrm{d}\tau_0$，若带电体以速度 u 运动，沿运动方向长度缩短，垂直运动方向线度不变：$\mathrm{d}\,\tau = \mathrm{d}\,\tau_0/\gamma_u$，电量不变，从而 $\rho = \gamma_u \rho_0$

带电体以速度 $\vec{\boldsymbol{u}}$ 运动，则三维空间的电流密度为 $\vec{\boldsymbol{j}} = \rho \vec{\boldsymbol{u}}$。

现引入四维电流密度：$j_\mu = \rho_0 U_\mu$，由于静止电荷密度 ρ_0 是标量，U_μ 是四维速度矢量。因此四维电流密度 j_μ 是四维矢量。

利用 $U_\mu = \gamma_u(\vec{\boldsymbol{u}}, ic)$，$\rho = \gamma_u \rho_0$ 及 $\vec{\boldsymbol{j}} = \rho\, \vec{\boldsymbol{u}} \quad \Longrightarrow \quad j_\mu = (\vec{\boldsymbol{j}}, ic\rho)$

相对论中，时空统一为四维形式，在非相对论中两个不同的物理量 $\vec{\boldsymbol{j}}$，ρ 现统一为一个四维电流密度矢量 j_μ。

j_μ 是四维矢量：$j'_\mu = a_{\mu\nu} j_\nu$

电荷守恒定律：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{j}} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0$ 具有洛仑兹协变性。

电荷守恒定律化为四维空间的零阶张量方程。

若带电体静止，$Q=\int\rho_0\,\mathrm{d}\tau_0$，若带电体以速度 u 运动，沿运动方向长度缩短，垂直运动方向线度不变：$\mathrm{d}\,\tau=\mathrm{d}\,\tau_0/\gamma_u$，电量不变，从而 $\rho=\gamma_u\rho_0$

带电体以速度 $\vec{u}$ 运动，则三维空间的电流密度为 $\vec{j}=\rho\vec{u}$。

现引入四维电流密度：$j_\mu=\rho_0 U_\mu$，由于静止电荷密度 ρ_0 是标量，U_μ 是四维速度矢量。因此四维电流密度 j_μ 是四维矢量。

利用 $U_\mu=\gamma_u(\vec{u},ic)$，$\rho=\gamma_u\rho_0$ 及 $\vec{j}=\rho\,\vec{u}\quad\Longrightarrow\quad j_\mu=(\vec{j},ic\rho)$

相对论中，时空统一为四维形式，在非相对论中两个不同的物理量 $\vec{j}$, ρ 现统一为一个四维电流密度矢量 j_μ。

j_μ 是四维矢量：$j'_\mu=a_{\mu\nu}j_\nu$

电荷守恒定律：$\nabla\cdot\vec{j}+\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0\quad\Longrightarrow\quad\dfrac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu}=0$ 　　具有洛仑兹协变性。

电荷守恒定律化为四维空间的零阶张量方程。

在洛仑兹变换下：

若带电体静止，$Q=\int\rho_0\,\mathrm{d}\tau_0$，若带电体以速度 u 运动，沿运动方向长度缩短，垂直运动方向线度不变：$\mathrm{d}\,\tau=\mathrm{d}\,\tau_0/\gamma_u$，电量不变，从而 $\rho=\gamma_u\rho_0$

带电体以速度 $\vec{\boldsymbol{u}}$ 运动，则三维空间的电流密度为 $\vec{\boldsymbol{j}}=\rho\vec{\boldsymbol{u}}$。

现引入四维电流密度：$j_\mu=\rho_0 U_\mu$，由于静止电荷密度 ρ_0 是标量，U_μ 是四维速度矢量。因此四维电流密度 j_μ 是四维矢量。

利用 $U_\mu=\gamma_u(\vec{\boldsymbol{u}},ic)$，$\rho=\gamma_u\rho_0$ 及 $\vec{\boldsymbol{j}}=\rho\,\vec{\boldsymbol{u}}\quad\Longrightarrow\quad j_\mu=(\vec{\boldsymbol{j}},ic\rho)$

相对论中，时空统一为四维形式，在非相对论中两个不同的物理量 $\vec{\boldsymbol{j}}$，ρ 现统一为一个四维电流密度矢量 j_μ。

j_μ 是四维矢量：$j'_\mu=a_{\mu\nu}j_\nu$

电荷守恒定律：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}+\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0\quad\Longrightarrow\quad\dfrac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu}=0$ 具有洛仑兹协变性。

电荷守恒定律化为四维空间的零阶张量方程。

在洛仑兹变换下：

$$\frac{\partial j'_\mu}{\partial x'_\mu}$$

若带电体静止，$Q=\int\rho_0\,\mathrm{d}\tau_0$，若带电体以速度 u 运动，沿运动方向长度缩短，垂直运动方向线度不变：$\mathrm{d}\,\tau=\mathrm{d}\,\tau_0/\gamma_u$，电量不变，从而 $\rho=\gamma_u\rho_0$

带电体以速度 $\vec{\boldsymbol{u}}$ 运动，则三维空间的电流密度为 $\vec{\boldsymbol{j}}=\rho\vec{\boldsymbol{u}}$。

现引入四维电流密度：$j_\mu=\rho_0 U_\mu$，由于静止电荷密度 ρ_0 是标量，U_μ 是四维速度矢量。因此四维电流密度 j_μ 是四维矢量。

利用 $U_\mu=\gamma_u(\vec{\boldsymbol{u}},ic)$，$\rho=\gamma_u\rho_0$ 及 $\vec{\boldsymbol{j}}=\rho\,\vec{\boldsymbol{u}} \quad\Longrightarrow\quad j_\mu=(\vec{\boldsymbol{j}},ic\rho)$

相对论中，时空统一为四维形式，在非相对论中两个不同的物理量 $\vec{\boldsymbol{j}}$，ρ 现统一为一个四维电流密度矢量 j_μ。

j_μ 是四维矢量：$j'_\mu=a_{\mu\nu}j_\nu$

电荷守恒定律：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}+\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0 \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu}=0$ 　　具有洛仑兹协变性。

电荷守恒定律化为四维空间的零阶张量方程。

在洛仑兹变换下：

$$\frac{\partial j'_\mu}{\partial x'_\mu}=a_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}a_{\mu\lambda}j_\lambda$$

若带电体静止，$Q = \int \rho_0 \, \mathrm{d}\tau_0$，若带电体以速度 u 运动，沿运动方向长度缩短，垂直运动方向线度不变：$\mathrm{d}\,\tau = \mathrm{d}\,\tau_0/\gamma_u$，电量不变，从而 $\rho = \gamma_u \rho_0$

带电体以速度 $\vec{\boldsymbol{u}}$ 运动，则三维空间的电流密度为 $\vec{\boldsymbol{j}} = \rho \vec{\boldsymbol{u}}$。

现引入四维电流密度：$j_\mu = \rho_0 U_\mu$，由于静止电荷密度 ρ_0 是标量，U_μ 是四维速度矢量。因此四维电流密度 j_μ 是四维矢量。

利用 $U_\mu = \gamma_u(\vec{\boldsymbol{u}}, ic)$，$\rho = \gamma_u \rho_0$ 及 $\vec{\boldsymbol{j}} = \rho \, \vec{\boldsymbol{u}} \quad \Longrightarrow \quad j_\mu = (\vec{\boldsymbol{j}}, ic\rho)$

相对论中，时空统一为四维形式，在非相对论中两个不同的物理量 $\vec{\boldsymbol{j}}$，ρ 现统一为一个四维电流密度矢量 j_μ。

j_μ 是四维矢量：$j'_\mu = a_{\mu\nu} j_\nu$

电荷守恒定律：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{j}} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0$ 　　具有洛仑兹协变性。

电荷守恒定律化为四维空间的零阶张量方程。

在洛仑兹变换下：

$$\frac{\partial j'_\mu}{\partial x'_\mu} = a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} a_{\mu\lambda} j_\lambda = a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\nu} j_\lambda$$

若带电体静止，$Q = \int \rho_0 \, \mathrm{d}\tau_0$，若带电体以速度 u 运动，沿运动方向长度缩短，垂直运动方向线度不变：$\mathrm{d}\,\tau = \mathrm{d}\,\tau_0/\gamma_u$，电量不变，从而 $\rho = \gamma_u \rho_0$

带电体以速度 $\vec{\boldsymbol{u}}$ 运动，则三维空间的电流密度为 $\vec{\boldsymbol{j}} = \rho \vec{\boldsymbol{u}}$。

现引入四维电流密度：$j_\mu = \rho_0 U_\mu$，由于静止电荷密度 ρ_0 是标量，U_μ 是四维速度矢量。因此四维电流密度 j_μ 是四维矢量。

利用 $U_\mu = \gamma_u(\vec{\boldsymbol{u}}, ic)$，$\rho = \gamma_u \rho_0$ 及 $\vec{\boldsymbol{j}} = \rho\, \vec{\boldsymbol{u}} \quad \Longrightarrow \quad j_\mu = (\vec{\boldsymbol{j}}, ic\rho)$

相对论中，时空统一为四维形式，在非相对论中两个不同的物理量 $\vec{\boldsymbol{j}}$，ρ 现统一为一个四维电流密度矢量 j_μ。

j_μ 是四维矢量：$j'_\mu = a_{\mu\nu} j_\nu$

电荷守恒定律：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{j}} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0$ 　　具有洛仑兹协变性。

电荷守恒定律化为四维空间的零阶张量方程。

在洛仑兹变换下：

$$\frac{\partial j'_\mu}{\partial x'_\mu} = a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} a_{\mu\lambda} j_\lambda = a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\nu} j_\lambda = \delta_{\nu\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\nu} j_\lambda$$

若带电体静止，$Q = \int \rho_0 \, \mathrm{d}\tau_0$，若带电体以速度 u 运动，沿运动方向长度缩短，垂直运动方向线度不变：$\mathrm{d}\,\tau = \mathrm{d}\,\tau_0/\gamma_u$，电量不变，从而 $\rho = \gamma_u \rho_0$

带电体以速度 $\vec{\boldsymbol{u}}$ 运动，则三维空间的电流密度为 $\vec{\boldsymbol{j}} = \rho \vec{\boldsymbol{u}}$。

现引入四维电流密度：$j_\mu = \rho_0 U_\mu$，由于静止电荷密度 ρ_0 是标量，U_μ 是四维速度矢量。因此四维电流密度 j_μ 是四维矢量。

利用 $U_\mu = \gamma_u(\vec{\boldsymbol{u}}, ic)$，$\rho = \gamma_u \rho_0$ 及 $\vec{\boldsymbol{j}} = \rho\, \vec{\boldsymbol{u}} \quad \Longrightarrow \quad j_\mu = (\vec{\boldsymbol{j}}, ic\rho)$

相对论中，时空统一为四维形式，在非相对论中两个不同的物理量 $\vec{\boldsymbol{j}}$，ρ 现统一为一个四维电流密度矢量 j_μ。

j_μ 是四维矢量：$j'_\mu = a_{\mu\nu} j_\nu$

电荷守恒定律：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{j}} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0$ 具有洛仑兹协变性。

电荷守恒定律化为四维空间的零阶张量方程。

在洛仑兹变换下：

$$\frac{\partial j'_\mu}{\partial x'_\mu} = a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} a_{\mu\lambda} j_\lambda = a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\nu} j_\lambda = \delta_{\nu\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\nu} j_\lambda = \frac{\partial j_\nu}{\partial x_\nu}$$

四维电荷密度矢量： $j_\mu = (\vec{\boldsymbol{j}}, ic\rho)$

电荷守恒定律的协变形式： $\dfrac{\partial j_\nu}{\partial x_\nu} = 0$ 四维标量方程

四维电荷密度矢量： $j_\mu = (\vec{\boldsymbol{j}}, ic\rho)$

电荷守恒定律的协变形式： $\dfrac{\partial j_\nu}{\partial x_\nu} = 0$ 四维标量方程

三、D'Alembert 方程的协变性

四维电荷密度矢量： $j_\mu = (\vec{\boldsymbol{j}}, ic\rho)$

电荷守恒定律的协变形式： $\dfrac{\partial j_\nu}{\partial x_\nu} = 0$ 四维标量方程

三、D'Alembert 方程的协变性

场可以通过势来描述，为简单起见，先讨论势方程的协变性。

四维电荷密度矢量：$j_\mu = (\vec{\boldsymbol{j}}, ic\rho)$

电荷守恒定律的协变形式：$\dfrac{\partial j_\nu}{\partial x_\nu} = 0$ 四维标量方程

三、D'Alembert 方程的协变性

场可以通过势来描述，为简单起见，先讨论势方程的协变性。

在洛仑兹规范下，电流密度 $\vec{\boldsymbol{j}}$ 激发矢势 $\vec{\boldsymbol{A}}$，电荷密度 ρ 激发标势 φ 。

四维电荷密度矢量： $j_\mu = (\vec{\boldsymbol{j}}, ic\rho)$

电荷守恒定律的协变形式： $\dfrac{\partial j_\nu}{\partial x_\nu} = 0$ 四维标量方程

三、D'Alembert 方程的协变性

场可以通过势来描述，为简单起见，先讨论势方程的协变性。

在洛仑兹规范下，电流密度 $\vec{\boldsymbol{j}}$ 激发矢势 $\vec{\boldsymbol{A}}$，电荷密度 ρ 激发标势 φ 。

$\vec{\boldsymbol{j}}$ 与 ρ 统一为四维电流密度矢量，故：$\vec{\boldsymbol{A}}$ 与 φ 也应能统一为一个四维矢量。

四维电荷密度矢量： $j_\mu = (\vec{\boldsymbol{j}}, ic\rho)$

电荷守恒定律的协变形式： $\dfrac{\partial j_\nu}{\partial x_\nu} = 0$ 四维标量方程

三、D'Alembert 方程的协变性

场可以通过势来描述，为简单起见，先讨论势方程的协变性。

在洛仑兹规范下，电流密度 $\vec{\boldsymbol{j}}$ 激发矢势 $\vec{\boldsymbol{A}}$，电荷密度 ρ 激发标势 φ 。
$\vec{\boldsymbol{j}}$ 与 ρ 统一为四维电流密度矢量，故：$\vec{\boldsymbol{A}}$ 与 φ 也应能统一为一个四维矢量。
若把 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 与 φ 统一为：$A_\mu = (\vec{\boldsymbol{A}}, \dfrac{i}{c}\varphi)$ 。

四维电荷密度矢量： $j_\mu = (\vec{\boldsymbol{j}}, ic\rho)$

电荷守恒定律的协变形式： $\dfrac{\partial j_\nu}{\partial x_\nu} = 0$ 四维标量方程

三、D'Alembert 方程的协变性

场可以通过势来描述，为简单起见，先讨论势方程的协变性。

在洛仑兹规范下，电流密度 $\vec{\boldsymbol{j}}$ 激发矢势 $\vec{\boldsymbol{A}}$，电荷密度 ρ 激发标势 φ 。
$\vec{\boldsymbol{j}}$ 与 ρ 统一为四维电流密度矢量，故：$\vec{\boldsymbol{A}}$ 与 φ 也应能统一为一个四维矢量。
若把 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 与 φ 统一为：$A_\mu = (\vec{\boldsymbol{A}}, \dfrac{i}{c}\varphi)$ 。 A_μ 是否为四维矢量?

四维电荷密度矢量： $j_\mu = (\vec{\boldsymbol{j}}, ic\rho)$

电荷守恒定律的协变形式： $\dfrac{\partial j_\nu}{\partial x_\nu} = 0$ 四维标量方程

三、D'Alembert 方程的协变性

场可以通过势来描述，为简单起见，先讨论势方程的协变性。

在洛仑兹规范下，电流密度 $\vec{\boldsymbol{j}}$ 激发矢势 $\vec{\boldsymbol{A}}$，电荷密度 ρ 激发标势 φ 。
$\vec{\boldsymbol{j}}$ 与 ρ 统一为四维电流密度矢量，故：$\vec{\boldsymbol{A}}$ 与 φ 也应能统一为一个四维矢量。
若把 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 与 φ 统一为：$A_\mu = (\vec{\boldsymbol{A}}, \frac{i}{c}\varphi)$ 。 A_μ 是否为四维矢量?

洛仑兹规范：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0$ 。

四维电荷密度矢量：$j_\mu = (\vec{j}, ic\rho)$

电荷守恒定律的协变形式：$\dfrac{\partial j_\nu}{\partial x_\nu} = 0$ 四维标量方程

三、D'Alembert 方程的协变性

场可以通过势来描述，为简单起见，先讨论势方程的协变性。

在洛仑兹规范下，电流密度 $\vec{j}$ 激发矢势 $\vec{A}$，电荷密度 ρ 激发标势 φ 。
$\vec{j}$ 与 ρ 统一为四维电流密度矢量，故：$\vec{A}$ 与 φ 也应能统一为一个四维矢量。
若把 $\vec{A}$ 与 φ 统一为：$A_\mu = (\vec{A}, \dfrac{i}{c}\varphi)$ 。 A_μ 是否为四维矢量?

洛仑兹规范：$\nabla \cdot \vec{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0$ 。

达朗贝尔方程：$\nabla^2 \vec{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}, \quad \nabla^2 \varphi - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\rho/\epsilon_0$

写成：$\Box A_\mu = -\mu_0 j_\mu,$ 其中 $\Box = \dfrac{\partial}{\partial x_\nu}\dfrac{\partial}{\partial x_\nu}$ 为一标量算符

洛仑兹规范： $\dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \qquad A_\mu = (\vec{\boldsymbol{A}},\ \dfrac{i}{c}\varphi)$

达朗贝尔方程： $\Box A_\mu = -\mu_0 j_\mu, \qquad \Box = \dfrac{\partial}{\partial x_\nu}\dfrac{\partial}{\partial x_\nu}$

洛仑兹规范： $\dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}=0 \qquad A_\mu=(\vec{\boldsymbol{A}},\ \dfrac{i}{c}\varphi)$

达朗贝尔方程： $\Box A_\mu=-\mu_0 j_\mu, \qquad \Box=\dfrac{\partial}{\partial x_\nu}\dfrac{\partial}{\partial x_\nu}$

显然洛仑兹规范与达朗贝尔方程对惯性系的变换都应该是洛仑兹协变的

洛仑兹规范： $\dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \qquad A_\mu = (\vec{\boldsymbol{A}}, \dfrac{i}{c}\varphi)$

达朗贝尔方程： $\Box A_\mu = -\mu_0 j_\mu, \qquad \Box = \dfrac{\partial}{\partial x_\nu}\dfrac{\partial}{\partial x_\nu}$

显然洛仑兹规范与达朗贝尔方程对惯性系的变换都应该是洛仑兹协变的

因此，A_μ 应该是四维矢量，构成四维矢势。

洛仑兹规范： $\dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \qquad A_\mu = (\vec{\boldsymbol{A}}, \dfrac{i}{c}\varphi)$

达朗贝尔方程： $\Box A_\mu = -\mu_0 j_\mu, \qquad \Box = \dfrac{\partial}{\partial x_\nu}\dfrac{\partial}{\partial x_\nu}$

显然洛仑兹规范与达朗贝尔方程对惯性系的变换都应该是洛仑兹协变的

因此，A_μ 应该是四维矢量，构成四维矢势。

四维矢势 A_μ 在惯性系变换下按如下形式变换：

$$A'_\mu = a_{\mu\nu} A_\nu, \quad a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

洛仑兹规范： $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \qquad A_\mu = (\vec{\boldsymbol{A}}, \frac{i}{c}\varphi)$

达朗贝尔方程： $\Box A_\mu = -\mu_0 j_\mu, \qquad \Box = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}$

显然洛仑兹规范与达朗贝尔方程对惯性系的变换都应该是洛仑兹协变的

因此，A_μ 应该是四维矢量，构成四维矢势。

四维矢势 A_μ 在惯性系变换下按如下形式变换：

$$A'_\mu = a_{\mu\nu} A_\nu, \quad a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A'_x &= \gamma(A_x - \frac{v}{c^2}\varphi) \\ A'_y &= A_y \\ A'_z &= A_z \\ \varphi' &= \gamma(\varphi - vA_x) \end{aligned}$$

洛仑兹规范： $\dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \qquad A_\mu = (\vec{\boldsymbol{A}}, \dfrac{i}{c}\varphi)$

达朗贝尔方程： $\Box A_\mu = -\mu_0 j_\mu, \qquad \Box = \dfrac{\partial}{\partial x_\nu}\dfrac{\partial}{\partial x_\nu}$

显然洛仑兹规范与达朗贝尔方程对惯性系的变换都应该是洛仑兹协变的

因此，A_μ 应该是四维矢量，构成四维矢势。

四维矢势 A_μ 在惯性系变换下按如下形式变换：

$$A'_\mu = a_{\mu\nu} A_\nu, \quad a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A'_x &= \gamma(A_x - \frac{v}{c^2}\varphi) \\ A'_y &= A_y \\ A'_z &= A_z \\ \varphi' &= \gamma(\varphi - vA_x) \end{aligned}$$

比较

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \end{aligned}$$

四、电磁场张量 Maxwell 方程的协变性

四、电磁场张量 Maxwell 方程的协变性

求得矢势 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 和标势 φ 后，电磁场 $\vec{\boldsymbol{B}}$，$\vec{\boldsymbol{E}}$ 表示为：

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}, \qquad \vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}$$

四、电磁场张量 Maxwell 方程的协变性

求得矢势 $\vec{A}$ 和标势 φ 后，电磁场 $\vec{B}$，$\vec{E}$ 表示为：

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \qquad \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

矢势 $\vec{A}$ 和标势 φ 构成四维四维矢量 A_μ。电磁场如何写成四维张量形式？

四、电磁场张量　Maxwell 方程的协变性

求得矢势 $\vec{A}$ 和标势 φ 后，电磁场 $\vec{B}$，$\vec{E}$ 表示为：

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \qquad \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

矢势 $\vec{A}$ 和标势 φ 构成四维四维矢量 A_μ。电磁场如何写成四维张量形式？

分量形式：

四、电磁场张量 Maxwell 方程的协变性

求得矢势 $\vec{A}$ 和标势 φ 后，电磁场 $\vec{B}$，$\vec{E}$ 表示为：

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \qquad \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

矢势 $\vec{A}$ 和标势 φ 构成四维四维矢量 A_μ。电磁场如何写成四维张量形式？

$$B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \qquad E_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial t} = ic\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4}\right)$$

分量形式：

四、电磁场张量 Maxwell 方程的协变性

求得矢势 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 和标势 φ 后，电磁场 $\vec{\boldsymbol{B}}$，$\vec{\boldsymbol{E}}$ 表示为：

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}, \qquad \vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}$$

矢势 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 和标势 φ 构成四维四维矢量 A_μ。电磁场如何写成四维张量形式？

分量形式：

$$B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \qquad E_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial t} = ic\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4}\right)$$

$$B_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \qquad E_2 = ic\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4}\right)$$

四、电磁场张量 Maxwell 方程的协变性

求得矢势 $\vec{A}$ 和标势 φ 后，电磁场 $\vec{B}$，$\vec{E}$ 表示为：

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \qquad \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

矢势 $\vec{A}$ 和标势 φ 构成四维四维矢量 A_μ。电磁场如何写成四维张量形式？

分量形式：

$$B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \qquad E_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial t} = ic\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4}\right)$$

$$B_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \qquad E_2 = ic\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4}\right)$$

$$B_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \qquad E_3 = ic\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4}\right)$$

四、电磁场张量 Maxwell 方程的协变性

求得矢势 $\vec{A}$ 和标势 φ 后，电磁场 $\vec{B}$，$\vec{E}$ 表示为：

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \qquad \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

矢势 $\vec{A}$ 和标势 φ 构成四维四维矢量 A_μ。电磁场如何写成四维张量形式？

分量形式：

$$B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \qquad E_1 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial t} = ic\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4}\right)$$

$$B_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \qquad E_2 = ic\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4}\right)$$

$$B_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \qquad E_3 = ic\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4}\right)$$

引入 $F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$

前已证明若 A_μ 为四维矢量

则 $F_{\mu\nu}$ 为四维二阶张量

四、电磁场张量 Maxwell 方程的协变性

求得矢势 $\vec{A}$ 和标势 φ 后，电磁场 $\vec{B}$，$\vec{E}$ 表示为：

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \qquad \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

矢势 $\vec{A}$ 和标势 φ 构成四维四维矢量 A_μ。电磁场如何写成四维张量形式？

分量形式：

$$B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \qquad E_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial t} = ic\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4}\right)$$

$$B_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \qquad E_2 = ic\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4}\right)$$

$$B_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \qquad E_3 = ic\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4}\right)$$

引入 $F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$

前已证明若 A_μ 为四维矢量

则 $F_{\mu\nu}$ 为四维二阶张量

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{i}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c}E_3 \\ \frac{i}{c}E_1 & \frac{i}{c}E_2 & \frac{i}{c}E_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12}), \quad \frac{i}{c}\vec{\boldsymbol{E}} = (F_{41},\ F_{42},\ F_{43})$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12}), \quad \frac{i}{c}\vec{\boldsymbol{E}} = (F_{41},\ F_{42},\ F_{43})$$

引入电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 后,下一步即是将 Maxwell 方程写成张量形式。

$$\vec{\boldsymbol{B}} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12}), \quad \frac{i}{c}\vec{\boldsymbol{E}} = (F_{41},\ F_{42},\ F_{43})$$

引入电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 后,下一步即是将 Maxwell 方程写成张量形式。

Maxwell 方程

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = \rho/\epsilon_0 \\
&\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \\
&\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0 \\
&\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \vec{\boldsymbol{j}} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}
\end{aligned}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}=(F_{23},\ F_{31},\ F_{12}),\qquad \frac{i}{c}\vec{\boldsymbol{E}}=(F_{41},\ F_{42},\ F_{43})$$

引入电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 后,下一步即是将 Maxwell 方程写成张量形式。

Maxwell 方程

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}=\rho/\epsilon_0$$
$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}=-\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}$$
$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0$$
$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}=\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$$

先看四维矢量：$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12}), \quad \frac{i}{c}\vec{\boldsymbol{E}} = (F_{41},\ F_{42},\ F_{43})$$

引入电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 后,下一步即是将 Maxwell 方程写成张量形式。

Maxwell 方程

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}} &= \rho/\epsilon_0 \\
\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} &= -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} &= 0 \\
\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}} &= \mu_0 \vec{\boldsymbol{j}} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}
\end{aligned}$$

先看四维矢量：$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}$ 注意对重复下标求和

$$\vec{\boldsymbol{B}} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12}), \quad \frac{i}{c}\vec{\boldsymbol{E}} = (F_{41},\ F_{42},\ F_{43})$$

引入电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 后,下一步即是将 Maxwell 方程写成张量形式。

Maxwell 方程

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}} &= \rho/\epsilon_0 \\
\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}} &= -\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \\
\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}} &= 0 \\
\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}} &= \mu_0\vec{\boldsymbol{j}} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}
\end{aligned}$$

先看四维矢量：$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}$ 注意对重复下标求和

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12}), \quad \frac{i}{c}\vec{\boldsymbol{E}} = (F_{41},\ F_{42},\ F_{43})$$

引入电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 后,下一步即是将 Maxwell 方程写成张量形式。

Maxwell 方程

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = \rho/\epsilon_0$$

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$$

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \vec{\boldsymbol{j}} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$$

先看四维矢量：$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}$　　注意对重复下标求和

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

由洛仑兹规范：$\dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} = 0$

$$\vec{B} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12}), \quad \frac{i}{c}\vec{E} = (F_{41},\ F_{42},\ F_{43})$$

引入电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 后,下一步即是将 Maxwell 方程写成张量形式。

Maxwell 方程

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$$
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

先看四维矢量：$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}$　　注意对重复下标求和

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

由洛仑兹规范：$\dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} = 0$

由达朗贝尔方程：$\Box A_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x_\nu}\dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = -\mu_0 j_\mu$

$$\vec{B} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12}), \quad \frac{i}{c}\vec{E} = (F_{41},\ F_{42},\ F_{43})$$

引入电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 后,下一步即是将 Maxwell 方程写成张量形式。

Maxwell 方程
$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$$
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

先看四维矢量：$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}$　　注意对重复下标求和

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$
$$= \mu_0 j_\mu$$

由洛仑兹规范：$\dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} = 0$

由达朗贝尔方程：$\Box A_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x_\nu}\dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = -\mu_0 j_\mu$

$$\vec{B} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12}), \quad \frac{i}{c}\vec{E} = (F_{41},\ F_{42},\ F_{43})$$

引入电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 后,下一步即是将 Maxwell 方程写成张量形式。

Maxwell 方程

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

先看四维矢量：$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}$ 　注意对重复下标求和

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

由洛仑兹规范：$\dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} = 0$

由达朗贝尔方程：$\Box A_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x_\nu}\dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = -\mu_0 j_\mu$

$$= \mu_0 j_\mu$$

$$\boxed{\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu}$$

具有协变性的一阶张量方程

Let there be light

$$\vec{\boldsymbol{B}} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12}), \quad \frac{i}{c}\vec{\boldsymbol{E}} = (F_{41},\ F_{42},\ F_{43}), \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \tag{1}$$

二阶张量：$F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ 满足一阶张量协变方程：$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu$ (2)

$$\vec{\boldsymbol{B}}=(F_{23},\ F_{31},\ F_{12}),\quad \frac{i}{c}\vec{\boldsymbol{E}}=(F_{41},\ F_{42},\ F_{43}),\quad F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu} \tag{1}$$

二阶张量：$F_{\mu\nu}=\dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ 满足一阶张量协变方程：$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\mu_0 j_\mu$ (2)

把协变方程 (2) 写成分量形式。

$$\vec{B} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12}), \quad \frac{i}{c}\vec{E} = (F_{41},\ F_{42},\ F_{43}), \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \tag{1}$$

二阶张量：$F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ 满足一阶张量协变方程：$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu$ (2)

把协变方程 (2) 写成分量形式。 先看 (2) 的 1st 分量 ($\mu = 1$)

$$\vec{B} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12}), \quad \frac{i}{c}\vec{E} = (F_{41},\ F_{42},\ F_{43}), \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \tag{1}$$

二阶张量：$F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$　　满足一阶张量协变方程：$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu$　(2)

把协变方程 (2) 写成分量形式。　　先看 (2) 的 1st 分量 ($\mu = 1$)

左边

$$\vec{B} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12}), \quad \frac{i}{c}\vec{E} = (F_{41},\ F_{42},\ F_{43}), \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \tag{1}$$

二阶张量：$F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$　　满足一阶张量协变方程：$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu$　　(2)

把协变方程 (2) 写成分量形式。　　先看 (2) 的 1st 分量 ($\mu = 1$)

$$左边\ = \frac{\partial F_{1v}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_4}$$

$$\vec{B} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12}), \quad \frac{i}{c}\vec{E} = (F_{41},\ F_{42},\ F_{43}), \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \tag{1}$$

二阶张量：$F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ 满足一阶张量协变方程：$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu$ (2)

把协变方程 (2) 写成分量形式。 先看 (2) 的 1st 分量 ($\mu = 1$)

左边 $= \dfrac{\partial F_{1v}}{\partial x_\nu} = \dfrac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E_1}{\partial t}$ 利用了 (1) 式

$$\vec{\boldsymbol{B}} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12}),\quad \frac{i}{c}\vec{\boldsymbol{E}} = (F_{41},\ F_{42},\ F_{43}),\quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \qquad (1)$$

二阶张量：$F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ 满足一阶张量协变方程：$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu$ (2)

把协变方程 (2) 写成分量形式。 先看 (2) 的 1st 分量 $(\mu = 1)$

左边 $= \dfrac{\partial F_{1v}}{\partial x_\nu} = \dfrac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E_1}{\partial t}$ 利用了 (1) 式

右边

$$\vec{\boldsymbol{B}} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12}), \quad \frac{i}{c}\vec{\boldsymbol{E}} = (F_{41},\ F_{42},\ F_{43}), \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \tag{1}$$

二阶张量：$F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$　　满足一阶张量协变方程：$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu$　　(2)

把协变方程 (2) 写成分量形式。　　先看 (2) 的 1st 分量 $(\mu = 1)$

左边 $= \dfrac{\partial F_{1v}}{\partial x_\nu} = \dfrac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E_1}{\partial t}$　　利用了 (1) 式

右边 $= \mu_0 j_1 = \mu_0 j_x = \mu_0 \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_x$

$$\vec{B} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12}), \quad \frac{i}{c}\vec{E} = (F_{41},\ F_{42},\ F_{43}), \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \tag{1}$$

二阶张量：$F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ 满足一阶张量协变方程：$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu$ (2)

把协变方程 (2) 写成分量形式。 先看 (2) 的 1st 分量 ($\mu = 1$)

左边 $= \dfrac{\partial F_{1v}}{\partial x_\nu} = \dfrac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E_1}{\partial t}$ 利用了 (1) 式

右边 $= \mu_0 j_1 = \mu_0 j_x = \mu_0 \vec{j} \cdot \hat{e}_x$ 故：

$$\vec{\boldsymbol{B}} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12}), \quad \frac{i}{c}\vec{\boldsymbol{E}} = (F_{41},\ F_{42},\ F_{43}), \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \tag{1}$$

二阶张量：$F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ 满足一阶张量协变方程：$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu$ (2)

把协变方程 (2) 写成分量形式。 先看 (2) 的 1st 分量 ($\mu = 1$)

左边 $= \dfrac{\partial F_{1v}}{\partial x_\nu} = \dfrac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E_1}{\partial t}$ 利用了 (1) 式

右边 $= \mu_0 j_1 = \mu_0 j_x = \mu_0 \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_x$ 故：

(2) 的 1st 分量：$(\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_x = \left(\mu_0 \vec{\boldsymbol{j}} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_x$

$$\vec{B} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12}), \quad \frac{i}{c}\vec{E} = (F_{41},\ F_{42},\ F_{43}), \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \tag{1}$$

二阶张量：$F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ 满足一阶张量协变方程：$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu$ (2)

把协变方程 (2) 写成分量形式。 先看 (2) 的 1st 分量 ($\mu = 1$)

左边 $= \dfrac{\partial F_{1v}}{\partial x_\nu} = \dfrac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E_1}{\partial t}$ 利用了 (1) 式

右边 $= \mu_0 j_1 = \mu_0 j_x = \mu_0 \vec{j} \cdot \hat{e}_x$ 故：

(2) 的 1st 分量：$(\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{e}_x = \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot \hat{e}_x$ 同理 $\mu = 2,\ 3$ 得

$$\vec{B} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12}), \quad \frac{i}{c}\vec{E} = (F_{41},\ F_{42},\ F_{43}), \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \qquad (1)$$

二阶张量：$F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$　　满足一阶张量协变方程：$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu$ (2)

把协变方程 (2) 写成分量形式。　　先看 (2) 的 1st 分量 ($\mu = 1$)

$$\text{左边} = \frac{\partial F_{1v}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_1}{\partial t}$$

利用了 (1) 式

$$\text{右边} = \mu_0 j_1 = \mu_0 j_x = \mu_0 \vec{j} \cdot \hat{e}_x$$

故：

(2) 的 1st 分量：$(\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{e}_x = \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot \hat{e}_x$　　同理 $\mu = 2，3$ 得

(2) 的 2nd 分量：$(\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{e}_y = \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot \hat{e}_y$

$$\vec{B} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12}), \quad \frac{i}{c}\vec{E} = (F_{41},\ F_{42},\ F_{43}), \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \tag{1}$$

二阶张量：$F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ 满足一阶张量协变方程：$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu$ (2)

把协变方程 (2) 写成分量形式。 先看 (2) 的 1st 分量 ($\mu = 1$)

$$\text{左边} = \frac{\partial F_{1v}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_1}{\partial t}$$
利用了 (1) 式

$$\text{右边} = \mu_0 j_1 = \mu_0 j_x = \mu_0 \vec{j} \cdot \hat{e}_x$$
故：

(2) 的 1st 分量：$(\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{e}_x = \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0\epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot \hat{e}_x$ 同理 $\mu = 2,\ 3$ 得

(2) 的 2nd 分量：$(\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{e}_y = \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0\epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot \hat{e}_y$

(2) 的 3rd 分量：$(\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{e}_z = \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0\epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot \hat{e}_z$

$$\vec{B} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12}), \quad \frac{i}{c}\vec{E} = (F_{41},\ F_{42},\ F_{43}), \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \tag{1}$$

二阶张量：$F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$　　满足一阶张量协变方程：$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu$　(2)

把协变方程 (2) 写成分量形式。　　先看 (2) 的 1st 分量 ($\mu = 1$)

左边 $= \dfrac{\partial F_{1v}}{\partial x_\nu} = \dfrac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E_1}{\partial t}$　　利用了 (1) 式

右边 $= \mu_0 j_1 = \mu_0 j_x = \mu_0 \vec{j} \cdot \hat{e}_x$　　故：

(2) 的 1st 分量：$(\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{e}_x = \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0\epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot \hat{e}_x$　　同理 $\mu = 2,\ 3$ 得

(2) 的 2nd 分量：$(\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{e}_y = \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0\epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot \hat{e}_y$

(2) 的 3rd 分量：$(\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{e}_z = \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0\epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot \hat{e}_z$　　(2) 式当 $\mu = 4$ 时

$$\vec{\boldsymbol{B}} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12}), \quad \frac{i}{c}\vec{\boldsymbol{E}} = (F_{41},\ F_{42},\ F_{43}), \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \qquad (1)$$

二阶张量：$F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ 满足一阶张量协变方程：$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu$ (2)

把协变方程 (2) 写成分量形式。 先看 (2) 的 1st 分量 ($\mu = 1$)

左边 $= \dfrac{\partial F_{1v}}{\partial x_\nu} = \dfrac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E_1}{\partial t}$ 利用了 (1) 式

右边 $= \mu_0 j_1 = \mu_0 j_x = \mu_0 \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_x$ 故：

(2) 的 1st 分量：$(\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_x = \left(\mu_0 \vec{\boldsymbol{j}} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_x$ 同理 $\mu = 2$，3 得

(2) 的 2nd 分量：$(\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_y = \left(\mu_0 \vec{\boldsymbol{j}} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_y$

(2) 的 3rd 分量：$(\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z = \left(\mu_0 \vec{\boldsymbol{j}} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z$ (2) 式当 $\mu = 4$ 时

左边 $= \dfrac{\partial F_{4v}}{\partial x_\nu} = \dfrac{\partial F_{41}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_{42}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_{43}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial F_{44}}{\partial x_4} = \dfrac{i}{c}\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z}\right) = \dfrac{i}{c}\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}}$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12}), \quad \frac{i}{c}\vec{\boldsymbol{E}} = (F_{41},\ F_{42},\ F_{43}), \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \tag{1}$$

二阶张量：$F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ 满足一阶张量协变方程：$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu$ (2)

把协变方程 (2) 写成分量形式。 先看 (2) 的 1st 分量 ($\mu = 1$)

左边 $= \dfrac{\partial F_{1v}}{\partial x_\nu} = \dfrac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E_1}{\partial t}$ 利用了 (1) 式

右边 $= \mu_0 j_1 = \mu_0 j_x = \mu_0 \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_x$ 故：

(2) 的 1st 分量：$(\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_x = \left(\mu_0 \vec{\boldsymbol{j}} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_x$ 同理 $\mu = 2,\ 3$ 得

(2) 的 2nd 分量：$(\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_y = \left(\mu_0 \vec{\boldsymbol{j}} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_y$

(2) 的 3rd 分量：$(\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z = \left(\mu_0 \vec{\boldsymbol{j}} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z$ (2) 式当 $\mu = 4$ 时

左边 $= \dfrac{\partial F_{4v}}{\partial x_\nu} = \dfrac{\partial F_{41}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_{42}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_{43}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial F_{44}}{\partial x_4} = \dfrac{i}{c}\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z}\right) = \dfrac{i}{c}\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}}$

右边 $= \mu_0 j_4 = \mu_0 i c \rho = \dfrac{i}{c}\rho/\epsilon_0$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12}),\quad \frac{i}{c}\vec{\boldsymbol{E}} = (F_{41},\ F_{42},\ F_{43}),\quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \tag{1}$$

二阶张量：$F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$　　满足一阶张量协变方程：$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu$　　(2)

把协变方程 (2) 写成分量形式。　　先看 (2) 的 1st 分量 ($\mu = 1$)

左边 $= \dfrac{\partial F_{1v}}{\partial x_\nu} = \dfrac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E_1}{\partial t}$　　利用了 (1) 式

右边 $= \mu_0 j_1 = \mu_0 j_x = \mu_0 \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_x$　　故：

(2) 的 1st 分量：$(\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_x = \left(\mu_0 \vec{\boldsymbol{j}} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_x$　　同理 $\mu = 2,\ 3$ 得

(2) 的 2nd 分量：$(\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_y = \left(\mu_0 \vec{\boldsymbol{j}} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_y$

(2) 的 3rd 分量：$(\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z = \left(\mu_0 \vec{\boldsymbol{j}} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z$　　(2) 式当 $\mu = 4$ 时

左边 $= \dfrac{\partial F_{4v}}{\partial x_\nu} = \dfrac{\partial F_{41}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_{42}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_{43}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial F_{44}}{\partial x_4} = \dfrac{i}{c}\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z}\right) = \dfrac{i}{c}\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}}$

右边 $= \mu_0 j_4 = \mu_0 i c \rho = \dfrac{i}{c}\rho/\epsilon_0$

(2) 的 4th 分量：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = \rho/\epsilon_0$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12}), \quad \frac{i}{c}\vec{\boldsymbol{E}} = (F_{41},\ F_{42},\ F_{43}), \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \tag{1}$$

二阶张量：$F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ 满足一阶张量协变方程：$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu$ (2)

把协变方程 (2) 写成分量形式。 先看 (2) 的 1st 分量 ($\mu = 1$)

左边 $= \dfrac{\partial F_{1v}}{\partial x_\nu} = \dfrac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E_1}{\partial t}$ 利用了 (1) 式

右边 $= \mu_0 j_1 = \mu_0 j_x = \mu_0 \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_x$ 故：

(2) 的 1st 分量：$(\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_x = \left(\mu_0 \vec{\boldsymbol{j}} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_x$ 同理 $\mu = 2,\ 3$ 得

(2) 的 2nd 分量：$(\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_y = \left(\mu_0 \vec{\boldsymbol{j}} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_y$

(2) 的 3rd 分量：$(\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z = \left(\mu_0 \vec{\boldsymbol{j}} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z$ (2) 式当 $\mu = 4$ 时

左边 $= \dfrac{\partial F_{4v}}{\partial x_\nu} = \dfrac{\partial F_{41}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_{42}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_{43}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial F_{44}}{\partial x_4} = \dfrac{i}{c}\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \dfrac{i}{c} \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}}$

右边 $= \mu_0 j_4 = \mu_0 i c \rho = \dfrac{i}{c} \rho / \epsilon_0$

(2) 的 4th 分量：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = \rho / \epsilon_0$

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \vec{\boldsymbol{j}} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = \rho / \epsilon_0 \end{cases}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}=(F_{23},\ F_{31},\ F_{12}),\quad \frac{i}{c}\vec{\boldsymbol{E}}=(F_{41},\ F_{42},\ F_{43}),\quad F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu} \tag{1}$$

二阶张量：$F_{\mu\nu}=\dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$　　满足一阶张量协变方程：$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\mu_0 j_\mu$　　(2)

把协变方程 (2) 写成分量形式。　　先看 (2) 的 1st 分量 ($\mu=1$)

左边 $=\dfrac{\partial F_{1v}}{\partial x_\nu}=\dfrac{\partial F_{11}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial F_{12}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial F_{13}}{\partial x_3}+\dfrac{\partial F_{14}}{\partial x_4}=\dfrac{\partial B_z}{\partial y}-\dfrac{\partial B_y}{\partial z}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E_1}{\partial t}$　　利用了 (1) 式

右边 $=\mu_0 j_1=\mu_0 j_x=\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_x$　　故：

(2) 的 1st 分量：$(\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}})\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_x=\left(\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}+\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_x$　　同理 $\mu=2,\ 3$ 得

(2) 的 2nd 分量：$(\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}})\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_y=\left(\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}+\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_y$

(2) 的 3rd 分量：$(\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}})\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z=\left(\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}+\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z$　　(2) 式当 $\mu=4$ 时

左边 $=\dfrac{\partial F_{4v}}{\partial x_\nu}=\dfrac{\partial F_{41}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial F_{42}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial F_{43}}{\partial x_3}+\dfrac{\partial F_{44}}{\partial x_4}=\dfrac{i}{c}\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial x}+\dfrac{\partial E_y}{\partial y}+\dfrac{\partial E_z}{\partial z}\right)=\dfrac{i}{c}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}$

右边 $=\mu_0 j_4=\mu_0 ic\rho=\dfrac{i}{c}\rho/\epsilon_0$

(2) 的 4th 分量：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}=\rho/\epsilon_0$

$$\left\{\begin{aligned}\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}&=\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}&=\rho/\epsilon_0\end{aligned}\right.\quad\xRightarrow{\text{协变形式}}\quad\boxed{\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\mu_0 j_\mu}$$

再看四维三阶张量：$X_{\mu\nu\lambda}=\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}+\dfrac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}+\dfrac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}$

再看四维三阶张量：$X_{\mu\nu\lambda} = \dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \dfrac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \dfrac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}$

把 $F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ 代入得：

再看四维三阶张量：$X_{\mu\nu\lambda} = \dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \dfrac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \dfrac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}$

把 $F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ 代入得：

$$X_{\mu\nu\lambda} = \underbrace{\frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} - \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\lambda \partial x_\nu}}_{\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}} + \underbrace{\frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\mu \partial x_\lambda}}_{\dfrac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}} + \underbrace{\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\lambda} - \frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x_\nu \partial x_\mu}}_{\dfrac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}} = 0$$

再看四维三阶张量：$X_{\mu\nu\lambda} = \dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \dfrac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \dfrac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}$

把 $F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ 代入得：

$$X_{\mu\nu\lambda} = \underbrace{\frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} - \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\lambda \partial x_\nu}}_{\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}} + \underbrace{\frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\mu \partial x_\lambda}}_{\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}} + \underbrace{\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\lambda} - \frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x_\nu \partial x_\mu}}_{\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}} = 0$$

$$\boxed{X_{\mu\nu\lambda} = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0}$$

一个具有协变性的三阶张量方程

再看四维三阶张量：$X_{\mu\nu\lambda}=\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}+\dfrac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}+\dfrac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}$

把 $F_{\mu\nu}=\dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ 代入得：

$$X_{\mu\nu\lambda}=\underbrace{\frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}-\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\lambda \partial x_\nu}}_{\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}}+\underbrace{\frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x_\mu \partial x_\nu}-\frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\mu \partial x_\lambda}}_{\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}}+\underbrace{\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\lambda}-\frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x_\nu \partial x_\mu}}_{\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}}=0$$

$$\boxed{X_{\mu\nu\lambda}=\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}=0}$$

一个具有协变性的三阶张量方程

$X_{\mu\nu\lambda}=0$ 共有 $4^3=64$ 个分量，μ，ν，$\lambda=1,2,3,4$，因此有 64 个方程

可以证明：若 $X_{\mu\nu\lambda}$ 的三个下标中任意两个或三个相等，则 $X_{\mu\nu\lambda}$ 恒为零，不给出物理方程

再看四维三阶张量：$X_{\mu\nu\lambda}=\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}+\dfrac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}+\dfrac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}$

把 $F_{\mu\nu}=\dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ 代入得：

$$X_{\mu\nu\lambda}=\underbrace{\frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\lambda\partial x_\mu}-\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\lambda\partial x_\nu}}_{\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}}+\underbrace{\frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x_\mu\partial x_\nu}-\frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\mu\partial x_\lambda}}_{\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}}+\underbrace{\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu\partial x_\lambda}-\frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x_\nu\partial x_\mu}}_{\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}}=0$$

$$\boxed{X_{\mu\nu\lambda}=\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}=0}$$

一个具有协变性的三阶张量方程

$X_{\mu\nu\lambda}=0$ 共有 $4^3=64$ 个分量，μ，ν，$\lambda=1,2,3,4$，因此有 64 个方程

可以证明：若 $X_{\mu\nu\lambda}$ 的三个下标中任意两个或三个相等，则 $X_{\mu\nu\lambda}$ 恒为零，不给出物理方程

例如，当 $\mu=\nu$ 时：$X_{\mu\nu\lambda}=X_{\nu\nu\lambda}\Big|_{\text{不同颜色的 }\nu\text{ 表示此处不对 }\nu\text{ 求和}}=\dfrac{\partial F_{\nu\nu}}{\partial x_\lambda}+\dfrac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\nu}+\dfrac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x_\nu}=0$

利用了 $F_{\nu\nu}=0$，$F_{\nu\lambda}=-F_{\lambda\nu}$

因此 $X_{\mu\nu\lambda} = 0$ 包含的 64 个方程中只有 $3!\,C_4^3 = 24$ 个方程不是数学恒等式

因此 $X_{\mu\nu\lambda} = 0$ 包含的 64 个方程中只有 $3!\,C_4^3 = 24$ 个方程不是数学恒等式

另，可以证明：对 $X_{\mu\nu\lambda}$ 中三个下标 μ，ν，λ 的任意排列 $X_{\mu\nu\lambda} = 0$ 给出相同的方程

因此 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 包含的 64 个方程中只有 $3!\,C_4^3=24$ 个方程不是数学恒等式

另，可以证明：对 $X_{\mu\nu\lambda}$ 中三个下标 μ，ν，λ 的任意排列 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 给出相同的方程

例如：$X_{\nu\mu\lambda}=\dfrac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda}+\dfrac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu}+\dfrac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu}=-\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}-\dfrac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}-\dfrac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}=-X_{\mu\nu\lambda}$

利用了 $F_{\nu\lambda}=-F_{\lambda\nu}$

因此 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 包含的 64 个方程中只有 $3!\,C_4^3=24$ 个方程不是数学恒等式

另，可以证明：对 $X_{\mu\nu\lambda}$ 中三个下标 μ，ν，λ 的任意排列 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 给出相同的方程

例如：$X_{\nu\mu\lambda}=\dfrac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda}+\dfrac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu}+\dfrac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu}=-\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}-\dfrac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}-\dfrac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}=-X_{\mu\nu\lambda}$

利用了 $F_{\nu\lambda}=-F_{\lambda\nu}$

即：$X_{\nu\mu\lambda}=0$ 与 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 的方程相同

因此 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 包含的 64 个方程中只有 $3!\,C_4^3=24$ 个方程不是数学恒等式

另，可以证明：对 $X_{\mu\nu\lambda}$ 中三个下标 μ，ν，λ 的任意排列 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 给出相同的方程

例如：$X_{\nu\mu\lambda}=\dfrac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda}+\dfrac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu}+\dfrac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu}=-\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}-\dfrac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}-\dfrac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}=-X_{\mu\nu\lambda}$

利用了 $F_{\nu\lambda}=-F_{\lambda\nu}$

即：$X_{\nu\mu\lambda}=0$ 与 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 的方程相同

因此 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 包含的真正独立的方程中只有 $24/3!=4$ 个，

因此 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 包含的 64 个方程中只有 $3!\,C_4^3=24$ 个方程不是数学恒等式

另，可以证明：对 $X_{\mu\nu\lambda}$ 中三个下标 μ，ν，λ 的任意排列 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 给出相同的方程

例如：$$X_{\nu\mu\lambda}=\frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu}=-\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}-\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}-\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}=-X_{\mu\nu\lambda}$$

利用了 $F_{\nu\lambda}=-F_{\lambda\nu}$

即：$X_{\nu\mu\lambda}=0$ 与 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 的方程相同

因此 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 包含的真正独立的方程中只有 $24/3!=4$ 个，　对应于

因此 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 包含的 64 个方程中只有 $3!\,C_4^3=24$ 个方程不是数学恒等式

另，可以证明：对 $X_{\mu\nu\lambda}$ 中三个下标 μ，ν，λ 的任意排列 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 给出相同的方程

例如：$X_{\nu\mu\lambda}=\dfrac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda}+\dfrac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu}+\dfrac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu}=-\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}-\dfrac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}-\dfrac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}=-X_{\mu\nu\lambda}$

利用了 $F_{\nu\lambda}=-F_{\lambda\nu}$

即：$X_{\nu\mu\lambda}=0$ 与 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 的方程相同

因此 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 包含的真正独立的方程中只有 $24/3!=4$ 个， 对应于

$(\mu,\ \nu,\ \lambda)=(1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 3,\ 4),\ (2,\ 3,\ 4)$

因此 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 包含的 64 个方程中只有 $3!\,C_4^3=24$ 个方程不是数学恒等式

另，可以证明：对 $X_{\mu\nu\lambda}$ 中三个下标 μ，ν，λ 的任意排列 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 给出相同的方程

例如：$X_{\nu\mu\lambda}=\dfrac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda}+\dfrac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu}+\dfrac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu}=-\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}-\dfrac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}-\dfrac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}=-X_{\mu\nu\lambda}$

利用了 $F_{\nu\lambda}=-F_{\lambda\nu}$

即：$X_{\nu\mu\lambda}=0$ 与 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 的方程相同

因此 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 包含的真正独立的方程中只有 $24/3!=4$ 个，对应于

$(\mu,\ \nu,\ \lambda)=(1,\ 2,\ 3)$，$(1,\ 2,\ 4)$，$(1,\ 3,\ 4)$，$(2,\ 3,\ 4)$

$(\mu,\ \nu,\ \lambda)=(1,\ 2,\ 3)$ 时，$X_{\mu\nu\lambda}=0$ 化为

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x_2}=0$$

因此 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 包含的 64 个方程中只有 $3!\,C_4^3=24$ 个方程不是数学恒等式

另，可以证明：对 $X_{\mu\nu\lambda}$ 中三个下标 μ，ν，λ 的任意排列 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 给出相同的方程

例如：$X_{\nu\mu\lambda}=\dfrac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda}+\dfrac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu}+\dfrac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu}=-\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}-\dfrac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}-\dfrac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}=-X_{\mu\nu\lambda}$

利用了 $F_{\nu\lambda}=-F_{\lambda\nu}$

即：$X_{\nu\mu\lambda}=0$ 与 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 的方程相同

因此 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 包含的真正独立的方程中只有 $24/3!=4$ 个， 对应于

$(\mu,\ \nu,\ \lambda)=(1,\ 2,\ 3)$，$(1,\ 2,\ 4)$，$(1,\ 3,\ 4)$，$(2,\ 3,\ 4)$

$(\mu,\ \nu,\ \lambda)=(1,\ 2,\ 3)$ 时，$X_{\mu\nu\lambda}=0$ 化为

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x_2}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial B_3}{\partial x_3}+\frac{\partial B_2}{\partial x_2}+\frac{\partial B_1}{\partial x_1}=0$$

因此 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 包含的 64 个方程中只有 $3!\,C_4^3=24$ 个方程不是数学恒等式

另，可以证明：对 $X_{\mu\nu\lambda}$ 中三个下标 μ，ν，λ 的任意排列 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 给出相同的方程

例如：$X_{\nu\mu\lambda}=\dfrac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda}+\dfrac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu}+\dfrac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu}=-\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}-\dfrac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}-\dfrac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}=-X_{\mu\nu\lambda}$

利用了 $F_{\nu\lambda}=-F_{\lambda\nu}$

即：$X_{\nu\mu\lambda}=0$ 与 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 的方程相同

因此 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 包含的真正独立的方程中只有 $24/3!=4$ 个，　对应于

$(\mu，\nu，\lambda)=(1，2，3)，(1，2，4)，(1，3，4)，(2，3，4)$

$(\mu，\nu，\lambda)=(1，2，3)$ 时，$X_{\mu\nu\lambda}=0$ 化为

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x_2}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial B_3}{\partial x_3}+\frac{\partial B_2}{\partial x_2}+\frac{\partial B_1}{\partial x_1}=0 \quad\Longrightarrow\quad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0$$

因此 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 包含的 64 个方程中只有 $3!\,C_4^3=24$ 个方程不是数学恒等式

另，可以证明：对 $X_{\mu\nu\lambda}$ 中三个下标 μ，ν，λ 的任意排列 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 给出相同的方程

例如：$$X_{\nu\mu\lambda}=\frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu}=-\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}-\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}-\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}=-X_{\mu\nu\lambda}$$

利用了 $F_{\nu\lambda}=-F_{\lambda\nu}$

即：$X_{\nu\mu\lambda}=0$ 与 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 的方程相同

因此 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 包含的真正独立的方程中只有 $24/3!=4$ 个， 对应于

$(\mu,\ \nu,\ \lambda)=(1,\ 2,\ 3)$，$(1,\ 2,\ 4)$，$(1,\ 3,\ 4)$，$(2,\ 3,\ 4)$

$(\mu,\ \nu,\ \lambda)=(1,\ 2,\ 3)$ 时，$X_{\mu\nu\lambda}=0$ 化为

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x_2}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial B_3}{\partial x_3}+\frac{\partial B_2}{\partial x_2}+\frac{\partial B_1}{\partial x_1}=0 \quad\Longrightarrow\quad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0$$

$(\mu,\ \nu,\ \lambda)=(1,\ 2,\ 4)$ 时，$X_{\mu\nu\lambda}=0$ 化为：$\dfrac{\partial F_{12}}{\partial x_4}+\dfrac{\partial F_{24}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial F_{41}}{\partial x_2}=0$

因此 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 包含的 64 个方程中只有 $3!\,C_4^3=24$ 个方程不是数学恒等式

另，可以证明：对 $X_{\mu\nu\lambda}$ 中三个下标 μ，ν，λ 的任意排列 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 给出相同的方程

例如：$X_{\nu\mu\lambda}=\dfrac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda}+\dfrac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu}+\dfrac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu}=-\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}-\dfrac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}-\dfrac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}=-X_{\mu\nu\lambda}$

利用了 $F_{\nu\lambda}=-F_{\lambda\nu}$

即：$X_{\nu\mu\lambda}=0$ 与 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 的方程相同

因此 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 包含的真正独立的方程中只有 $24/3!=4$ 个， 对应于

$(\mu,\ \nu,\ \lambda)=(1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 3,\ 4),\ (2,\ 3,\ 4)$

$(\mu,\ \nu,\ \lambda)=(1,\ 2,\ 3)$ 时，$X_{\mu\nu\lambda}=0$ 化为

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x_2}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial B_3}{\partial x_3}+\frac{\partial B_2}{\partial x_2}+\frac{\partial B_1}{\partial x_1}=0 \quad\Longrightarrow\quad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0$$

$(\mu,\ \nu,\ \lambda)=(1,\ 2,\ 4)$ 时，$X_{\mu\nu\lambda}=0$ 化为：$\dfrac{\partial F_{12}}{\partial x_4}+\dfrac{\partial F_{24}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial F_{41}}{\partial x_2}=0$

$$\frac{\partial B_3}{\partial(ict)}-\frac{\partial\dfrac{iE_2}{c}}{\partial x_1}+\frac{\partial\dfrac{iE_1}{c}}{\partial x_2}=0$$

因此 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 包含的 64 个方程中只有 $3!\,C_4^3=24$ 个方程不是数学恒等式

另，可以证明：对 $X_{\mu\nu\lambda}$ 中三个下标 μ，ν，λ 的任意排列 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 给出相同的方程

例如：$X_{\nu\mu\lambda}=\dfrac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda}+\dfrac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu}+\dfrac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu}=-\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}-\dfrac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}-\dfrac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}=-X_{\mu\nu\lambda}$

利用了 $F_{\nu\lambda}=-F_{\lambda\nu}$

即：$X_{\nu\mu\lambda}=0$ 与 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 的方程相同

因此 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 包含的真正独立的方程中只有 $24/3!=4$ 个， 对应于

$(\mu,\ \nu,\ \lambda)=(1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 3,\ 4),\ (2,\ 3,\ 4)$

$(\mu,\ \nu,\ \lambda)=(1,\ 2,\ 3)$ 时，$X_{\mu\nu\lambda}=0$ 化为

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x_2}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial B_3}{\partial x_3}+\frac{\partial B_2}{\partial x_2}+\frac{\partial B_1}{\partial x_1}=0 \quad\Longrightarrow\quad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0$$

$(\mu,\ \nu,\ \lambda)=(1,\ 2,\ 4)$ 时，$X_{\mu\nu\lambda}=0$ 化为：$\dfrac{\partial F_{12}}{\partial x_4}+\dfrac{\partial F_{24}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial F_{41}}{\partial x_2}=0$

$$\frac{\partial B_3}{\partial(ict)}-\frac{\partial\dfrac{iE_2}{c}}{\partial x_1}+\frac{\partial\dfrac{iE_1}{c}}{\partial x_2}=0 \Longrightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

因此 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 包含的 64 个方程中只有 $3!\,C_4^3=24$ 个方程不是数学恒等式

另，可以证明：对 $X_{\mu\nu\lambda}$ 中三个下标 μ，ν，λ 的任意排列 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 给出相同的方程

例如：$X_{\nu\mu\lambda}=\dfrac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda}+\dfrac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu}+\dfrac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu}=-\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}-\dfrac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}-\dfrac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}=-X_{\mu\nu\lambda}$

利用了 $F_{\nu\lambda}=-F_{\lambda\nu}$

即：$X_{\nu\mu\lambda}=0$ 与 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 的方程相同

因此 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 包含的真正独立的方程中只有 $24/3!=4$ 个，　对应于

$(\mu,\ \nu,\ \lambda)=(1,\ 2,\ 3)$，$(1,\ 2,\ 4)$，$(1,\ 3,\ 4)$，$(2,\ 3,\ 4)$

$(\mu,\ \nu,\ \lambda)=(1,\ 2,\ 3)$ 时，$X_{\mu\nu\lambda}=0$ 化为

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x_2}=0\quad\Longrightarrow\quad\frac{\partial B_3}{\partial x_3}+\frac{\partial B_2}{\partial x_2}+\frac{\partial B_1}{\partial x_1}=0\quad\Longrightarrow\quad\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0$$

$(\mu,\ \nu,\ \lambda)=(1,\ 2,\ 4)$ 时，$X_{\mu\nu\lambda}=0$ 化为：$\dfrac{\partial F_{12}}{\partial x_4}+\dfrac{\partial F_{24}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial F_{41}}{\partial x_2}=0$

$$\frac{\partial B_3}{\partial(ict)}-\frac{\partial\dfrac{iE_2}{c}}{\partial x_1}+\frac{\partial\dfrac{iE_1}{c}}{\partial x_2}=0\Longrightarrow\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{\partial B_z}{\partial t}\Longrightarrow(\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}})\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z=-\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

因此 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 包含的 64 个方程中只有 $3!\,C_4^3=24$ 个方程不是数学恒等式

另，可以证明：对 $X_{\mu\nu\lambda}$ 中三个下标 μ，ν，λ 的任意排列 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 给出相同的方程

例如：$X_{\nu\mu\lambda}=\dfrac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda}+\dfrac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu}+\dfrac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu}=-\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}-\dfrac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}-\dfrac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}=-X_{\mu\nu\lambda}$

利用了 $F_{\nu\lambda}=-F_{\lambda\nu}$

即：$X_{\nu\mu\lambda}=0$ 与 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 的方程相同

因此 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 包含的真正独立的方程中只有 $24/3!=4$ 个， 对应于

$(\mu,\ \nu,\ \lambda)=(1,\ 2,\ 3)$，$(1,\ 2,\ 4)$，$(1,\ 3,\ 4)$，$(2,\ 3,\ 4)$

$(\mu,\ \nu,\ \lambda)=(1,\ 2,\ 3)$ 时，$X_{\mu\nu\lambda}=0$ 化为

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x_2}=0 \implies \frac{\partial B_3}{\partial x_3}+\frac{\partial B_2}{\partial x_2}+\frac{\partial B_1}{\partial x_1}=0 \implies \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0$$

$(\mu,\ \nu,\ \lambda)=(1,\ 2,\ 4)$ 时，$X_{\mu\nu\lambda}=0$ 化为：$\dfrac{\partial F_{12}}{\partial x_4}+\dfrac{\partial F_{24}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial F_{41}}{\partial x_2}=0$

$$\frac{\partial B_3}{\partial(ict)}-\frac{\partial\frac{iE_2}{c}}{\partial x_1}+\frac{\partial\frac{iE_1}{c}}{\partial x_2}=0 \implies \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{\partial B_z}{\partial t} \implies (\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}})\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z=-\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

其余两个方程分别化为：$(\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}})\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_x=-\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_x$ 和 $(\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}})\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_y=-\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_y$

因此 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 包含的 64 个方程中只有 $3!\,C_4^3=24$ 个方程不是数学恒等式

另，可以证明：对 $X_{\mu\nu\lambda}$ 中三个下标 μ，ν，λ 的任意排列 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 给出相同的方程

例如：$X_{\nu\mu\lambda}=\dfrac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda}+\dfrac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu}+\dfrac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu}=-\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}-\dfrac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}-\dfrac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}=-X_{\mu\nu\lambda}$

利用了 $F_{\nu\lambda}=-F_{\lambda\nu}$

即：$X_{\nu\mu\lambda}=0$ 与 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 的方程相同

因此 $X_{\mu\nu\lambda}=0$ 包含的真正独立的方程中只有 $24/3!=4$ 个， 对应于

$(\mu,\ \nu,\ \lambda)=(1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 3,\ 4),\ (2,\ 3,\ 4)$

$(\mu,\ \nu,\ \lambda)=(1,\ 2,\ 3)$ 时，$X_{\mu\nu\lambda}=0$ 化为

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x_2}=0\implies\frac{\partial B_3}{\partial x_3}+\frac{\partial B_2}{\partial x_2}+\frac{\partial B_1}{\partial x_1}=0\implies\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0$$

$(\mu,\ \nu,\ \lambda)=(1,\ 2,\ 4)$ 时，$X_{\mu\nu\lambda}=0$ 化为：$\dfrac{\partial F_{12}}{\partial x_4}+\dfrac{\partial F_{24}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial F_{41}}{\partial x_2}=0$

$$\frac{\partial B_3}{\partial(ict)}-\frac{\partial\frac{iE_2}{c}}{\partial x_1}+\frac{\partial\frac{iE_1}{c}}{\partial x_2}=0\implies\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{\partial B_z}{\partial t}\implies(\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}})\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z=-\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

其余两个方程分别化为：$(\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}})\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_x=-\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_x$ 和 $(\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}})\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_y=-\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_y$

从而：$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0\\ \nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}=-\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}\end{cases}\xRightarrow{\text{协变形式}}\boxed{X_{\mu\nu\lambda}=\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}+\dfrac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}+\dfrac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}=0}$

Maxwell 方程的协变形式为

Maxwell 方程的协变形式为

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

Maxwell 方程的协变形式为

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

由于 $F_{\mu\nu}$ 是二阶张量，故在不同惯性系下按下列方式变换：$F'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}$

Maxwell 方程的协变形式为

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

由于 $F_{\mu\nu}$ 是二阶张量，故在不同惯性系下按下列方式变换：$F'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda} a_{\nu\tau} F_{\lambda\tau}$

$$F'_{12} = a_{1\lambda} a_{2\tau} F_{\lambda\tau} = a_{1\lambda} F_{\lambda 2} = \gamma F_{12} + i\beta\gamma F_{42} = \gamma B_3 + i\beta\gamma \frac{i}{c} E_2$$

Maxwell 方程的协变形式为

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

由于 $F_{\mu\nu}$ 是二阶张量，故在不同惯性系下按下列方式变换：$F'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda} a_{\nu\tau} F_{\lambda\tau}$

$$F'_{12} = a_{1\lambda} a_{2\tau} F_{\lambda\tau} = a_{1\lambda} F_{\lambda 2} = \gamma F_{12} + i\beta\gamma F_{42} = \gamma B_3 + i\beta\gamma \frac{i}{c} E_2$$

即：$B'_3 = \gamma \left(B_3 - \frac{v}{c^2} E_2 \right)$

Maxwell 方程的协变形式为

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

由于 $F_{\mu\nu}$ 是二阶张量，故在不同惯性系下按下列方式变换：$F'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}$

$$F'_{12} = a_{1\lambda}a_{2\tau}F_{\lambda\tau} = a_{1\lambda}F_{\lambda 2} = \gamma F_{12} + i\beta\gamma F_{42} = \gamma B_3 + i\beta\gamma\,\frac{i}{c}E_2$$

即：$B'_3 = \gamma\left(B_3 - \dfrac{v}{c^2}E_2\right)$ 类似地：

$$F'_{41} = a_{4\lambda}a_{1\tau}F_{\lambda\tau} = a_{41}a_{14}F_{14} + a_{44}a_{11}F_{41} = (-\beta^2\gamma^2 + \gamma^2)F_{41} \quad\Longrightarrow\quad E'_1 = E_1$$

Maxwell 方程的协变形式为

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

由于 $F_{\mu\nu}$ 是二阶张量，故在不同惯性系下按下列方式变换：$F'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda} a_{\nu\tau} F_{\lambda\tau}$

$$F'_{12} = a_{1\lambda} a_{2\tau} F_{\lambda\tau} = a_{1\lambda} F_{\lambda 2} = \gamma F_{12} + i\beta\gamma F_{42} = \gamma B_3 + i\beta\gamma \frac{i}{c} E_2$$

即：$B'_3 = \gamma \left(B_3 - \frac{v}{c^2} E_2 \right)$　　　类似地：

$$F'_{41} = a_{4\lambda} a_{1\tau} F_{\lambda\tau} = a_{41} a_{14} F_{14} + a_{44} a_{11} F_{41} = (-\beta^2\gamma^2 + \gamma^2) F_{41} \implies E'_1 = E_1$$

各项整理得：

$$E'_1 = E_1 \qquad B'_1 = B_1$$

$$E'_2 = \gamma(E_2 - vB_3) \qquad B'_2 = \gamma \left(B_2 + \frac{v}{c^2} E_3 \right)$$

$$E'_3 = \gamma(E_3 + vB_2) \qquad B'_3 = \gamma \left(B_3 - \frac{v}{c^2} E_2 \right)$$

写成三维矢量形式：

写成三维矢量形式：

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}}'_{||} &= \vec{\boldsymbol{E}}_{||} \\ \vec{\boldsymbol{E}}'_{\perp} &= \gamma(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}})_{\perp}\end{aligned} \quad (1) \qquad \begin{aligned}\vec{\boldsymbol{B}}'_{||} &= \vec{\boldsymbol{B}}_{||} \\ \vec{\boldsymbol{B}}'_{\perp} &= \gamma(\vec{\boldsymbol{B}} - \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{E}}/c^2)_{\perp}\end{aligned} \quad (2)$$

写成三维矢量形式：

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}}'_{||} &= \vec{\boldsymbol{E}}_{||} \\ \vec{\boldsymbol{E}}'_{\perp} &= \gamma(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}})_{\perp}\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{B}}'_{||} &= \vec{\boldsymbol{B}}_{||} \\ \vec{\boldsymbol{B}}'_{\perp} &= \gamma(\vec{\boldsymbol{B}} - \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{E}}/c^2)_{\perp}\end{aligned} \tag{2}$$

其中下标 $||$ 与 $\perp$ 分别表示平行于和垂直于两个惯性系的相对速度 $\vec{v}$ 的场分量

写成三维矢量形式：

$$\begin{aligned}\vec{E}'_{||} &= \vec{E}_{||}\\ \vec{E}'_{\perp} &= \gamma(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})_{\perp}\end{aligned} \qquad (1) \qquad\qquad \begin{aligned}\vec{B}'_{||} &= \vec{B}_{||}\\ \vec{B}'_{\perp} &= \gamma(\vec{B}-\vec{v}\times\vec{E}/c^2)_{\perp}\end{aligned} \qquad (2)$$

其中下标 $||$ 与 $\perp$ 分别表示平行于和垂直于两个惯性系的相对速度 $\vec{v}$ 的场分量

讨论

写成三维矢量形式：

$$
\begin{aligned}
\vec{E}'_{||} &= \vec{E}_{||} \\
\vec{E}'_{\perp} &= \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_{\perp}
\end{aligned}
\qquad (1)
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\vec{B}'_{||} &= \vec{B}_{||} \\
\vec{B}'_{\perp} &= \gamma(\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}/c^2)_{\perp}
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

其中下标 $||$ 与 $\perp$ 分别表示平行于和垂直于两个惯性系的相对速度 $\vec{v}$ 的场分量

讨论

1. 矢势和标势构成四维势矢量，电场和磁场构成四维二阶张量，反映了电磁场的统一，在惯性系之间变换，电磁场可互相转换

写成三维矢量形式：

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{E}}'_{||} &= \vec{\boldsymbol{E}}_{||} \\ \vec{\boldsymbol{E}}'_{\perp} &= \gamma(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}})_{\perp} \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{B}}'_{||} &= \vec{\boldsymbol{B}}_{||} \\ \vec{\boldsymbol{B}}'_{\perp} &= \gamma(\vec{\boldsymbol{B}} - \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{E}}/c^2)_{\perp} \end{aligned} \qquad (2)$$

其中下标 $||$ 与 $\perp$ 分别表示平行于和垂直于两个惯性系的相对速度 $\vec{v}$ 的场分量

讨论

1. 矢势和标势构成四维势矢量，电场和磁场构成四维二阶张量，反映了电磁场的统一，在惯性系之间变换，电磁场可互相转换

2. 若在一个惯性系中只有纯电场（磁场），在另一惯性系中必然既有电场，又有磁场。不可能通过惯性系变换，把一个纯电场（磁场）变换为只有纯磁场（电场）。

写成三维矢量形式：

$$\begin{aligned}\vec{E}'_{||} &= \vec{E}_{||} \\ \vec{E}'_{\perp} &= \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_{\perp}\end{aligned} \qquad (1) \qquad \begin{aligned}\vec{B}'_{||} &= \vec{B}_{||} \\ \vec{B}'_{\perp} &= \gamma(\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}/c^2)_{\perp}\end{aligned} \qquad (2)$$

其中下标 $||$ 与 $\perp$ 分别表示平行于和垂直于两个惯性系的相对速度 $\vec{v}$ 的场分量

讨论

1. 矢势和标势构成四维势矢量，电场和磁场构成四维二阶张量，反映了电磁场的统一，在惯性系之间变换，电磁场可互相转换

2. 若在一个惯性系中只有纯电场（磁场），在另一惯性系中必然既有电场，又有磁场。不可能通过惯性系变换，把一个纯电场（磁场）变换为只有纯磁场（电场）。

   例如，在某惯性系只有磁场，没有电场，由 (2) 式可得：

写成三维矢量形式：

$$\begin{aligned}\vec{E}'_{||} &= \vec{E}_{||} \\ \vec{E}'_{\perp} &= \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_{\perp}\end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}\vec{B}'_{||} &= \vec{B}_{||} \\ \vec{B}'_{\perp} &= \gamma(\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}/c^2)_{\perp}\end{aligned} \qquad (2)$$

其中下标 $||$ 与 $\perp$ 分别表示平行于和垂直于两个惯性系的相对速度 $\vec{v}$ 的场分量

讨论

1. 矢势和标势构成四维势矢量，电场和磁场构成四维二阶张量，反映了电磁场的统一，在惯性系之间变换，电磁场可互相转换

2. 若在一个惯性系中只有纯电场（磁场），在另一惯性系中必然既有电场，又有磁场。不可能通过惯性系变换，把一个纯电场（磁场）变换为只有纯磁场（电场）。

   例如，在某惯性系只有磁场，没有电场，由 (2) 式可得：
   $$\begin{aligned}\vec{B}'_{||} &= \vec{B}_{||} \\ \vec{B}'_{\perp} &= \gamma\vec{B}_{\perp}\end{aligned}$$

写成三维矢量形式：

$$\vec{E}'_{||} = \vec{E}_{||} \qquad \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_{\perp} \tag{1}$$

$$\vec{B}'_{||} = \vec{B}_{||} \qquad \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}/c^2)_{\perp} \tag{2}$$

其中下标 $||$ 与 $\perp$ 分别表示平行于和垂直于两个惯性系的相对速度 $\vec{v}$ 的场分量

讨论

1. 矢势和标势构成四维势矢量，电场和磁场构成四维二阶张量，反映了电磁场的统一，在惯性系之间变换，电磁场可互相转换

2. 若在一个惯性系中只有纯电场（磁场），在另一惯性系中必然既有电场，又有磁场。不可能通过惯性系变换，把一个纯电场（磁场）变换为只有纯磁场（电场）。

   例如，在某惯性系只有磁场，没有电场，由 (2) 式可得：
   $$\vec{B}'_{||} = \vec{B}_{||} \qquad \vec{B}'_{\perp} = \gamma\vec{B}_{\perp}$$
   在任意惯性系看，仍然有磁场，不会出现纯电场情况。

五、电磁场的不变量

五、电磁场的不变量

由于 $F_{\mu\nu}$ 是二阶张量， $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 是标量，在洛仑兹变换下不变。

五、电磁场的不变量

由于 $F_{\mu\nu}$ 是二阶张量， $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 是标量，在洛仑兹变换下不变。

$$F'_{\mu\nu}F'_{\mu\nu} \quad = a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}\, a_{\mu\zeta}a_{\nu\eta}F_{\zeta\eta}$$

五、电磁场的不变量

由于 $F_{\mu\nu}$ 是二阶张量， $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 是标量，在洛仑兹变换下不变。

$$F'_{\mu\nu}F'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}\, a_{\mu\zeta}a_{\nu\eta}F_{\zeta\eta} = \underbrace{a_{\mu\lambda}a_{\mu\zeta}}_{\delta_{\lambda\zeta}}\ \underbrace{a_{\nu\tau}a_{\nu\eta}}_{\delta_{\tau\eta}} F_{\lambda\tau}\, F_{\zeta\eta}$$

五、电磁场的不变量

由于 $F_{\mu\nu}$ 是二阶张量， $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 是标量，在洛仑兹变换下不变。

$$
\begin{aligned}
F'_{\mu\nu}F'_{\mu\nu} &= a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}\, a_{\mu\zeta}a_{\nu\eta}F_{\zeta\eta} = \underbrace{a_{\mu\lambda}a_{\mu\zeta}}_{\delta_{\lambda\zeta}}\, \underbrace{a_{\nu\tau}a_{\nu\eta}}_{\delta_{\tau\eta}}\, F_{\lambda\tau}\, F_{\zeta\eta} \\
&= \delta_{\lambda\zeta}\delta_{\tau\eta}\, F_{\lambda\tau}\, F_{\zeta\eta}
\end{aligned}
$$

五、电磁场的不变量

由于 $F_{\mu\nu}$ 是二阶张量， $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 是标量，在洛仑兹变换下不变。

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu}F'_{\mu\nu} &= a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}\, a_{\mu\zeta}a_{\nu\eta}F_{\zeta\eta} = \underbrace{a_{\mu\lambda}a_{\mu\zeta}}_{\delta_{\lambda\zeta}}\, \underbrace{a_{\nu\tau}a_{\nu\eta}}_{\delta_{\tau\eta}} F_{\lambda\tau}\, F_{\zeta\eta} \\ &= \delta_{\lambda\zeta}\delta_{\tau\eta}\, F_{\lambda\tau}\, F_{\zeta\eta} = F_{\lambda\tau}F_{\lambda\tau} \end{aligned}$$

五、电磁场的不变量

由于 $F_{\mu\nu}$ 是二阶张量， $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 是标量，在洛仑兹变换下不变。

$$
\begin{aligned}
F'_{\mu\nu}F'_{\mu\nu} &= a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}\,a_{\mu\zeta}a_{\nu\eta}F_{\zeta\eta} = \underbrace{a_{\mu\lambda}a_{\mu\zeta}}_{\delta_{\lambda\zeta}}\,\underbrace{a_{\nu\tau}a_{\nu\eta}}_{\delta_{\tau\eta}}F_{\lambda\tau}\,F_{\zeta\eta} \\
&= \delta_{\lambda\zeta}\delta_{\tau\eta}\,F_{\lambda\tau}\,F_{\zeta\eta} = F_{\lambda\tau}F_{\lambda\tau} = F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

五、电磁场的不变量

由于 $F_{\mu\nu}$ 是二阶张量， $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 是标量，在洛仑兹变换下不变。

$$
\begin{aligned}
F'_{\mu\nu}F'_{\mu\nu} &= a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}\, a_{\mu\zeta}a_{\nu\eta}F_{\zeta\eta} = \underbrace{a_{\mu\lambda}a_{\mu\zeta}}_{\delta_{\lambda\zeta}}\, \underbrace{a_{\nu\tau}a_{\nu\eta}}_{\delta_{\tau\eta}}\, F_{\lambda\tau}\, F_{\zeta\eta} \\
&= \delta_{\lambda\zeta}\delta_{\tau\eta}\, F_{\lambda\tau}\, F_{\zeta\eta} = F_{\lambda\tau}F_{\lambda\tau} = F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad \text{对重复下标求和}
\end{aligned}
$$

五、电磁场的不变量

由于 $F_{\mu\nu}$ 是二阶张量， $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 是标量，在洛仑兹变换下不变。

$$
\begin{aligned}
F'_{\mu\nu}F'_{\mu\nu} &= a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}\, a_{\mu\zeta}a_{\nu\eta}F_{\zeta\eta} = \underbrace{a_{\mu\lambda}a_{\mu\zeta}}_{\delta_{\lambda\zeta}}\ \underbrace{a_{\nu\tau}a_{\nu\eta}}_{\delta_{\tau\eta}}F_{\lambda\tau}\, F_{\zeta\eta} \\
&= \delta_{\lambda\zeta}\delta_{\tau\eta}\, F_{\lambda\tau}\, F_{\zeta\eta} = F_{\lambda\tau}F_{\lambda\tau} = F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad \text{对重复下标求和} \\
F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= 2(F_{12}^2 + F_{13}^2 + F_{14}^2 + F_{23}^2 + F_{24}^2 + F_{34}^2) = \frac{2}{c^2}(c^2\vec{\boldsymbol{B}}^2 - \vec{\boldsymbol{E}}^2)
\end{aligned}
$$

五、电磁场的不变量

由于 $F_{\mu\nu}$ 是二阶张量， $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 是标量，在洛仑兹变换下不变。

$$
\begin{aligned}
F'_{\mu\nu}F'_{\mu\nu} &= a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}\,a_{\mu\zeta}a_{\nu\eta}F_{\zeta\eta} = \underbrace{a_{\mu\lambda}a_{\mu\zeta}}_{\delta_{\lambda\zeta}}\ \underbrace{a_{\nu\tau}a_{\nu\eta}}_{\delta_{\tau\eta}}F_{\lambda\tau}\,F_{\zeta\eta} \\
&= \delta_{\lambda\zeta}\delta_{\tau\eta}\,F_{\lambda\tau}\,F_{\zeta\eta} = F_{\lambda\tau}F_{\lambda\tau} = F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad \text{对重复下标求和} \\
F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= 2(F_{12}^2+F_{13}^2+F_{14}^2+F_{23}^2+F_{24}^2+F_{34}^2) = \frac{2}{c^2}(c^2\vec{\boldsymbol{B}}^2-\vec{\boldsymbol{E}}^2) \\
|F'_{\mu\nu}| &= |a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}| = |a_{\mu\lambda}|\,|a_{\nu\tau}|\,|F_{\lambda\tau}| = |F_{\mu\nu}|
\end{aligned}
$$

五、电磁场的不变量

由于 $F_{\mu\nu}$ 是二阶张量，$F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 是标量，在洛仑兹变换下不变。

$$
\begin{aligned}
F'_{\mu\nu}F'_{\mu\nu} &= a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}\, a_{\mu\zeta}a_{\nu\eta}F_{\zeta\eta} = \underbrace{a_{\mu\lambda}a_{\mu\zeta}}_{\delta_{\lambda\zeta}}\, \underbrace{a_{\nu\tau}a_{\nu\eta}}_{\delta_{\tau\eta}} F_{\lambda\tau}\, F_{\zeta\eta} \\
&= \delta_{\lambda\zeta}\delta_{\tau\eta}\, F_{\lambda\tau}\, F_{\zeta\eta} = F_{\lambda\tau}F_{\lambda\tau} = F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad \text{对重复下标求和} \\
F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= 2(F_{12}^2 + F_{13}^2 + F_{14}^2 + F_{23}^2 + F_{24}^2 + F_{34}^2) = \frac{2}{c^2}(c^2\vec{\boldsymbol{B}}^2 - \vec{\boldsymbol{E}}^2) \\
|F'_{\mu\nu}| &= |a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}| = |a_{\mu\lambda}|\,|a_{\nu\tau}|\,|F_{\lambda\tau}| = |F_{\mu\nu}| \qquad \text{利用了 } a \text{ 矩阵的行列式为 } 1
\end{aligned}
$$

五、电磁场的不变量

由于 $F_{\mu\nu}$ 是二阶张量， $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 是标量，在洛仑兹变换下不变。

$$F'_{\mu\nu}F'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}\, a_{\mu\zeta}a_{\nu\eta}F_{\zeta\eta} = \underbrace{a_{\mu\lambda}a_{\mu\zeta}}_{\delta_{\lambda\zeta}}\ \underbrace{a_{\nu\tau}a_{\nu\eta}}_{\delta_{\tau\eta}} F_{\lambda\tau}\, F_{\zeta\eta}$$

$$= \delta_{\lambda\zeta}\delta_{\tau\eta}\, F_{\lambda\tau}\, F_{\zeta\eta} = F_{\lambda\tau}F_{\lambda\tau} = F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad \text{对重复下标求和}$$

$$F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(F_{12}^2 + F_{13}^2 + F_{14}^2 + F_{23}^2 + F_{24}^2 + F_{34}^2) = \frac{2}{c^2}(c^2\vec{\boldsymbol{B}}^2 - \vec{\boldsymbol{E}}^2)$$

$$|F'_{\mu\nu}| = |a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}| = |a_{\mu\lambda}|\,|a_{\nu\tau}|\,|F_{\lambda\tau}| = |F_{\mu\nu}| \qquad \text{利用了 } a \text{ 矩阵的行列式为 } 1$$

$$|F_{\mu\nu}| = -\frac{1}{c^2}(\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}})^2$$

五、电磁场的不变量

由于 $F_{\mu\nu}$ 是二阶张量， $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 是标量，在洛仑兹变换下不变。

$$F'_{\mu\nu}F'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}\, a_{\mu\zeta}a_{\nu\eta}F_{\zeta\eta} = \underbrace{a_{\mu\lambda}a_{\mu\zeta}}_{\delta_{\lambda\zeta}}\ \underbrace{a_{\nu\tau}a_{\nu\eta}}_{\delta_{\tau\eta}} F_{\lambda\tau}\, F_{\zeta\eta}$$

$$= \delta_{\lambda\zeta}\delta_{\tau\eta}\, F_{\lambda\tau}\, F_{\zeta\eta} = F_{\lambda\tau}F_{\lambda\tau} = F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad \text{对重复下标求和}$$

$$F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(F_{12}^2 + F_{13}^2 + F_{14}^2 + F_{23}^2 + F_{24}^2 + F_{34}^2) = \frac{2}{c^2}(c^2\vec{\boldsymbol{B}}^2 - \vec{\boldsymbol{E}}^2)$$

$$|F'_{\mu\nu}| = |a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}| = |a_{\mu\lambda}|\,|a_{\nu\tau}|\,|F_{\lambda\tau}| = |F_{\mu\nu}| \qquad \text{利用了 } a \text{ 矩阵的行列式为 } 1$$

$$|F_{\mu\nu}| = -\frac{1}{c^2}(\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}})^2$$

故在洛仑兹变换下：$\vec{\boldsymbol{E}}^2 - c^2\vec{\boldsymbol{B}}^2$ 与 $\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}}$ 是不变量。

五、电磁场的不变量

由于 $F_{\mu\nu}$ 是二阶张量，$F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 是标量，在洛仑兹变换下不变。

$$
\begin{aligned}
F'_{\mu\nu}F'_{\mu\nu} &= a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}\, a_{\mu\zeta}a_{\nu\eta}F_{\zeta\eta} = \underbrace{a_{\mu\lambda}a_{\mu\zeta}}_{\delta_{\lambda\zeta}}\ \underbrace{a_{\nu\tau}a_{\nu\eta}}_{\delta_{\tau\eta}} F_{\lambda\tau}\, F_{\zeta\eta} \\
&= \delta_{\lambda\zeta}\delta_{\tau\eta}\, F_{\lambda\tau}\, F_{\zeta\eta} = F_{\lambda\tau}F_{\lambda\tau} = F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad \text{对重复下标求和} \\
F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= 2(F_{12}^2 + F_{13}^2 + F_{14}^2 + F_{23}^2 + F_{24}^2 + F_{34}^2) = \frac{2}{c^2}(c^2\vec{B}^2 - \vec{E}^2) \\
|F'_{\mu\nu}| &= |a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}| = |a_{\mu\lambda}|\,|a_{\nu\tau}|\,|F_{\lambda\tau}| = |F_{\mu\nu}| \qquad \text{利用了 } a \text{ 矩阵的行列式为 } 1 \\
|F_{\mu\nu}| &= -\frac{1}{c^2}(\vec{E}\cdot\vec{B})^2
\end{aligned}
$$

故在洛仑兹变换下：$\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2$ 与 $\vec{E}\cdot\vec{B}$ 是不变量。

讨论

五、电磁场的不变量

由于 $F_{\mu\nu}$ 是二阶张量， $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 是标量，在洛仑兹变换下不变。

$$\begin{aligned}
F'_{\mu\nu}F'_{\mu\nu} &= a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}\, a_{\mu\zeta}a_{\nu\eta}F_{\zeta\eta} = \underbrace{a_{\mu\lambda}a_{\mu\zeta}}_{\delta_{\lambda\zeta}}\ \underbrace{a_{\nu\tau}a_{\nu\eta}}_{\delta_{\tau\eta}} F_{\lambda\tau}\, F_{\zeta\eta} \\
&= \delta_{\lambda\zeta}\delta_{\tau\eta}\, F_{\lambda\tau}\, F_{\zeta\eta} = F_{\lambda\tau}F_{\lambda\tau} = F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad \text{对重复下标求和} \\
F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= 2(F_{12}^2 + F_{13}^2 + F_{14}^2 + F_{23}^2 + F_{24}^2 + F_{34}^2) = \frac{2}{c^2}(c^2\vec{\boldsymbol{B}}^2 - \vec{\boldsymbol{E}}^2) \\
|F'_{\mu\nu}| &= |a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}| = |a_{\mu\lambda}|\,|a_{\nu\tau}|\,|F_{\lambda\tau}| = |F_{\mu\nu}| \qquad \text{利用了 } a \text{ 矩阵的行列式为 1} \\
|F_{\mu\nu}| &= -\frac{1}{c^2}(\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}})^2
\end{aligned}$$

故在洛仑兹变换下：$\vec{\boldsymbol{E}}^2 - c^2\vec{\boldsymbol{B}}^2$ 与 $\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}}$ 是不变量。

讨论

(1) 若在某惯性系中 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 垂直，则在任意惯性系， $\vec{\boldsymbol{E}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 垂直（或其中之一为 0）

五、电磁场的不变量

由于 $F_{\mu\nu}$ 是二阶张量， $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 是标量，在洛仑兹变换下不变。

$$F'_{\mu\nu}F'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}\, a_{\mu\zeta}a_{\nu\eta}F_{\zeta\eta} = \underbrace{a_{\mu\lambda}a_{\mu\zeta}}_{\delta_{\lambda\zeta}}\ \underbrace{a_{\nu\tau}a_{\nu\eta}}_{\delta_{\tau\eta}} F_{\lambda\tau}\, F_{\zeta\eta}$$

$$= \delta_{\lambda\zeta}\delta_{\tau\eta}\, F_{\lambda\tau}\, F_{\zeta\eta} = F_{\lambda\tau}F_{\lambda\tau} = F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad \text{对重复下标求和}$$

$$F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(F_{12}^2 + F_{13}^2 + F_{14}^2 + F_{23}^2 + F_{24}^2 + F_{34}^2) = \frac{2}{c^2}(c^2\vec{\boldsymbol{B}}^2 - \vec{\boldsymbol{E}}^2)$$

$$|F'_{\mu\nu}| = |a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}| = |a_{\mu\lambda}|\,|a_{\nu\tau}|\,|F_{\lambda\tau}| = |F_{\mu\nu}| \qquad \text{利用了 } a \text{ 矩阵的行列式为 } 1$$

$$|F_{\mu\nu}| = -\frac{1}{c^2}(\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}})^2$$

故在洛仑兹变换下：$\vec{\boldsymbol{E}}^2 - c^2\vec{\boldsymbol{B}}^2$ 与 $\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}}$ 是不变量。

讨论

(1) 若在某惯性系中 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 垂直，则在任意惯性系， $\vec{\boldsymbol{E}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 垂直（或其中之一为 0）

若在某惯性系中 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 成钝角（锐角），则在任意惯性系， $\vec{\boldsymbol{E}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 也成钝角（锐角）。

五、电磁场的不变量

由于 $F_{\mu\nu}$ 是二阶张量，$F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 是标量，在洛仑兹变换下不变。

$$
\begin{aligned}
F'_{\mu\nu}F'_{\mu\nu} &= a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}\,a_{\mu\zeta}a_{\nu\eta}F_{\zeta\eta} = \underbrace{a_{\mu\lambda}a_{\mu\zeta}}_{\delta_{\lambda\zeta}}\,\underbrace{a_{\nu\tau}a_{\nu\eta}}_{\delta_{\tau\eta}}F_{\lambda\tau}\,F_{\zeta\eta} \\
&= \delta_{\lambda\zeta}\delta_{\tau\eta}\,F_{\lambda\tau}\,F_{\zeta\eta} = F_{\lambda\tau}F_{\lambda\tau} = F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad \text{对重复下标求和} \\
F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= 2(F_{12}^2+F_{13}^2+F_{14}^2+F_{23}^2+F_{24}^2+F_{34}^2) = \frac{2}{c^2}(c^2\vec{B}^2-\vec{E}^2) \\
|F'_{\mu\nu}| &= |a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}| = |a_{\mu\lambda}|\,|a_{\nu\tau}|\,|F_{\lambda\tau}| = |F_{\mu\nu}| \qquad \text{利用了 } a \text{ 矩阵的行列式为 } 1 \\
|F_{\mu\nu}| &= -\frac{1}{c^2}(\vec{E}\cdot\vec{B})^2
\end{aligned}
$$

故在洛仑兹变换下：$\vec{E}^2-c^2\vec{B}^2$ 与 $\vec{E}\cdot\vec{B}$ 是不变量。

讨论

(1) 若在某惯性系中 $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 垂直，则在任意惯性系，$\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 垂直（或其中之一为 0）

若在某惯性系中 $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 成钝角（锐角），则在任意惯性系，$\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 也成钝角（锐角）。

(2) 若在某惯性系中 $|\vec{E}|=c|\vec{B}|$，则在任意惯性系，$|\vec{E}|=c|\vec{B}|$

五、电磁场的不变量

由于 $F_{\mu\nu}$ 是二阶张量， $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 是标量，在洛仑兹变换下不变。

$$F'_{\mu\nu}F'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}\, a_{\mu\zeta}a_{\nu\eta}F_{\zeta\eta} = \underbrace{a_{\mu\lambda}a_{\mu\zeta}}_{\delta_{\lambda\zeta}}\ \underbrace{a_{\nu\tau}a_{\nu\eta}}_{\delta_{\tau\eta}} F_{\lambda\tau}\, F_{\zeta\eta}$$

$$= \delta_{\lambda\zeta}\delta_{\tau\eta}\, F_{\lambda\tau}\, F_{\zeta\eta} = F_{\lambda\tau}F_{\lambda\tau} = F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad \text{对重复下标求和}$$

$$F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(F_{12}^2 + F_{13}^2 + F_{14}^2 + F_{23}^2 + F_{24}^2 + F_{34}^2) = \frac{2}{c^2}(c^2\vec{\boldsymbol{B}}^2 - \vec{\boldsymbol{E}}^2)$$

$$|F'_{\mu\nu}| = |a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}| = |a_{\mu\lambda}|\,|a_{\nu\tau}|\,|F_{\lambda\tau}| = |F_{\mu\nu}| \qquad \text{利用了 } a \text{ 矩阵的行列式为 } 1$$

$$|F_{\mu\nu}| = -\frac{1}{c^2}(\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}})^2$$

故在洛仑兹变换下：$\vec{\boldsymbol{E}}^2 - c^2\vec{\boldsymbol{B}}^2$ 与 $\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}}$ 是不变量。

讨论

(1) 若在某惯性系中 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 垂直，则在任意惯性系， $\vec{\boldsymbol{E}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 垂直（或其中之一为 0）

若在某惯性系中 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 成钝角（锐角），则在任意惯性系， $\vec{\boldsymbol{E}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 也成钝角（锐角）。

(2) 若在某惯性系中 $|\vec{\boldsymbol{E}}| = c|\vec{\boldsymbol{B}}|$，则在任意惯性系，$|\vec{\boldsymbol{E}}| = c|\vec{\boldsymbol{B}}|$

若在某惯性系中 $|\vec{\boldsymbol{E}}| > c|\vec{\boldsymbol{B}}|$，则找不到惯性系使得 $|\vec{\boldsymbol{E}}| < c|\vec{\boldsymbol{B}}|$

(3) 若在某惯性系中只有纯电场（纯磁场），则在任意惯性系，$\vec{\boldsymbol{E}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 垂直

(3) 若在某惯性系中只有纯电场（纯磁场），则在任意惯性系，$\vec{\boldsymbol{E}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 垂直

若在某惯性系中 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 垂直，则可找到一惯性系 S'，在 S' 观察只有一种场。

(3) 若在某惯性系中只有纯电场（纯磁场），则在任意惯性系，$\vec{\boldsymbol{E}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 垂直

若在某惯性系中 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 垂直，则可找到一惯性系 S'，在 S' 观察只有一种场。

(思考：这一种场是电场还是磁场？)

(3) 若在某惯性系中只有纯电场（纯磁场），则在任意惯性系，$\vec{\boldsymbol{E}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 垂直

若在某惯性系中 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 垂直，则可找到一惯性系 S'，在 S' 观察只有一种场。

(思考：这一种场是电场还是磁场？)

(4) 若在某惯性系中空间某点 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 不平行，总能找到一惯性系 S'，使得在 S' 观察该点的 $\vec{\boldsymbol{E}} \,||\, \vec{\boldsymbol{B}}$。(习题 11.6)

(3) 若在某惯性系中只有纯电场（纯磁场），则在任意惯性系，$\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 垂直

若在某惯性系中 $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 垂直，则可找到一惯性系 S'，在 S' 观察只有一种场。

(思考：这一种场是电场还是磁场？)

(4) 若在某惯性系中空间某点 $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 不平行，总能找到一惯性系 S'，使得在 S' 观察该点的 $\vec{E} \| \vec{B}$。(习题 11.6)

六、洛伦兹力密度公式的协变性

(3) 若在某惯性系中只有纯电场（纯磁场），则在任意惯性系，$\vec{\boldsymbol{E}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 垂直
若在某惯性系中 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 垂直，则可找到一惯性系 S'，在 S' 观察只有一种场。

(思考：这一种场是电场还是磁场？)

(4) 若在某惯性系中空间某点 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 不平行，总能找到一惯性系 S'，使得在 S' 观察该点的 $\vec{\boldsymbol{E}} \,||\, \vec{\boldsymbol{B}}$。(习题 11.6)

六、洛伦兹力密度公式的协变性

洛伦兹力密度：$\vec{\boldsymbol{f}} = \rho(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}})$

(3) 若在某惯性系中只有纯电场（纯磁场），则在任意惯性系，$\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 垂直

若在某惯性系中 $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 垂直，则可找到一惯性系 S'，在 S' 观察只有一种场。

(思考：这一种场是电场还是磁场？)

(4) 若在某惯性系中空间某点 $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 不平行，总能找到一惯性系 S'，使得在 S' 观察该点的 $\vec{E}\,||\,\vec{B}$。(习题 11.6)

六、洛伦兹力密度公式的协变性

洛伦兹力密度：$\vec{f} = \rho(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

$$f_1 = \rho(E_1 + v_2B_3 - v_3B_2) = j_2B_3 - j_3B_2 + \rho E_1 = j_2F_{12} + j_3F_{13} + j_4F_{14}$$

利用了 $F_{14} = -\frac{i}{c}E_1$，$F_{13} = -B_2$，$F_{12} = B_3$

(3) 若在某惯性系中只有纯电场（纯磁场），则在任意惯性系，$\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 垂直

若在某惯性系中 $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 垂直，则可找到一惯性系 S'，在 S' 观察只有一种场。

(思考：这一种场是电场还是磁场？)

(4) 若在某惯性系中空间某点 $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 不平行，总能找到一惯性系 S'，使得在 S' 观察该点的 $\vec{E} \,||\, \vec{B}$。(习题 11.6)

六、洛伦兹力密度公式的协变性

洛伦兹力密度：$\vec{f} = \rho(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

$$f_1 = \rho(E_1 + v_2B_3 - v_3B_2) = j_2B_3 - j_3B_2 + \rho E_1 = j_2F_{12} + j_3F_{13} + j_4F_{14}$$

利用了 $F_{14} = -\frac{i}{c}E_1$，$F_{13} = -B_2$，$F_{12} = B_3$

$f_1 = F_{1\nu}j_\nu$ 　　同理　$f_2 = F_{2\nu}j_\nu$，　$f_3 = F_{3\nu}j_\nu$

(3) 若在某惯性系中只有纯电场（纯磁场），则在任意惯性系，$\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 垂直

若在某惯性系中 $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 垂直，则可找到一惯性系 S'，在 S' 观察只有一种场。

(思考：这一种场是电场还是磁场？)

(4) 若在某惯性系中空间某点 $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 不平行，总能找到一惯性系 S'，使得在 S' 观察该点的 $\vec{E} \,||\, \vec{B}$。(习题 11.6)

六、洛伦兹力密度公式的协变性

洛伦兹力密度：$\vec{f} = \rho(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

$$f_1 = \rho(E_1 + v_2 B_3 - v_3 B_2) = j_2 B_3 - j_3 B_2 + \rho E_1 = j_2 F_{12} + j_3 F_{13} + j_4 F_{14}$$

利用了 $F_{14} = -\dfrac{i}{c} E_1$，$F_{13} = -B_2$，$F_{12} = B_3$

$f_1 = F_{1\nu} j_\nu$　　同理　$f_2 = F_{2\nu} j_\nu$，　$f_3 = F_{3\nu} j_\nu$

由于 $F_{\mu\nu}$ 是四维二阶张量，j_ν 是四维矢量，$F_{\mu\nu} j_\nu$ 是四维矢量

(3) 若在某惯性系中只有纯电场（纯磁场），则在任意惯性系，$\vec{\boldsymbol{E}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 垂直

若在某惯性系中 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 垂直，则可找到一惯性系 S'，在 S' 观察只有一种场。

(思考：这一种场是电场还是磁场？)

(4) 若在某惯性系中空间某点 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 不平行，总能找到一惯性系 S'，使得在 S' 观察该点的 $\vec{\boldsymbol{E}}\,||\,\vec{\boldsymbol{B}}$。(习题 11.6)

六、洛伦兹力密度公式的协变性

洛伦兹力密度：$\vec{\boldsymbol{f}} = \rho(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}})$

$$f_1 = \rho(E_1 + v_2B_3 - v_3B_2) = j_2B_3 - j_3B_2 + \rho E_1 = j_2F_{12} + j_3F_{13} + j_4F_{14}$$

利用了 $F_{14} = -\dfrac{i}{c}E_1$，$F_{13} = -B_2$，$F_{12} = B_3$

$f_1 = F_{1\nu}j_\nu$ 同理 $f_2 = F_{2\nu}j_\nu$， $f_3 = F_{3\nu}j_\nu$

由于 $F_{\mu\nu}$ 是四维二阶张量，j_ν 是四维矢量，$F_{\mu\nu}j_\nu$ 是四维矢量

洛伦兹力密度是四维矢量 $F_{\mu\nu}j_\nu$ 的前三个分量。

(3) 若在某惯性系中只有纯电场（纯磁场），则在任意惯性系，$\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 垂直

若在某惯性系中 $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 垂直，则可找到一惯性系 S'，在 S' 观察只有一种场。

(思考：这一种场是电场还是磁场？)

(4) 若在某惯性系中空间某点 $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 不平行，总能找到一惯性系 S'，使得在 S' 观察该点的 $\vec{E}\,||\,\vec{B}$。(习题 11.6)

六、洛伦兹力密度公式的协变性

洛伦兹力密度：$\vec{f}=\rho(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$

$$f_1=\rho(E_1+v_2B_3-v_3B_2)=j_2B_3-j_3B_2+\rho E_1=j_2F_{12}+j_3F_{13}+j_4F_{14}$$

利用了 $F_{14}=-\frac{i}{c}E_1$，$F_{13}=-B_2$，$F_{12}=B_3$

$f_1=F_{1\nu}j_\nu$ 同理 $f_2=F_{2\nu}j_\nu$，$f_3=F_{3\nu}j_\nu$

由于 $F_{\mu\nu}$ 是四维二阶张量，j_ν 是四维矢量，$F_{\mu\nu}j_\nu$ 是四维矢量

洛伦兹力密度是四维矢量 $F_{\mu\nu}j_\nu$ 的前三个分量。

第四个分量：$F_{4\nu}j_\nu=F_{41}j_1+F_{42}j_2+F_{43}j_3+F_{44}j_4$

$$=\frac{i}{c}E_1j_1+\frac{i}{c}E_2j_2+\frac{i}{c}E_3j_3$$

(3) 若在某惯性系中只有纯电场（纯磁场），则在任意惯性系，$\vec{\boldsymbol{E}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 垂直

若在某惯性系中 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 垂直，则可找到一惯性系 S'，在 S' 观察只有一种场。

(思考：这一种场是电场还是磁场？)

(4) 若在某惯性系中空间某点 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 不平行，总能找到一惯性系 S'，使得在 S' 观察该点的 $\vec{\boldsymbol{E}} \,||\, \vec{\boldsymbol{B}}$。(习题 11.6)

六、洛伦兹力密度公式的协变性

洛伦兹力密度：$\vec{\boldsymbol{f}} = \rho(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}})$

$$f_1 = \rho(E_1 + v_2 B_3 - v_3 B_2) = j_2 B_3 - j_3 B_2 + \rho E_1 = j_2 F_{12} + j_3 F_{13} + j_4 F_{14}$$

利用了 $F_{14} = -\frac{i}{c} E_1$，$F_{13} = -B_2$，$F_{12} = B_3$

$f_1 = F_{1\nu} j_\nu$ 同理 $f_2 = F_{2\nu} j_\nu$，$f_3 = F_{3\nu} j_\nu$

由于 $F_{\mu\nu}$ 是四维二阶张量，j_ν 是四维矢量，$F_{\mu\nu} j_\nu$ 是四维矢量

洛伦兹力密度是四维矢量 $F_{\mu\nu} j_\nu$ 的前三个分量。

第四个分量：$F_{4\nu} j_\nu = F_{41} j_1 + F_{42} j_2 + F_{43} j_3 + F_{44} j_4$

$$= \frac{i}{c} E_1 j_1 + \frac{i}{c} E_2 j_2 + \frac{i}{c} E_3 j_3 = \frac{i}{c} \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}$$

(3) 若在某惯性系中只有纯电场（纯磁场），则在任意惯性系，$\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 垂直

若在某惯性系中 $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 垂直，则可找到一惯性系 S'，在 S' 观察只有一种场。

(思考：这一种场是电场还是磁场？)

(4) 若在某惯性系中空间某点 $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 不平行，总能找到一惯性系 S'，使得在 S' 观察该点的 $\vec{E} \,||\, \vec{B}$。(习题 11.6)

六、洛伦兹力密度公式的协变性

洛伦兹力密度：$\vec{f} = \rho(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

$$f_1 = \rho(E_1 + v_2 B_3 - v_3 B_2) = j_2 B_3 - j_3 B_2 + \rho E_1 = j_2 F_{12} + j_3 F_{13} + j_4 F_{14}$$

利用了 $F_{14} = -\frac{i}{c}E_1$，$F_{13} = -B_2$，$F_{12} = B_3$

$f_1 = F_{1\nu} j_\nu$　　同理　$f_2 = F_{2\nu} j_\nu$，　$f_3 = F_{3\nu} j_\nu$

由于 $F_{\mu\nu}$ 是四维二阶张量，j_ν 是四维矢量，$F_{\mu\nu} j_\nu$ 是四维矢量

洛伦兹力密度是四维矢量 $F_{\mu\nu} j_\nu$ 的前三个分量。

第四个分量：$F_{4\nu} j_\nu = F_{41} j_1 + F_{42} j_2 + F_{43} j_3 + F_{44} j_4$

$$= \frac{i}{c}E_1 j_1 + \frac{i}{c}E_2 j_2 + \frac{i}{c}E_3 j_3 = \frac{i}{c}\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{i}{c}\vec{v} \cdot \vec{f}$$

洛伦兹力密度和电磁场对电荷系统做功的功率密度构成四维力密度矢量：

$$f_\mu = F_{\mu\nu} j_\nu = (\vec{\boldsymbol{f}},\ \frac{i}{c}\,\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}) = (\vec{\boldsymbol{f}},\ \frac{i}{c}\,\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{f}})$$

洛伦兹力密度和电磁场对电荷系统做功的功率密度构成四维力密度矢量：

$$f_\mu = F_{\mu\nu} j_\nu = (\vec{\boldsymbol{f}}, \frac{i}{c}\,\vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}) = (\vec{\boldsymbol{f}}, \frac{i}{c}\,\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{f}})$$

进一步定义四维洛伦兹力矢量：$K_\mu = \int f_\mu \, \mathrm{d}\tau_0 = \gamma \int f_\mu \, \mathrm{d}\tau$

洛伦兹力密度和电磁场对电荷系统做功的功率密度构成四维力密度矢量：

$$f_\mu = F_{\mu\nu} j_\nu = (\vec{\boldsymbol{f}},\ \frac{i}{c}\,\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}) = (\vec{\boldsymbol{f}},\ \frac{i}{c}\,\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{f}})$$

进一步定义四维洛伦兹力矢量：$K_\mu = \int f_\mu\,\mathrm{d}\tau_0 = \gamma \int f_\mu\,\mathrm{d}\tau$

因为固有体积 $\mathrm{d}\tau_0$ 是四维标量，因此 K_μ 是四维矢量。

洛伦兹力密度和电磁场对电荷系统做功的功率密度构成四维力密度矢量：

$$f_\mu = F_{\mu\nu} j_\nu = (\vec{\boldsymbol{f}},\ \frac{i}{c}\,\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}) = (\vec{\boldsymbol{f}},\ \frac{i}{c}\,\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{f}})$$

进一步定义四维洛伦兹力矢量：$K_\mu = \displaystyle\int f_\mu \,\mathrm{d}\tau_0 = \gamma \int f_\mu \,\mathrm{d}\tau$

因为固有体积 $\mathrm{d}\tau_0$ 是四维标量，因此 K_μ 是四维矢量。

三维洛伦兹力本身：$F_i = \displaystyle\int f_i \,\mathrm{d}\tau$ 不是四维矢量，甚至不是四维力矢量的分量。

洛伦兹力密度和电磁场对电荷系统做功的功率密度构成四维力密度矢量：

$$f_\mu = F_{\mu\nu} j_\nu = (\vec{\boldsymbol{f}},\ \frac{i}{c}\,\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}) = (\vec{\boldsymbol{f}},\ \frac{i}{c}\,\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{f}})$$

进一步定义四维洛伦兹力矢量：$K_\mu = \displaystyle\int f_\mu\,\mathrm{d}\tau_0 = \gamma \int f_\mu\,\mathrm{d}\tau$

因为固有体积 $\mathrm{d}\tau_0$ 是四维标量，因此 K_μ 是四维矢量。

三维洛伦兹力本身：$F_i = \displaystyle\int f_i\,\mathrm{d}\tau$ 不是四维矢量，甚至不是四维力矢量的分量。
正如三维速度本身不是四维矢量，也不是四维速度的分量。

洛伦兹力密度和电磁场对电荷系统做功的功率密度构成四维力密度矢量：

$$f_\mu = F_{\mu\nu} j_\nu = (\vec{\boldsymbol{f}},\ \frac{i}{c}\,\vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}) = (\vec{\boldsymbol{f}},\ \frac{i}{c}\,\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{f}})$$

进一步定义四维洛伦兹力矢量：$K_\mu = \displaystyle\int f_\mu \,\mathrm{d}\tau_0 = \gamma \int f_\mu \,\mathrm{d}\tau$

因为固有体积 $\mathrm{d}\tau_0$ 是四维标量，因此 K_μ 是四维矢量。

三维洛伦兹力本身：$F_i = \displaystyle\int f_i \,\mathrm{d}\tau$ 不是四维矢量，甚至不是四维力矢量的分量。

正如三维速度本身不是四维矢量，也不是四维速度的分量。

对点电荷：$\vec{\boldsymbol{j}} \implies q\vec{\boldsymbol{v}},\quad j_\mu \implies qU_\mu,$ 从而

对点电荷，四维力矢量为：$K_\mu = F_{\mu\nu} j_\nu = qF_{\mu\nu}U_\nu = \gamma_u\big(\vec{\boldsymbol{F}},\ \frac{i}{c}\,\vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}\big),$

洛伦兹力密度和电磁场对电荷系统做功的功率密度构成四维力密度矢量：

$$f_\mu = F_{\mu\nu} j_\nu = (\vec{\boldsymbol{f}},\ \frac{i}{c}\,\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}) = (\vec{\boldsymbol{f}},\ \frac{i}{c}\,\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{f}})$$

进一步定义四维洛伦兹力矢量：$K_\mu = \displaystyle\int f_\mu\,\mathrm{d}\tau_0 = \gamma \int f_\mu\,\mathrm{d}\tau$

因为固有体积 $\mathrm{d}\tau_0$ 是四维标量，因此 K_μ 是四维矢量。

三维洛伦兹力本身：$F_i = \displaystyle\int f_i\,\mathrm{d}\tau$ 不是四维矢量，甚至不是四维力矢量的分量。
正如三维速度本身不是四维矢量，也不是四维速度的分量。

对点电荷：$\vec{\boldsymbol{j}} \quad\Longrightarrow\quad q\vec{\boldsymbol{v}},\quad j_\mu \quad\Longrightarrow\quad qU_\mu,$ 从而

对点电荷，四维力矢量为：$K_\mu = F_{\mu\nu} j_\nu = qF_{\mu\nu}U_\nu = \gamma_u\Big(\vec{\boldsymbol{F}},\ \dfrac{i}{c}\,\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}\Big),$

$$\vec{\boldsymbol{F}} = q(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{B}}) \qquad \gamma_u = 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$$

洛伦兹力密度和电磁场对电荷系统做功的功率密度构成四维力密度矢量：

$$f_\mu = F_{\mu\nu} j_\nu = (\vec{\boldsymbol{f}},\ \frac{i}{c}\,\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}) = (\vec{\boldsymbol{f}},\ \frac{i}{c}\,\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{f}})$$

进一步定义四维洛伦兹力矢量：$K_\mu = \int f_\mu\,\mathrm{d}\tau_0 = \gamma \int f_\mu\,\mathrm{d}\tau$

因为固有体积 $\mathrm{d}\tau_0$ 是四维标量，因此 K_μ 是四维矢量。

三维洛伦兹力本身：$F_i = \int f_i\,\mathrm{d}\tau$ 不是四维矢量，甚至不是四维力矢量的分量。正如三维速度本身不是四维矢量，也不是四维速度的分量。

对点电荷：$\vec{\boldsymbol{j}} \implies q\vec{\boldsymbol{v}},\quad j_\mu \implies qU_\mu,$ 从而

对点电荷，四维力矢量为：$K_\mu = F_{\mu\nu} j_\nu = qF_{\mu\nu}U_\nu = \gamma_u\big(\vec{\boldsymbol{F}},\ \frac{i}{c}\,\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}\big),$

$$\vec{\boldsymbol{F}} = q(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{B}}) \qquad \gamma_u = 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$$

四维力变换：$K'_\mu = a_{\mu\nu}K_\nu$

七、电场、相对论、磁场

七、电场、相对论、磁场

由不同惯性系电磁场的变换关系，可知，在某个惯性系若只有电场，

七、电场、相对论、磁场

由不同惯性系电磁场的变换关系，可知，在某个惯性系若只有电场，
在另一惯性系，必同时存在电磁场。

七、电场、相对论、磁场

由不同惯性系电磁场的变换关系，可知，在某个惯性系若只有电场，

在另一惯性系，必同时存在电磁场。

因此，在相对论中，电场和磁场是统一的，是一个物理量的两个不同表象。

七、电场、相对论、磁场

由不同惯性系电磁场的变换关系，可知，在某个惯性系若只有电场，

在另一惯性系，必同时存在电磁场。

因此，在相对论中，电场和磁场是统一的，是一个物理量的两个不同表象。

下通过几个物理实例，希望能从物理上看的更清楚一些。

七、电场、相对论、磁场

由不同惯性系电磁场的变换关系，可知，在某个惯性系若只有电场，

在另一惯性系，必同时存在电磁场。

因此，在相对论中，电场和磁场是统一的，是一个物理量的两个不同表象。

下通过几个物理实例，希望能从物理上看的更清楚一些。

例 1：在地面惯性系 S 的 x 轴上放置两根带电导线，在 S 系上观察，导线 A 以速度 v 沿正 x 向运动，其电荷线密度为 λ，导线 B 以速度 v 沿负 x 向运动，其电荷线密度为 $-\lambda$。在距 x 轴 a 处有一点电荷 q 以速度 $u < v$ 沿正 x 向运动。求

(a) 在导线 A 惯性系 S_A 上，导线 A 和导线 B 的电荷线密度

(b) 在点电荷惯性系 S_q 上，两根导线各自的运动速度

(c) 在点电荷惯性系 S_q 上，两根导线上的电荷线密度及 x 轴上的电荷线密度

(d) 在点电荷惯性系 S_q 上，点电荷 q 所受到的力，并说明是电力或磁力

(e) 由(d)的结果，通过四维力矢量变换，求在地面惯性系 S 上观察 q 的受力

(f) 直接在地面惯性系 S 中，求点电荷 q 所受到的力，并说明是电力或磁力

(a) 在 S_A 观察，导线 A 的线密度为：$\lambda_{AA} = \dfrac{\lambda}{\gamma_v} = \lambda_0$，其中 $\gamma_v = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $\quad \beta = \dfrac{v}{c}$

(a) 在 S_A 观察，导线 A 的线密度为：$\lambda_{AA} = \dfrac{\lambda}{\gamma_v} = \lambda_0$，其中 $\gamma_v = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \dfrac{v}{c}$

由速度变换关系，B 相对于 A 的速度为：$v_B = \dfrac{-2v}{1+v^2/c^2}$，

(a) 在 S_A 观察，导线 A 的线密度为：$\lambda_{AA} = \dfrac{\lambda}{\gamma_v} = \lambda_0$，其中 $\gamma_v = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \dfrac{v}{c}$

由速度变换关系，B 相对于 A 的速度为：$v_B = \dfrac{-2v}{1+v^2/c^2}$，

故在S_A，导线 B 的线密度为：$-\lambda_0\gamma_B'$，其中 $\gamma_{BA}' = \dfrac{1}{\sqrt{1-v_B^2/c^2}}$

(a) 在 S_A 观察，导线 A 的线密度为：$\lambda_{AA} = \dfrac{\lambda}{\gamma_v} = \lambda_0$，其中 $\gamma_v = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \dfrac{v}{c}$

由速度变换关系，B 相对于 A 的速度为：$v_B = \dfrac{-2v}{1+v^2/c^2}$，

故在S_A，导线 B 的线密度为：$-\lambda_0\gamma'_B$，其中 $\gamma'_{BA} = \dfrac{1}{\sqrt{1-v_B^2/c^2}}$

(b) 利用速度变换公式可得在 S_q 观察

(a) 在 S_A 观察，导线 A 的线密度为：$\lambda_{AA} = \dfrac{\lambda}{\gamma_v} = \lambda_0$，其中 $\gamma_v = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $\beta = \dfrac{v}{c}$

由速度变换关系，B 相对于 A 的速度为：$v_B = \dfrac{-2v}{1+v^2/c^2}$，

故在S_A，导线 B 的线密度为：$-\lambda_0\gamma'_B$，其中 $\gamma'_{BA} = \dfrac{1}{\sqrt{1-v_B^2/c^2}}$

(b) 利用速度变换公式可得在 S_q 观察

导线 A 的速度u_A为：$u_A = \dfrac{v-u}{1-uv/c^2}$

(a) 在 S_A 观察，导线 A 的线密度为：$\lambda_{AA} = \dfrac{\lambda}{\gamma_v} = \lambda_0$，其中 $\gamma_v = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $\quad \beta = \dfrac{v}{c}$

由速度变换关系，B 相对于 A 的速度为：$v_B = \dfrac{-2v}{1+v^2/c^2}$，

故在S_A，导线 B 的线密度为：$-\lambda_0\gamma'_B$，其中 $\gamma'_{BA} = \dfrac{1}{\sqrt{1-v_B^2/c^2}}$

(b) 利用速度变换公式可得在 S_q 观察

导线 A 的速度u_A为：$u_A = \dfrac{v-u}{1-uv/c^2}$ $\qquad$ 导线 B 的速度u_B为：$u_B = -\dfrac{v+u}{1+uv/c^2}$

(a) 在 S_A 观察，导线 A 的线密度为：$\lambda_{AA} = \dfrac{\lambda}{\gamma_v} = \lambda_0$，其中 $\gamma_v = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $\beta = \dfrac{v}{c}$

由速度变换关系，B 相对于 A 的速度为：$v_B = \dfrac{-2v}{1+v^2/c^2}$，

故在S_A，导线 B 的线密度为：$-\lambda_0\gamma'_B$，其中 $\gamma'_{BA} = \dfrac{1}{\sqrt{1-v_B^2/c^2}}$

(b) 利用速度变换公式可得在 S_q 观察

导线 A 的速度u_A为：$u_A = \dfrac{v-u}{1-uv/c^2}$ 导线 B 的速度u_B为：$u_B = -\dfrac{v+u}{1+uv/c^2}$

(c) 在 S_q 观察，导线 A 的线密度为：$\lambda_A = \lambda_0\gamma_A$，导线$B$的线密度为：$\lambda_B = \lambda_0\gamma_B$

(a) 在 S_A 观察，导线 A 的线密度为：$\lambda_{AA}=\dfrac{\lambda}{\gamma_v}=\lambda_0$，其中 $\gamma_v=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $\beta=\dfrac{v}{c}$

由速度变换关系，B 相对于 A 的速度为：$v_B=\dfrac{-2v}{1+v^2/c^2}$，

故在S_A，导线 B 的线密度为：$-\lambda_0\gamma'_B$，其中 $\gamma'_{BA}=\dfrac{1}{\sqrt{1-v_B^2/c^2}}$

(b) 利用速度变换公式可得在 S_q 观察

导线 A 的速度u_A为：$u_A=\dfrac{v-u}{1-uv/c^2}$ 导线 B 的速度u_B为：$u_B=-\dfrac{v+u}{1+uv/c^2}$

(c) 在 S_q 观察，导线 A 的线密度为：$\lambda_A=\lambda_0\gamma_A$，导线$B$的线密度为：$\lambda_B=\lambda_0\gamma_B$

其中：$\gamma_A=\dfrac{1}{\sqrt{1-u_A^2/c^2}}$ $\gamma_B=\dfrac{1}{\sqrt{1-u_B^2/c^2}}$

(a) 在 S_A 观察，导线 A 的线密度为：$\lambda_{AA} = \dfrac{\lambda}{\gamma_v} = \lambda_0$，其中 $\gamma_v = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $\quad \beta = \dfrac{v}{c}$

由速度变换关系，B 相对于 A 的速度为：$v_B = \dfrac{-2v}{1+v^2/c^2}$，

故在S_A，导线 B 的线密度为：$-\lambda_0\gamma'_B$，其中 $\gamma'_{BA} = \dfrac{1}{\sqrt{1-v_B^2/c^2}}$

(b) 利用速度变换公式可得在 S_q 观察

导线 A 的速度u_A为：$u_A = \dfrac{v-u}{1-uv/c^2}$ $\qquad$ 导线 B 的速度u_B为：$u_B = -\dfrac{v+u}{1+uv/c^2}$

(c) 在 S_q 观察，导线 A 的线密度为：$\lambda_A = \lambda_0\gamma_A$，导线$B$的线密度为：$\lambda_B = \lambda_0\gamma_B$

其中：$\gamma_A = \dfrac{1}{\sqrt{1-u_A^2/c^2}}$ $\quad \gamma_B = \dfrac{1}{\sqrt{1-u_B^2/c^2}}$

化简为：$\lambda_A = \gamma_u(1-\dfrac{uv}{c^2})\lambda$， $\quad \lambda_B = -\gamma_u(1+\dfrac{uv}{c^2})\lambda$

(a) 在 S_A 观察，导线 A 的线密度为：$\lambda_{AA} = \dfrac{\lambda}{\gamma_v} = \lambda_0$，其中 $\gamma_v = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $\quad \beta = \dfrac{v}{c}$

由速度变换关系，B 相对于 A 的速度为：$v_B = \dfrac{-2v}{1+v^2/c^2}$，

故在S_A，导线 B 的线密度为：$-\lambda_0\gamma'_B$，其中 $\gamma'_{BA} = \dfrac{1}{\sqrt{1-v_B^2/c^2}}$

(b) 利用速度变换公式可得在 S_q 观察

导线 A 的速度u_A为：$u_A = \dfrac{v-u}{1-uv/c^2}$ $\quad$ 导线 B 的速度u_B为：$u_B = -\dfrac{v+u}{1+uv/c^2}$

(c) 在 S_q 观察，导线 A 的线密度为：$\lambda_A = \lambda_0\gamma_A$，导线$B$的线密度为：$\lambda_B = \lambda_0\gamma_B$

其中：$\gamma_A = \dfrac{1}{\sqrt{1-u_A^2/c^2}}$ $\quad \gamma_B = \dfrac{1}{\sqrt{1-u_B^2/c^2}}$

化简为：$\lambda_A = \gamma_u(1-\dfrac{uv}{c^2})\lambda$，$\quad \lambda_B = -\gamma_u(1+\dfrac{uv}{c^2})\lambda$ $\quad$ 其中 $\gamma_u = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$.

(a) 在 S_A 观察，导线 A 的线密度为：$\lambda_{AA}=\dfrac{\lambda}{\gamma_v}=\lambda_0$，其中 $\gamma_v=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $\quad\beta=\dfrac{v}{c}$

由速度变换关系，B 相对于 A 的速度为：$v_B=\dfrac{-2v}{1+v^2/c^2}$，

故在S_A，导线 B 的线密度为：$-\lambda_0\gamma'_B$，其中 $\gamma'_{BA}=\dfrac{1}{\sqrt{1-v_B^2/c^2}}$

(b) 利用速度变换公式可得在 S_q 观察

导线 A 的速度u_A为：$u_A=\dfrac{v-u}{1-uv/c^2}$ 导线 B 的速度u_B为：$u_B=-\dfrac{v+u}{1+uv/c^2}$

(c) 在 S_q 观察，导线 A 的线密度为：$\lambda_A=\lambda_0\gamma_A$，导线$B$的线密度为：$\lambda_B=\lambda_0\gamma_B$

其中：$\gamma_A=\dfrac{1}{\sqrt{1-u_A^2/c^2}}$ $\quad\gamma_B=\dfrac{1}{\sqrt{1-u_B^2/c^2}}$

化简为：$\lambda_A=\gamma_u(1-\dfrac{uv}{c^2})\lambda$， $\quad\lambda_B=-\gamma_u(1+\dfrac{uv}{c^2})\lambda$ $\quad$ 其中 $\gamma_u=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$.

x 轴上的电荷线密度为：$\lambda_x=\lambda_A+\lambda_B=-2\gamma_u\dfrac{uv}{c^2}\lambda$

(a) 在 S_A 观察，导线 A 的线密度为：$\lambda_{AA} = \dfrac{\lambda}{\gamma_v} = \lambda_0$，其中 $\gamma_v = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $\beta = \dfrac{v}{c}$

由速度变换关系，B 相对于 A 的速度为：$v_B = \dfrac{-2v}{1+v^2/c^2}$,

故在S_A，导线 B 的线密度为：$-\lambda_0\gamma'_B$，其中 $\gamma'_{BA} = \dfrac{1}{\sqrt{1-v_B^2/c^2}}$

(b) 利用速度变换公式可得在 S_q 观察

导线 A 的速度u_A为：$u_A = \dfrac{v-u}{1-uv/c^2}$ 导线 B 的速度u_B为：$u_B = -\dfrac{v+u}{1+uv/c^2}$

(c) 在 S_q 观察，导线 A 的线密度为：$\lambda_A = \lambda_0\gamma_A$，导线$B$的线密度为：$\lambda_B = \lambda_0\gamma_B$

其中：$\gamma_A = \dfrac{1}{\sqrt{1-u_A^2/c^2}}$ $\gamma_B = \dfrac{1}{\sqrt{1-u_B^2/c^2}}$

化简为：$\lambda_A = \gamma_u(1-\dfrac{uv}{c^2})\lambda$， $\lambda_B = -\gamma_u(1+\dfrac{uv}{c^2})\lambda$ 其中 $\gamma_u = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$.

x 轴上的电荷线密度为：$\lambda_x = \lambda_A + \lambda_B = -2\gamma_u\dfrac{uv}{c^2}\lambda$

(d) 在 S_q 系，电荷不动，只受电力作用。相当于受一无穷长的线电荷密度为 λ_x 的线电荷作用

(a) 在 S_A 观察，导线 A 的线密度为：$\lambda_{AA} = \dfrac{\lambda}{\gamma_v} = \lambda_0$，其中 $\gamma_v = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $\beta = \dfrac{v}{c}$

由速度变换关系，B 相对于 A 的速度为：$v_B = \dfrac{-2v}{1+v^2/c^2}$，

故在S_A，导线 B 的线密度为：$-\lambda_0\gamma'_B$，其中 $\gamma'_{BA} = \dfrac{1}{\sqrt{1-v_B^2/c^2}}$

(b) 利用速度变换公式可得在 S_q 观察

导线 A 的速度u_A为：$u_A = \dfrac{v-u}{1-uv/c^2}$ 导线 B 的速度u_B为：$u_B = -\dfrac{v+u}{1+uv/c^2}$

(c) 在 S_q 观察，导线 A 的线密度为：$\lambda_A = \lambda_0\gamma_A$，导线$B$的线密度为：$\lambda_B = \lambda_0\gamma_B$

其中：$\gamma_A = \dfrac{1}{\sqrt{1-u_A^2/c^2}}$ $\gamma_B = \dfrac{1}{\sqrt{1-u_B^2/c^2}}$

化简为：$\lambda_A = \gamma_u(1-\dfrac{uv}{c^2})\lambda$， $\lambda_B = -\gamma_u(1+\dfrac{uv}{c^2})\lambda$ 其中 $\gamma_u = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$.

x 轴上的电荷线密度为：$\lambda_x = \lambda_A + \lambda_B = -2\gamma_u\dfrac{uv}{c^2}\lambda$

(d) 在 S_q 系，电荷不动，只受电力作用。相当于受一无穷长的线电荷密度为 λ_x 的线电荷作用

受力为：$F_q = qE = \dfrac{q\lambda_x}{2\pi\epsilon_0 a} = \dfrac{-q\gamma_u\lambda uv}{\pi\epsilon_0 ac^2}$

(e) 在地面系 S，注意到力的方向与运动方向垂直，易由力的变换公式求得在 S 系看

(e) 在地面系 S，注意到力的方向与运动方向垂直，易由力的变换公式求得在 S 系看 q 受力 F_{qS}满足：$\gamma_u F_{qS} = 1F_q$，故：$F_{qS} = \dfrac{F_q}{\gamma_u} = \dfrac{-q\lambda uv}{\pi\epsilon_0 ac^2}$，

(e) 在地面系 S，注意到力的方向与运动方向垂直，易由力的变换公式求得在 S 系看 q 受力F_{qS}满足：$\gamma_u F_{qS} = 1F_q$，故：$F_{qS} = \dfrac{F_q}{\gamma_u} = \dfrac{-q\lambda uv}{\pi\epsilon_0 ac^2}$，　负号表示电荷被吸向导线

(e) 在地面系 S，注意到力的方向与运动方向垂直，易由力的变换公式求得在 S 系看 q 受力F_{qS}满足：$\gamma_u F_{qS} = 1F_q$，故：$F_{qS} = \dfrac{F_q}{\gamma_u} = \dfrac{-q\lambda uv}{\pi\epsilon_0 ac^2}$， 负号表示电荷被吸向导线

(f) 在 S 系看，x 轴的有效电荷线密度为 0，但流有电流 $I = 2\lambda v$，磁感应强度 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$，

(e) 在地面系 S，注意到力的方向与运动方向垂直，易由力的变换公式求得在 S 系看 q 受力F_{qS}满足：$\gamma_u F_{qS} = 1F_q$，故：$F_{qS} = \dfrac{F_q}{\gamma_u} = \dfrac{-q\lambda uv}{\pi\epsilon_0 ac^2}$， 负号表示电荷被吸向导线

(f) 在 S 系看，x 轴的有效电荷线密度为 0，但流有电流 $I = 2\lambda v$，磁感应强度 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$，故运动点电荷 q 受磁力F作用，$F = q\vec{u} \times \vec{B} = \dfrac{q\mu_0 Iu}{2\pi a} = \dfrac{\lambda quv}{\pi\epsilon_0 ac^2}$，

(e) 在地面系 S，注意到力的方向与运动方向垂直，易由力的变换公式求得在 S 系看 q 受力F_{qS}满足：$\gamma_u F_{qS} = 1F_q$，故：$F_{qS} = \dfrac{F_q}{\gamma_u} = \dfrac{-q\lambda uv}{\pi\epsilon_0 ac^2}$，　负号表示电荷被吸向导线

(f) 在 S 系看，x 轴的有效电荷线密度为 0，但流有电流 $I = 2\lambda v$，磁感应强度 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$，故运动点电荷 q 受磁力F作用，$F = q\vec{u} \times \vec{B} = \dfrac{q\mu_0 Iu}{2\pi a} = \dfrac{\lambda quv}{\pi\epsilon_0 ac^2}$，电荷被吸向导线。其中利用了 $c^2 = 1/(\epsilon_0\mu_0)$。

(e) 在地面系 S，注意到力的方向与运动方向垂直，易由力的变换公式求得在 S 系看 q 受力 F_{qS}满足：$\gamma_u F_{qS} = 1F_q$，故：$F_{qS} = \dfrac{F_q}{\gamma_u} = \dfrac{-q\lambda uv}{\pi\epsilon_0 ac^2}$， 负号表示电荷被吸向导线

(f) 在 S 系看，x 轴的有效电荷线密度为 0，但流有电流 $I = 2\lambda v$，磁感应强度 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$，故运动点电荷 q 受磁力 F作用，$F = q\vec{u} \times \vec{B} = \dfrac{q\mu_0 Iu}{2\pi a} = \dfrac{\lambda quv}{\pi\epsilon_0 ac^2}$，电荷被吸向导线。其中利用了 $c^2 = 1/(\epsilon_0\mu_0)$。

(g) 比较 (e) 和 (f) 的结果知: $F = F_{qS}$。

(e) 在地面系 S，注意到力的方向与运动方向垂直，易由力的变换公式求得在 S 系看 q 受力 F_{qS} 满足：$\gamma_u F_{qS} = 1F_q$，故：$F_{qS} = \dfrac{F_q}{\gamma_u} = \dfrac{-q\lambda uv}{\pi\epsilon_0 ac^2}$， 负号表示电荷被吸向导线

(f) 在 S 系看，x 轴的有效电荷线密度为 0，但流有电流 $I = 2\lambda v$，磁感应强度 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$，故运动点电荷 q 受磁力 F 作用，$F = q\vec{u} \times \vec{B} = \dfrac{q\mu_0 Iu}{2\pi a} = \dfrac{\lambda quv}{\pi\epsilon_0 ac^2}$，电荷被吸向导线。其中利用了 $c^2 = 1/(\epsilon_0\mu_0)$。

(g) 比较 (e) 和 (f) 的结果知: $F = F_{qS}$。
注意 F_{qS} 是纯电力，F 是纯磁力。

(e) 在地面系 S，注意到力的方向与运动方向垂直，易由力的变换公式求得在 S 系看 q 受力F_{qS}满足：$\gamma_u F_{qS} = 1F_q$，故：$F_{qS} = \dfrac{F_q}{\gamma_u} = \dfrac{-q\lambda uv}{\pi\epsilon_0 ac^2}$，　负号表示电荷被吸向导线

(f) 在 S 系看，x 轴的有效电荷线密度为 0，但流有电流 $I = 2\lambda v$，磁感应强度 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$，故运动点电荷 q 受磁力F作用，$F = q\vec{u} \times \vec{B} = \dfrac{q\mu_0 Iu}{2\pi a} = \dfrac{\lambda quv}{\pi\epsilon_0 ac^2}$，电荷被吸向导线。其中利用了 $c^2 = 1/(\epsilon_0\mu_0)$。

(g) 比较 (e) 和 (f) 的结果知: $F = F_{qS}$。
注意 F_{qS} 是纯电力，F 是纯磁力。 在狭义相对论中，电磁是统一的。

(e) 在地面系 S，注意到力的方向与运动方向垂直，易由力的变换公式求得在 S 系看 q 受力F_{qS}满足：$\gamma_u F_{qS} = 1F_q$，故：$F_{qS} = \dfrac{F_q}{\gamma_u} = \dfrac{-q\lambda uv}{\pi\epsilon_0 ac^2}$， 负号表示电荷被吸向导线

(f) 在 S 系看，x 轴的有效电荷线密度为 0，但流有电流 $I = 2\lambda v$，磁感应强度 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$，故运动点电荷 q 受磁力F作用，$F = q\vec{u} \times \vec{B} = \dfrac{q\mu_0 Iu}{2\pi a} = \dfrac{\lambda quv}{\pi\epsilon_0 ac^2}$，电荷被吸向导线。其中利用了 $c^2 = 1/(\epsilon_0\mu_0)$。

(g) 比较 (e) 和 (f) 的结果知: $F = F_{qS}$。
注意 F_{qS} 是纯电力，F 是纯磁力。 在狭义相对论中，电磁是统一的。

例 2：从简单实例导出电磁场的变换关系。

$$\vec{\boldsymbol{E}}'_{||} = \vec{\boldsymbol{E}}_{||} \qquad \vec{\boldsymbol{B}}'_{||} = \vec{\boldsymbol{B}}_{||}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}'_{\perp} = \gamma(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}})_{\perp} \qquad \vec{\boldsymbol{B}}'_{\perp} = \gamma(\vec{\boldsymbol{B}} - \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{E}}/c^2)_{\perp}$$

(e)　在地面系 S，注意到力的方向与运动方向垂直，易由力的变换公式求得在 S 系看 q 受力F_{qS}满足：$\gamma_u F_{qS} = 1F_q$，故：$F_{qS} = \dfrac{F_q}{\gamma_u} = \dfrac{-q\lambda uv}{\pi\epsilon_0 ac^2}$，　负号表示电荷被吸向导线

(f)　在 S 系看，x 轴的有效电荷线密度为 0，但流有电流 $I = 2\lambda v$，磁感应强度 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$，故运动点电荷 q 受磁力F作用，$F = q\vec{u}\times\vec{B} = \dfrac{q\mu_0 Iu}{2\pi a} = \dfrac{\lambda quv}{\pi\epsilon_0 ac^2}$，电荷被吸向导线。其中利用了 $c^2 = 1/(\epsilon_0\mu_0)$。

(g)　比较 (e) 和 (f) 的结果知: $F = F_{qS}$。
注意 F_{qS} 是纯电力，F 是纯磁力。 在狭义相对论中，电磁是统一的。

例 2：从简单实例导出电磁场的变换关系。

$$\vec{\boldsymbol{E}}'_{||} = \vec{\boldsymbol{E}}_{||} \qquad\qquad \vec{\boldsymbol{B}}'_{||} = \vec{\boldsymbol{B}}_{||}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}'_{\perp} = \gamma(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{B}})_{\perp} \qquad\qquad \vec{\boldsymbol{B}}'_{\perp} = \gamma(\vec{\boldsymbol{B}} - \vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{E}}/c^2)_{\perp}$$

一对无限大平行板在 $z = \pm a$ 平面：在平行板惯性系 S_0 观察，上下板的面密度分别为：$\pm\sigma_0$

(e) 在地面系 S，注意到力的方向与运动方向垂直，易由力的变换公式求得在 S 系看 q 受力F_{qS}满足：$\gamma_u F_{qS} = 1F_q$，故：$F_{qS} = \dfrac{F_q}{\gamma_u} = \dfrac{-q\lambda uv}{\pi\epsilon_0 ac^2}$， 负号表示电荷被吸向导线

(f) 在 S 系看，x 轴的有效电荷线密度为 0，但流有电流 $I = 2\lambda v$，磁感应强度 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$，
故运动点电荷 q 受磁力F作用，$F = q\vec{u}\times\vec{B} = \dfrac{q\mu_0 Iu}{2\pi a} = \dfrac{\lambda quv}{\pi\epsilon_0 ac^2}$，
电荷被吸向导线。其中利用了 $c^2 = 1/(\epsilon_0\mu_0)$。

(g) 比较 (e) 和 (f) 的结果知: $F = F_{qS}$。
注意 F_{qS} 是纯电力，F 是纯磁力。 在狭义相对论中，电磁是统一的。

例 2：从简单实例导出电磁场的变换关系。

$$\vec{\boldsymbol{E}}'_{||} = \vec{\boldsymbol{E}}_{||} \qquad\qquad \vec{\boldsymbol{B}}'_{||} = \vec{\boldsymbol{B}}_{||}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}'_{\perp} = \gamma(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{B}})_{\perp} \qquad\qquad \vec{\boldsymbol{B}}'_{\perp} = \gamma(\vec{\boldsymbol{B}} - \vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{E}}/c^2)_{\perp}$$

一对无限大平行板在 $z = \pm a$ 平面：在平行板惯性系 S_0 观察，上下板的面密度分别为：$\pm\sigma_0$

在 S_0 系观察，板间只有电场：$\vec{\boldsymbol{E}}_0 = -\dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0}\ \hat{\boldsymbol{e}}_z$

(e) 在地面系 S，注意到力的方向与运动方向垂直，易由力的变换公式求得在 S 系看 q 受力F_{qS}满足：$\gamma_u F_{qS} = 1F_q$，故：$F_{qS} = \dfrac{F_q}{\gamma_u} = \dfrac{-q\lambda uv}{\pi\epsilon_0 ac^2}$， 负号表示电荷被吸向导线

(f) 在 S 系看，x 轴的有效电荷线密度为 0，但流有电流 $I = 2\lambda v$，磁感应强度 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$，
故运动点电荷 q 受磁力F作用，$F = q\vec{u}\times\vec{B} = \dfrac{q\mu_0 Iu}{2\pi a} = \dfrac{\lambda quv}{\pi\epsilon_0 ac^2}$，
电荷被吸向导线。其中利用了 $c^2 = 1/(\epsilon_0\mu_0)$。

(g) 比较 (e) 和 (f) 的结果知: $F = F_{qS}$。
注意 F_{qS} 是纯电力，F 是纯磁力。 在狭义相对论中，电磁是统一的。

例 2：从简单实例导出电磁场的变换关系。

$$\vec{\boldsymbol{E}}'_{||} = \vec{\boldsymbol{E}}_{||} \qquad\qquad \vec{\boldsymbol{B}}'_{||} = \vec{\boldsymbol{B}}_{||}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}'_{\perp} = \gamma(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{B}})_{\perp} \qquad\qquad \vec{\boldsymbol{B}}'_{\perp} = \gamma(\vec{\boldsymbol{B}} - \vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{E}}/c^2)_{\perp}$$

一对无限大平行板在 $z = \pm a$ 平面：在平行板惯性系 S_0 观察，上下板的面密度分别为：$\pm\sigma_0$

在 S_0 系观察，板间只有电场：$\vec{\boldsymbol{E}}_0 = -\dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

设有一惯性系 S 相对于 S_0 以速度 v_0 沿 $+x$ 方向运动，在 S 系观察上，板间电场 $\vec{\boldsymbol{E}} = ?$

(e) 在地面系 S，注意到力的方向与运动方向垂直，易由力的变换公式求得在 S 系看 q 受力F_{qS}满足：$\gamma_u F_{qS} = 1F_q$，故：$F_{qS} = \dfrac{F_q}{\gamma_u} = \dfrac{-q\lambda uv}{\pi\epsilon_0 ac^2}$， 负号表示电荷被吸向导线

(f) 在 S 系看，x 轴的有效电荷线密度为 0，但流有电流 $I = 2\lambda v$，磁感应强度 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$，故运动点电荷 q 受磁力F作用，$F = q\vec{u} \times \vec{B} = \dfrac{q\mu_0 Iu}{2\pi a} = \dfrac{\lambda quv}{\pi\epsilon_0 ac^2}$，电荷被吸向导线。其中利用了 $c^2 = 1/(\epsilon_0\mu_0)$。

(g) 比较 (e) 和 (f) 的结果知: $F = F_{qS}$。
注意 F_{qS} 是纯电力，F 是纯磁力。 在狭义相对论中，电磁是统一的。

例 2：从简单实例导出电磁场的变换关系。

$$\vec{\boldsymbol{E}}'_{||} = \vec{\boldsymbol{E}}_{||} \qquad \vec{\boldsymbol{B}}'_{||} = \vec{\boldsymbol{B}}_{||}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}'_{\perp} = \gamma(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}})_{\perp} \qquad \vec{\boldsymbol{B}}'_{\perp} = \gamma(\vec{\boldsymbol{B}} - \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{E}}/c^2)_{\perp}$$

一对无限大平行板在 $z = \pm a$ 平面：在平行板惯性系 S_0 观察，上下板的面密度分别为：$\pm\sigma_0$
在 S_0 系观察，板间只有电场：$\vec{\boldsymbol{E}}_0 = -\dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$
设有一惯性系 S 相对于 S_0 以速度 v_0 沿 $+x$ 方向运动，在 S 系观察上，板间电场 $\vec{\boldsymbol{E}} =?$

板间电场仍垂直于平板，因为即使单板的电场有平行于板的分量，上下板的贡献也必反向相消。

板间电场仍垂直于平板，因为即使单板的电场有平行于板的分量，上下板的贡献也必反向相消。

在 S 系观察，由于洛仑兹收缩，板的面电荷密度为 $\pm\,\sigma$， $\sigma = \sigma_0\gamma_0$， $\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

板间电场仍垂直于平板，因为即使单板的电场有平行于板的分量，上下板的贡献也必反向相消。

在 S 系观察，由于洛仑兹收缩，板的面电荷密度为 $\pm\,\sigma$， $\sigma = \sigma_0\gamma_0$， $\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

故板间电场：$\vec{\boldsymbol{E}} = -\sigma/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_z$

板间电场仍垂直于平板，因为即使单板的电场有平行于板的分量，上下板的贡献也必反向相消。

在 S 系观察，由于洛仑兹收缩，板的面电荷密度为 $\pm\sigma$， $\sigma = \sigma_0\gamma_0$， $\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

故板间电场：$\vec{\boldsymbol{E}} = -\sigma/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_z = -(\sigma_0\gamma_0)/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_z = \gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_0$

板间电场仍垂直于平板，因为即使单板的电场有平行于板的分量，上下板的贡献也必反向相消。

在 S 系观察，由于洛仑兹收缩，板的面电荷密度为 $\pm\sigma$， $\sigma = \sigma_0\gamma_0$， $\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

故板间电场：$\vec{\boldsymbol{E}} = -\sigma/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_z = -(\sigma_0\gamma_0)/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_z = \gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_0$

若平板位于 $y = \pm a$，类似地有：$\vec{\boldsymbol{E}} = \gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_0 = -\gamma_0\sigma/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_y$

板间电场仍垂直于平板，因为即使单板的电场有平行于板的分量，上下板的贡献也必反向相消。

在 S 系观察，由于洛仑兹收缩，板的面电荷密度为 $\pm\,\sigma$， $\sigma = \sigma_0\gamma_0$， $\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

故板间电场：$\vec{\boldsymbol{E}} = -\sigma/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_z = -(\sigma_0\gamma_0)/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_z = \gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_0$

若平板位于 $y = \pm a$，类似地有：$\vec{\boldsymbol{E}} = \gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_0 = -\gamma_0\sigma/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_y$

若平板位于 $x = \pm a$，由于垂直于运动方向长度不缩短，$\sigma = \sigma_0$： $\Longrightarrow$ $\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}_0$

板间电场仍垂直于平板，因为即使单板的电场有平行于板的分量，上下板的贡献也必反向相消。

在 S 系观察，由于洛仑兹收缩，板的面电荷密度为 $\pm\sigma$， $\sigma = \sigma_0\gamma_0$， $\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

故板间电场：$\vec{\boldsymbol{E}} = -\sigma/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_z = -(\sigma_0\gamma_0)/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_z = \gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_0$

若平板位于 $y = \pm a$，类似地有：$\vec{\boldsymbol{E}} = \gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_0 = -\gamma_0\sigma/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_y$

若平板位于 $x = \pm a$，由于垂直于运动方向长度不缩短，$\sigma = \sigma_0$： $\Longrightarrow$ $\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}_0$

整理得，若在某惯性系只有电场，在在另一惯性系：$\vec{\boldsymbol{E}}_\perp = \gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_{0\perp}$， $\vec{\boldsymbol{E}}_{||} = \vec{\boldsymbol{E}}_{0\,||}$，

板间电场仍垂直于平板，因为即使单板的电场有平行于板的分量，上下板的贡献也必反向相消。

在 S 系观察，由于洛仑兹收缩，板的面电荷密度为 $\pm\sigma$， $\sigma=\sigma_0\gamma_0$， $\gamma_0=1/\sqrt{1-v_0^2/c^2}$

故板间电场：$\vec{\boldsymbol{E}}=-\sigma/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_z=-(\sigma_0\gamma_0)/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_z=\gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_0$

若平板位于 $y=\pm a$，类似地有：$\vec{\boldsymbol{E}}=\gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_0=-\gamma_0\sigma/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_y$

若平板位于 $x=\pm a$，由于垂直于运动方向长度不缩短，$\sigma=\sigma_0$： $\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{E}}=\vec{\boldsymbol{E}}_0$

整理得，若在某惯性系只有电场，在在另一惯性系：$\vec{\boldsymbol{E}}_\perp=\gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_{0\,\perp}$， $\vec{\boldsymbol{E}}_{||}=\vec{\boldsymbol{E}}_{0\,||}$，

$\vec{\boldsymbol{E}}_\perp$, $\vec{\boldsymbol{E}}_{||}$ 分别为垂直和平行于两惯性系相对速度方向的分量。

板间电场仍垂直于平板，因为即使单板的电场有平行于板的分量，上下板的贡献也必反向相消。

在 S 系观察，由于洛仑兹收缩，板的面电荷密度为 $\pm\sigma$， $\sigma=\sigma_0\gamma_0$， $\gamma_0=1/\sqrt{1-v_0^2/c^2}$

故板间电场：$\vec{\boldsymbol{E}}=-\sigma/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_z=-(\sigma_0\gamma_0)/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_z=\gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_0$

若平板位于 $y=\pm a$，类似地有：$\vec{\boldsymbol{E}}=\gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_0=-\gamma_0\sigma/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_y$

若平板位于 $x=\pm a$，由于垂直于运动方向长度不缩短，$\sigma=\sigma_0$： $\Longrightarrow$ $\vec{\boldsymbol{E}}=\vec{\boldsymbol{E}}_0$

整理得，若在某惯性系只有电场，在在另一惯性系：$\vec{\boldsymbol{E}}_\perp=\gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_{0\perp}$， $\vec{\boldsymbol{E}}_{||}=\vec{\boldsymbol{E}}_{0||}$，

$\vec{\boldsymbol{E}}_\perp$, $\vec{\boldsymbol{E}}_{||}$ 分别为垂直和平行于两惯性系相对速度方向的分量。

磁场如何变换？

板间电场仍垂直于平板，因为即使单板的电场有平行于板的分量，上下板的贡献也必反向相消。

在 S 系观察，由于洛仑兹收缩，板的面电荷密度为 $\pm\,\sigma$，　$\sigma = \sigma_0\gamma_0$，　$\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

故板间电场：$\vec{\boldsymbol{E}} = -\sigma/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_z = -(\sigma_0\gamma_0)/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_z = \gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_0$

若平板位于 $y = \pm a$，类似地有：$\vec{\boldsymbol{E}} = \gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_0 = -\gamma_0\sigma/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_y$

若平板位于 $x = \pm a$，由于垂直于运动方向长度不缩短，$\sigma = \sigma_0$：　$\Longrightarrow$　$\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}_0$

整理得，若在某惯性系只有电场，在在另一惯性系：$\vec{\boldsymbol{E}}_\perp = \gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_{0\,\perp}$，　$\vec{\boldsymbol{E}}_{||} = \vec{\boldsymbol{E}}_{0\,||}$，

$\vec{\boldsymbol{E}}_\perp$，$\vec{\boldsymbol{E}}_{||}$ 分别为垂直和平行于两惯性系相对速度方向的分量。

磁场如何变换？　　在 S_0 系观察，只有电场没有磁场，不能得到关于磁场的变换。

板间电场仍垂直于平板，因为即使单板的电场有平行于板的分量，上下板的贡献也必反向相消。

在 S 系观察，由于洛仑兹收缩，板的面电荷密度为 $\pm\,\sigma$, $\sigma = \sigma_0\gamma_0$, $\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

故板间电场：$\vec{\boldsymbol{E}} = -\sigma/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_z = -(\sigma_0\gamma_0)/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_z = \gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_0$

若平板位于 $y = \pm a$，类似地有：$\vec{\boldsymbol{E}} = \gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_0 = -\gamma_0\sigma/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_y$

若平板位于 $x = \pm a$，由于垂直于运动方向长度不缩短，$\sigma = \sigma_0$: $\Longrightarrow$ $\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}_0$

整理得，若在某惯性系只有电场，在在另一惯性系：$\vec{\boldsymbol{E}}_\perp = \gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_{0\,\perp}$, $\vec{\boldsymbol{E}}_{||} = \vec{\boldsymbol{E}}_{0\,||}$,

$\vec{\boldsymbol{E}}_\perp$, $\vec{\boldsymbol{E}}_{||}$ 分别为垂直和平行于两惯性系相对速度方向的分量。

磁场如何变换？ 在 S_0 系观察，只有电场没有磁场，不能得到关于磁场的变换。

现在，在 S 系观察放置于 $z = \pm a$ 的两无穷大平行板（这两个平行板相对于 S_0 静止）。

板间电场仍垂直于平板，因为即使单板的电场有平行于板的分量，上下板的贡献也必反向相消。

在 S 系观察，由于洛仑兹收缩，板的面电荷密度为 $\pm\,\sigma$，　$\sigma = \sigma_0\gamma_0$，　$\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

故板间电场：$\vec{\boldsymbol{E}} = -\sigma/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_z = -(\sigma_0\gamma_0)/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_z = \gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_0$

若平板位于 $y = \pm a$，类似地有：$\vec{\boldsymbol{E}} = \gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_0 = -\gamma_0\sigma/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_y$

若平板位于 $x = \pm a$，由于垂直于运动方向长度不缩短，$\sigma = \sigma_0$：　$\Longrightarrow$　$\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}_0$

整理得，若在某惯性系只有电场，在在另一惯性系：$\vec{\boldsymbol{E}}_\perp = \gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_{0\,\perp}$，　$\vec{\boldsymbol{E}}_{||} = \vec{\boldsymbol{E}}_{0\,||}$，

$\vec{\boldsymbol{E}}_\perp$，$\vec{\boldsymbol{E}}_{||}$ 分别为垂直和平行于两惯性系相对速度方向的分量。

磁场如何变换？　　在 S_0 系观察，只有电场没有磁场，不能得到关于磁场的变换。

现在，在 S 系观察放置于 $z = \pm a$ 的两无穷大平行板（这两个平行板相对于 S_0 静止）。

上面已求得板间电场：$\vec{\boldsymbol{E}} = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\ \hat{\boldsymbol{e}}_z$

板间电场仍垂直于平板，因为即使单板的电场有平行于板的分量，上下板的贡献也必反向相消。

在 S 系观察，由于洛仑兹收缩，板的面电荷密度为 $\pm\,\sigma$， $\sigma=\sigma_0\gamma_0$， $\gamma_0=1/\sqrt{1-v_0^2/c^2}$

故板间电场：$\vec{\boldsymbol{E}}=-\sigma/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_z=-(\sigma_0\gamma_0)/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_z=\gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_0$

若平板位于 $y=\pm a$，类似地有：$\vec{\boldsymbol{E}}=\gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_0=-\gamma_0\sigma/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_y$

若平板位于 $x=\pm a$，由于垂直于运动方向长度不缩短，$\sigma=\sigma_0$： $\Longrightarrow$ $\vec{\boldsymbol{E}}=\vec{\boldsymbol{E}}_0$

整理得，若在某惯性系只有电场，在在另一惯性系：$\vec{\boldsymbol{E}}_\perp=\gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_{0\perp}$， $\vec{\boldsymbol{E}}_{||}=\vec{\boldsymbol{E}}_{0\,||}$，

$\vec{\boldsymbol{E}}_\perp$，$\vec{\boldsymbol{E}}_{||}$ 分别为垂直和平行于两惯性系相对速度方向的分量。

磁场如何变换？ 在 S_0 系观察，只有电场没有磁场，不能得到关于磁场的变换。

现在，在 S 系观察放置于 $z=\pm a$ 的两无穷大平行板（这两个平行板相对于 S_0 静止）。

上面已求得板间电场：$\vec{\boldsymbol{E}}=-\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\ \hat{\boldsymbol{e}}_z$

由于在 S 系观察，板在运动，有面电流 $\vec{\boldsymbol{\alpha}}=\pm\sigma v_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$，板间磁感应强度：$\vec{\boldsymbol{B}}=-\mu_0\sigma v_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$

板间电场仍垂直于平板，因为即使单板的电场有平行于板的分量，上下板的贡献也必反向相消。

在 S 系观察，由于洛仑兹收缩，板的面电荷密度为 $\pm\,\sigma$， $\sigma = \sigma_0\gamma_0$， $\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

故板间电场：$\vec{\boldsymbol{E}} = -\sigma/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_z = -(\sigma_0\gamma_0)/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_z = \gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_0$

若平板位于 $y = \pm a$，类似地有：$\vec{\boldsymbol{E}} = \gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_0 = -\gamma_0\sigma/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_y$

若平板位于 $x = \pm a$，由于垂直于运动方向长度不缩短，$\sigma = \sigma_0$： $\Longrightarrow$ $\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}_0$

整理得，若在某惯性系只有电场，在在另一惯性系：$\vec{\boldsymbol{E}}_\perp = \gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_{0\,\perp}$， $\vec{\boldsymbol{E}}_{||} = \vec{\boldsymbol{E}}_{0\,||}$，

$\vec{\boldsymbol{E}}_\perp$, $\vec{\boldsymbol{E}}_{||}$ 分别为垂直和平行于两惯性系相对速度方向的分量。

磁场如何变换？ 在 S_0 系观察，只有电场没有磁场，不能得到关于磁场的变换。

现在，在 S 系观察放置于 $z = \pm a$ 的两无穷大平行板（这两个平行板相对于 S_0 静止）。

上面已求得板间电场：$\vec{\boldsymbol{E}} = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\ \hat{\boldsymbol{e}}_z$

由于在 S 系观察，板在运动，有面电流 $\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\sigma v_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$，板间磁感应强度：$\vec{\boldsymbol{B}} = -\mu_0\sigma v_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$

（§4.2，p 2，例 2）

板间电场仍垂直于平板，因为即使单板的电场有平行于板的分量，上下板的贡献也必反向相消。

在 S 系观察，由于洛仑兹收缩，板的面电荷密度为 $\pm\sigma$， $\sigma=\sigma_0\gamma_0$， $\gamma_0=1/\sqrt{1-v_0^2/c^2}$

故板间电场：$\vec{\boldsymbol{E}}=-\sigma/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_z=-(\sigma_0\gamma_0)/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_z=\gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_0$

若平板位于 $y=\pm a$，类似地有：$\vec{\boldsymbol{E}}=\gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_0=-\gamma_0\sigma/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_y$

若平板位于 $x=\pm a$，由于垂直于运动方向长度不缩短，$\sigma=\sigma_0$： $\Longrightarrow$ $\vec{\boldsymbol{E}}=\vec{\boldsymbol{E}}_0$

整理得，若在某惯性系只有电场，在在另一惯性系：$\vec{\boldsymbol{E}}_\perp=\gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_{0\perp}$， $\vec{\boldsymbol{E}}_{||}=\vec{\boldsymbol{E}}_{0\,||}$，

$\vec{\boldsymbol{E}}_\perp$, $\vec{\boldsymbol{E}}_{||}$ 分别为垂直和平行于两惯性系相对速度方向的分量。

磁场如何变换？ 在 S_0 系观察，只有电场没有磁场，不能得到关于磁场的变换。

现在，在 S 系观察放置于 $z=\pm a$ 的两无穷大平行板（这两个平行板相对于 S_0 静止）。

上面已求得板间电场：$\vec{\boldsymbol{E}}=-\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\ \hat{\boldsymbol{e}}_z$

由于在 S 系观察，板在运动，有面电流 $\vec{\boldsymbol{\alpha}}=\pm\sigma v_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$，板间磁感应强度：$\vec{\boldsymbol{B}}=-\mu_0\sigma v_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$

（§4.2，p 2，例 2）

这是最简单的同时具有电场和磁场的情况。

板间电场仍垂直于平板，因为即使单板的电场有平行于板的分量，上下板的贡献也必反向相消。

在 S 系观察，由于洛仑兹收缩，板的面电荷密度为 $\pm\,\sigma$， $\sigma = \sigma_0\gamma_0$， $\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

故板间电场：$\vec{E} = -\sigma/\epsilon_0\ \hat{e}_z = -(\sigma_0\gamma_0)/\epsilon_0\ \hat{e}_z = \gamma_0\vec{E}_0$

若平板位于 $y = \pm a$，类似地有：$\vec{E} = \gamma_0\vec{E}_0 = -\gamma_0\sigma/\epsilon_0\ \hat{e}_y$

若平板位于 $x = \pm a$，由于垂直于运动方向长度不缩短，$\sigma = \sigma_0$： $\Longrightarrow$ $\vec{E} = \vec{E}_0$

整理得，若在某惯性系只有电场，在在另一惯性系：$\vec{E}_\perp = \gamma_0\vec{E}_{0\perp}$， $\vec{E}_{||} = \vec{E}_{0\,||}$，

$\vec{E}_\perp$，$\vec{E}_{||}$ 分别为垂直和平行于两惯性系相对速度方向的分量。

磁场如何变换？ 在 S_0 系观察，只有电场没有磁场，不能得到关于磁场的变换。

现在，在 S 系观察放置于 $z = \pm a$ 的两无穷大平行板（这两个平行板相对于 S_0 静止）。

上面已求得板间电场：$\vec{E} = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\ \hat{e}_z$

由于在 S 系观察，板在运动，有面电流 $\vec{\alpha} = \pm\sigma v_0\,\hat{e}_x$，板间磁感应强度：$\vec{B} = -\mu_0\sigma v_0\,\hat{e}_y$

（§ 4.2，p 2，例 2）

这是最简单的同时具有电场和磁场的情况。

设有第三个惯性系 S'，相对于 S 以速度 v 沿 $+x$ 向运动

板间电场仍垂直于平板，因为即使单板的电场有平行于板的分量，上下板的贡献也必反向相消。

在 S 系观察，由于洛仑兹收缩，板的面电荷密度为 $\pm\sigma$， $\sigma=\sigma_0\gamma_0$， $\gamma_0=1/\sqrt{1-v_0^2/c^2}$

故板间电场：$\vec{\boldsymbol{E}}=-\sigma/\epsilon_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z=-(\sigma_0\gamma_0)/\epsilon_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z=\gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_0$

若平板位于 $y=\pm a$，类似地有：$\vec{\boldsymbol{E}}=\gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_0=-\gamma_0\sigma/\epsilon_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$

若平板位于 $x=\pm a$，由于垂直于运动方向长度不缩短，$\sigma=\sigma_0$： $\Longrightarrow$ $\vec{\boldsymbol{E}}=\vec{\boldsymbol{E}}_0$

整理得，若在某惯性系只有电场，在在另一惯性系：$\vec{\boldsymbol{E}}_\perp=\gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_{0\perp}$， $\vec{\boldsymbol{E}}_{||}=\vec{\boldsymbol{E}}_{0||}$，

$\vec{\boldsymbol{E}}_\perp$，$\vec{\boldsymbol{E}}_{||}$ 分别为垂直和平行于两惯性系相对速度方向的分量。

磁场如何变换？ 在 S_0 系观察，只有电场没有磁场，不能得到关于磁场的变换。

现在，在 S 系观察放置于 $z=\pm a$ 的两无穷大平行板（这两个平行板相对于 S_0 静止）。

上面已求得板间电场：$\vec{\boldsymbol{E}}=-\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

由于在 S 系观察，板在运动，有面电流 $\vec{\boldsymbol{\alpha}}=\pm\sigma v_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$，板间磁感应强度：$\vec{\boldsymbol{B}}=-\mu_0\sigma v_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$

（§ 4.2，p 2，例 2）

这是最简单的同时具有电场和磁场的情况。

设有第三个惯性系 S'，相对于 S 以速度 v 沿 $+x$ 向运动

在 S' 系观察：电场和磁感应强度分别为：$\vec{\boldsymbol{E}}'=-\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$， $\vec{\boldsymbol{B}}'=-\mu_0\sigma' v'\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$，

板间电场仍垂直于平板，因为即使单板的电场有平行于板的分量，上下板的贡献也必反向相消。

在 S 系观察，由于洛仑兹收缩，板的面电荷密度为 $\pm\,\sigma$， $\sigma = \sigma_0\gamma_0$， $\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

故板间电场：$\vec{\boldsymbol{E}} = -\sigma/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_z = -(\sigma_0\gamma_0)/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_z = \gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_0$

若平板位于 $y = \pm a$，类似地有：$\vec{\boldsymbol{E}} = \gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_0 = -\gamma_0\sigma/\epsilon_0\ \hat{\boldsymbol{e}}_y$

若平板位于 $x = \pm a$，由于垂直于运动方向长度不缩短，$\sigma = \sigma_0$： $\Longrightarrow$ $\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}_0$

整理得，若在某惯性系只有电场，在在另一惯性系：$\vec{\boldsymbol{E}}_\perp = \gamma_0\vec{\boldsymbol{E}}_{0\,\perp}$， $\vec{\boldsymbol{E}}_{||} = \vec{\boldsymbol{E}}_{0\,||}$，

$\vec{\boldsymbol{E}}_\perp$，$\vec{\boldsymbol{E}}_{||}$ 分别为垂直和平行于两惯性系相对速度方向的分量。

磁场如何变换？ 在 S_0 系观察，只有电场没有磁场，不能得到关于磁场的变换。

现在，在 S 系观察放置于 $z = \pm a$ 的两无穷大平行板（这两个平行板相对于 S_0 静止）。

上面已求得板间电场：$\vec{\boldsymbol{E}} = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\ \hat{\boldsymbol{e}}_z$

由于在 S 系观察，板在运动，有面电流 $\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\sigma v_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$，板间磁感应强度：$\vec{\boldsymbol{B}} = -\mu_0\sigma v_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$

（§ 4.2，p 2，例 2）

这是最简单的同时具有电场和磁场的情况。

设有第三个惯性系 S'，相对于 S 以速度 v 沿 $+x$ 向运动

在 S' 系观察：电场和磁感应强度分别为：$\vec{\boldsymbol{E}}' = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0}\ \hat{\boldsymbol{e}}_z$， $\vec{\boldsymbol{B}}' = -\mu_0\sigma' v'\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$，

v' 和 σ' 分别为在 S' 观察，板的运动速度和电荷面密度

板惯性系 S_0，惯性系 S 相对于 S_0 以速度 v_0 运动，惯性系 S' 相对于 S 以速度 v 运动

Let there be light

板惯性系 S_0，惯性系 S 相对于 S_0 以速度 v_0 运动，惯性系 S' 相对于 S 以速度 v 运动

在 S_0 观察：$E_{0z} = -\dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad \vec{\boldsymbol{B}}_0 = 0$

Let there be light

板惯性系 S_0，惯性系 S 相对于 S_0 以速度 v_0 运动，惯性系 S' 相对于 S 以速度 v 运动

在 S_0 观察：$E_{0z} = -\dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad \vec{\boldsymbol{B}}_0 = 0$

在 S 观察：$E_z = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B_y = -\mu_0 \sigma v_0, \quad \sigma = \gamma_0 \sigma_0, \quad \gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

Let there be light

板惯性系 S_0，惯性系 S 相对于 S_0 以速度 v_0 运动，惯性系 S' 相对于 S 以速度 v 运动

在 S_0 观察：$E_{0z} = -\dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad \vec{\boldsymbol{B}}_0 = 0$

在 S 观察：$E_z = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B_y = -\mu_0 \sigma v_0, \quad \sigma = \gamma_0 \sigma_0, \quad \gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

在 S' 观察：$E'_z = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0}, \quad B'_y = -\mu_0 \sigma' v',$

板惯性系 S_0，惯性系 S 相对于 S_0 以速度 v_0 运动，惯性系 S' 相对于 S 以速度 v 运动

在 S_0 观察：$E_{0z} = -\dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad \vec{\boldsymbol{B}}_0 = 0$

在 S 观察：$E_z = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \qquad B_y = -\mu_0 \sigma v_0, \quad \sigma = \gamma_0 \sigma_0, \quad \gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

在 S' 观察：$E'_z = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0}, \qquad B'_y = -\mu_0 \sigma' v', \quad \sigma' = \gamma' \sigma_0, \quad \gamma' = 1/\sqrt{1 - v'^2/c^2},$

Let there be light

板惯性系 S_0，惯性系 S 相对于 S_0 以速度 v_0 运动，惯性系 S' 相对于 S 以速度 v 运动

在 S_0 观察：$E_{0z} = -\dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad \vec{\boldsymbol{B}}_0 = 0$

在 S 观察：$E_z = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B_y = -\mu_0 \sigma v_0, \quad \sigma = \gamma_0 \sigma_0, \quad \gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

在 S' 观察：$E'_z = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0}, \quad B'_y = -\mu_0 \sigma' v', \quad \sigma' = \gamma' \sigma_0, \quad \gamma' = 1/\sqrt{1 - v'^2/c^2},$

v_0 和 v' 分别为在 S 和 S' 系中观察，板的速度

板惯性系 S_0，惯性系 S 相对于 S_0 以速度 v_0 运动，惯性系 S' 相对于 S 以速度 v 运动

在 S_0 观察：$E_{0z} = -\dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad \vec{\boldsymbol{B}}_0 = 0$

在 S 观察：$E_z = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \qquad B_y = -\mu_0 \sigma v_0, \quad \sigma = \gamma_0 \sigma_0, \quad \gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

在 S' 观察：$E'_z = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0}, \qquad B'_y = -\mu_0 \sigma' v', \quad \sigma' = \gamma' \sigma_0, \quad \gamma' = 1/\sqrt{1 - v'^2/c^2},$

v_0 和 v' 分别为在 S 和 S' 系中观察，板的速度

由速度变换公式：$v' = \dfrac{v_0 + v}{1 + v v_0/c^2}$

板惯性系 S_0，惯性系 S 相对于 S_0 以速度 v_0 运动，惯性系 S' 相对于 S 以速度 v 运动

在 S_0 观察：$E_{0z} = -\dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad \vec{\boldsymbol{B}}_0 = 0$

在 S 观察：$E_z = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B_y = -\mu_0\sigma v_0, \quad \sigma = \gamma_0\sigma_0, \quad \gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

在 S' 观察：$E'_z = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0}, \quad B'_y = -\mu_0\sigma' v', \quad \sigma' = \gamma'\sigma_0, \quad \gamma' = 1/\sqrt{1 - v'^2/c^2},$

v_0 和 v' 分别为在 S 和 S' 系中观察，板的速度

由速度变换公式：$v' = \dfrac{v_0 + v}{1 + v v_0/c^2}$ § 8.3, p 13, 相当于 $u_x = -v_0$

板惯性系 S_0，惯性系 S 相对于 S_0 以速度 v_0 运动，惯性系 S' 相对于 S 以速度 v 运动

在 S_0 观察：$E_{0z} = -\dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad \vec{\boldsymbol{B}}_0 = 0$

在 S 观察：$E_z = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \qquad B_y = -\mu_0\sigma v_0, \quad \sigma = \gamma_0\sigma_0, \quad \gamma_0 = 1/\sqrt{1-v_0^2/c^2}$

在 S' 观察：$E'_z = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0}, \qquad B'_y = -\mu_0\sigma' v', \quad \sigma' = \gamma'\sigma_0, \quad \gamma' = 1/\sqrt{1-v'^2/c^2},$

v_0 和 v' 分别为在 S 和 S' 系中观察，板的速度

由速度变换公式：$v' = \dfrac{v_0+v}{1+vv_0/c^2}$ 　　§ 8.3, p 13, 相当于 $u_x = -v_0$

在 S' 观察：$E'_z = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0}$

板惯性系 S_0，惯性系 S 相对于 S_0 以速度 v_0 运动，惯性系 S' 相对于 S 以速度 v 运动

在 S_0 观察：$E_{0z} = -\dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad \vec{\boldsymbol{B}}_0 = 0$

在 S 观察：$E_z = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B_y = -\mu_0 \sigma v_0, \quad \sigma = \gamma_0 \sigma_0, \quad \gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

在 S' 观察：$E'_z = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0}, \quad B'_y = -\mu_0 \sigma' v', \quad \sigma' = \gamma' \sigma_0, \quad \gamma' = 1/\sqrt{1 - v'^2/c^2},$

v_0 和 v' 分别为在 S 和 S' 系中观察，板的速度

由速度变换公式：$v' = \dfrac{v_0 + v}{1 + v v_0/c^2}$ § 8.3, p 13, 相当于 $u_x = -v_0$

在 S' 观察：$E'_z = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0} = -\dfrac{\gamma'}{\gamma_0} \dfrac{\sigma}{\epsilon_0},$

板惯性系 S_0，惯性系 S 相对于 S_0 以速度 v_0 运动，惯性系 S' 相对于 S 以速度 v 运动

在 S_0 观察：$E_{0z} = -\dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad \vec{\boldsymbol{B}}_0 = 0$

在 S 观察：$E_z = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B_y = -\mu_0 \sigma v_0, \quad \sigma = \gamma_0 \sigma_0, \quad \gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

在 S' 观察：$E'_z = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0}, \quad B'_y = -\mu_0 \sigma' v', \quad \sigma' = \gamma' \sigma_0, \quad \gamma' = 1/\sqrt{1 - v'^2/c^2},$

v_0 和 v' 分别为在 S 和 S' 系中观察，板的速度

由速度变换公式：$v' = \dfrac{v_0 + v}{1 + v v_0/c^2}$ § 8.3, p 13, 相当于 $u_x = -v_0$

在 S' 观察：$E'_z = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0} = -\dfrac{\gamma'}{\gamma_0}\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B'_y = -\mu_0 \sigma' v'$

板惯性系 S_0，惯性系 S 相对于 S_0 以速度 v_0 运动，惯性系 S' 相对于 S 以速度 v 运动

在 S_0 观察：$E_{0z} = -\dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad \vec{\boldsymbol{B}}_0 = 0$

在 S 观察：$E_z = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B_y = -\mu_0 \sigma v_0, \quad \sigma = \gamma_0 \sigma_0, \quad \gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

在 S' 观察：$E_z' = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0}, \quad B_y' = -\mu_0 \sigma' v', \quad \sigma' = \gamma' \sigma_0, \quad \gamma' = 1/\sqrt{1 - v'^2/c^2},$

v_0 和 v' 分别为在 S 和 S' 系中观察，板的速度

由速度变换公式：$v' = \dfrac{v_0 + v}{1 + v v_0/c^2}$ § 8.3, p 13, 相当于 $u_x = -v_0$

在 S' 观察：$E_z' = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0} = -\dfrac{\gamma'}{\gamma_0}\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \qquad B_y' = -\mu_0 \sigma' v' = -\dfrac{\gamma'}{\gamma_0}\mu_0 \sigma v'$

板惯性系 S_0，惯性系 S 相对于 S_0 以速度 v_0 运动，惯性系 S' 相对于 S 以速度 v 运动

在 S_0 观察：$E_{0z} = -\dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad \vec{\boldsymbol{B}}_0 = 0$

在 S 观察：$E_z = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B_y = -\mu_0 \sigma v_0, \quad \sigma = \gamma_0 \sigma_0, \quad \gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

在 S' 观察：$E_z' = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0}, \quad B_y' = -\mu_0 \sigma' v', \quad \sigma' = \gamma' \sigma_0, \quad \gamma' = 1/\sqrt{1 - v'^{\,2}/c^2},$

v_0 和 v' 分别为在 S 和 S' 系中观察，板的速度

由速度变换公式：$v' = \dfrac{v_0 + v}{1 + v v_0/c^2}$ § 8.3, p 13, 相当于 $u_x = -v_0$

在 S' 观察：$E_z' = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0} = -\dfrac{\gamma'}{\gamma_0}\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B_y' = -\mu_0 \sigma' v' = -\dfrac{\gamma'}{\gamma_0}\mu_0 \sigma v'$

而：$\dfrac{\gamma'}{\gamma_0} = \dfrac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{\sqrt{1 - v'^{\,2}/c^2}} = \gamma\left(1 + \dfrac{v v_0}{c^2}\right), \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

板惯性系 S_0，惯性系 S 相对于 S_0 以速度 v_0 运动，惯性系 S' 相对于 S 以速度 v 运动

在 S_0 观察：$E_{0z} = -\dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad \vec{\boldsymbol{B}}_0 = 0$

在 S 观察：$E_z = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B_y = -\mu_0 \sigma v_0, \quad \sigma = \gamma_0 \sigma_0, \quad \gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

在 S' 观察：$E'_z = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0}, \quad B'_y = -\mu_0 \sigma' v', \quad \sigma' = \gamma' \sigma_0, \quad \gamma' = 1/\sqrt{1 - v'^2/c^2},$

v_0 和 v' 分别为在 S 和 S' 系中观察，板的速度

由速度变换公式：$v' = \dfrac{v_0 + v}{1 + v v_0/c^2}$ $\quad$ § 8.3, p 13, 相当于 $u_x = -v_0$

在 S' 观察：$E'_z = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0} = -\dfrac{\gamma'}{\gamma_0}\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B'_y = -\mu_0 \sigma' v' = -\dfrac{\gamma'}{\gamma_0}\mu_0 \sigma v'$

$$\text{而：}\ \frac{\gamma'}{\gamma_0} = \frac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = \gamma\left(1 + \frac{v v_0}{c^2}\right), \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$E'_z = -\gamma\left(1 + \frac{v v_0}{c^2}\right)\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

板惯性系 S_0，惯性系 S 相对于 S_0 以速度 v_0 运动，惯性系 S' 相对于 S 以速度 v 运动

在 S_0 观察：$E_{0z} = -\dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad \vec{\boldsymbol{B}}_0 = 0$

在 S 观察：$E_z = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B_y = -\mu_0 \sigma v_0, \quad \sigma = \gamma_0 \sigma_0, \quad \gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

在 S' 观察：$E'_z = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0}, \quad B'_y = -\mu_0 \sigma' v', \quad \sigma' = \gamma' \sigma_0, \quad \gamma' = 1/\sqrt{1 - v'^2/c^2},$

v_0 和 v' 分别为在 S 和 S' 系中观察，板的速度

由速度变换公式：$v' = \dfrac{v_0 + v}{1 + v v_0/c^2}$ § 8.3, p 13, 相当于 $u_x = -v_0$

在 S' 观察：$E'_z = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0} = -\dfrac{\gamma'}{\gamma_0}\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B'_y = -\mu_0 \sigma' v' = -\dfrac{\gamma'}{\gamma_0}\mu_0 \sigma v'$

$$\text{而：}\frac{\gamma'}{\gamma_0} = \frac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = \gamma\left(1 + \frac{v v_0}{c^2}\right), \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$E'_z = -\gamma\left(1 + \frac{v v_0}{c^2}\right)\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \gamma\left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{v v_0}{c^2}\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)$$

板惯性系 S_0，惯性系 S 相对于 S_0 以速度 v_0 运动，惯性系 S' 相对于 S 以速度 v 运动

在 S_0 观察：$E_{0z} = -\dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad \vec{\boldsymbol{B}}_0 = 0$

在 S 观察：$E_z = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B_y = -\mu_0 \sigma v_0, \quad \sigma = \gamma_0 \sigma_0, \quad \gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

在 S' 观察：$E'_z = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0}, \quad B'_y = -\mu_0 \sigma' v', \quad \sigma' = \gamma' \sigma_0, \quad \gamma' = 1/\sqrt{1 - v'^2/c^2},$

v_0 和 v' 分别为在 S 和 S' 系中观察，板的速度

由速度变换公式：$v' = \dfrac{v_0 + v}{1 + v v_0/c^2}$ 　§ 8.3, p 13, 相当于 $u_x = -v_0$

在 S' 观察：$E'_z = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0} = -\dfrac{\gamma'}{\gamma_0} \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B'_y = -\mu_0 \sigma' v' = -\dfrac{\gamma'}{\gamma_0} \mu_0 \sigma v'$

$$\text{而：} \frac{\gamma'}{\gamma_0} = \frac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = \gamma \left(1 + \frac{v v_0}{c^2}\right), \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$E'_z = -\gamma \left(1 + \frac{v v_0}{c^2}\right) \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \gamma \left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{v v_0}{c^2} \frac{\sigma}{\epsilon_0}\right) = \gamma (E_z + v B_y),$$

板惯性系 S_0，惯性系 S 相对于 S_0 以速度 v_0 运动，惯性系 S' 相对于 S 以速度 v 运动

在 S_0 观察：$E_{0z} = -\dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad \vec{\boldsymbol{B}}_0 = 0$

在 S 观察：$E_z = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B_y = -\mu_0 \sigma v_0, \quad \sigma = \gamma_0 \sigma_0, \quad \gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

在 S' 观察：$E'_z = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0}, \quad B'_y = -\mu_0 \sigma' v', \quad \sigma' = \gamma' \sigma_0, \quad \gamma' = 1/\sqrt{1 - v'^2/c^2},$

v_0 和 v' 分别为在 S 和 S' 系中观察，板的速度

由速度变换公式：$v' = \dfrac{v_0 + v}{1 + v v_0/c^2}$ § 8.3, p 13, 相当于 $u_x = -v_0$

在 S' 观察：$E'_z = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0} = -\dfrac{\gamma'}{\gamma_0} \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \qquad B'_y = -\mu_0 \sigma' v' = -\dfrac{\gamma'}{\gamma_0} \mu_0 \sigma v'$

$$\text{而：} \frac{\gamma'}{\gamma_0} = \frac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = \gamma \left(1 + \frac{v v_0}{c^2}\right), \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$E'_z = -\gamma \left(1 + \frac{v v_0}{c^2}\right) \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \gamma \left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{v v_0}{c^2} \frac{\sigma}{\epsilon_0}\right) = \gamma (E_z + v B_y),$$

注意应消去 v_0

板惯性系 S_0，惯性系 S 相对于 S_0 以速度 v_0 运动，惯性系 S' 相对于 S 以速度 v 运动

在 S_0 观察：$E_{0z}=-\dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0},\quad \vec{\boldsymbol{B}}_0=0$

在 S 观察：$E_z=-\dfrac{\sigma}{\epsilon_0},\qquad B_y=-\mu_0\sigma v_0,\quad \sigma=\gamma_0\sigma_0,\quad \gamma_0=1/\sqrt{1-v_0^2/c^2}$

在 S' 观察：$E_z'=-\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0},\qquad B_y'=-\mu_0\sigma' v',\quad \sigma'=\gamma'\sigma_0,\quad \gamma'=1/\sqrt{1-v'^2/c^2},$

v_0 和 v' 分别为在 S 和 S' 系中观察，板的速度

由速度变换公式：$v'=\dfrac{v_0+v}{1+vv_0/c^2}$ 　　§ 8.3, p 13, 相当于 $u_x=-v_0$

在 S' 观察：$E_z'=-\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0}=-\dfrac{\gamma'}{\gamma_0}\dfrac{\sigma}{\epsilon_0},\qquad B_y'=-\mu_0\sigma' v'=-\dfrac{\gamma'}{\gamma_0}\mu_0\sigma v'$

$$\text{而：}\ \frac{\gamma'}{\gamma_0}=\frac{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}{\sqrt{1-v'^2/c^2}}=\gamma\left(1+\frac{vv_0}{c^2}\right),\quad \gamma=1/\sqrt{1-v^2/c^2}$$

$$E_z'=-\gamma\left(1+\frac{vv_0}{c^2}\right)\frac{\sigma}{\epsilon_0}=\gamma\left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0}-\frac{vv_0}{c^2}\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)=\gamma(E_z+vB_y),$$

注意应消去 v_0

$$B_y'=-\gamma\left(1+\frac{vv_0}{c^2}\right)\mu_0\sigma\,\frac{v+v_0}{1+vv_0/c^2}$$

板惯性系 S_0，惯性系 S 相对于 S_0 以速度 v_0 运动，惯性系 S' 相对于 S 以速度 v 运动

在 S_0 观察：$E_{0z} = -\dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad \vec{\boldsymbol{B}}_0 = 0$

在 S 观察：$E_z = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B_y = -\mu_0 \sigma v_0, \quad \sigma = \gamma_0 \sigma_0, \quad \gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

在 S' 观察：$E'_z = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0}, \quad B'_y = -\mu_0 \sigma' v', \quad \sigma' = \gamma' \sigma_0, \quad \gamma' = 1/\sqrt{1 - v'^2/c^2},$

v_0 和 v' 分别为在 S 和 S' 系中观察，板的速度

由速度变换公式：$v' = \dfrac{v_0 + v}{1 + v v_0/c^2}$ § 8.3, p 13, 相当于 $u_x = -v_0$

在 S' 观察：$E'_z = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0} = -\dfrac{\gamma'}{\gamma_0}\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \qquad B'_y = -\mu_0 \sigma' v' = -\dfrac{\gamma'}{\gamma_0}\mu_0 \sigma v'$

而：$$\frac{\gamma'}{\gamma_0} = \frac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = \gamma\left(1 + \frac{v v_0}{c^2}\right), \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$E'_z = -\gamma\left(1 + \frac{v v_0}{c^2}\right)\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \gamma\left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{v v_0}{c^2}\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right) = \gamma(E_z + v B_y),$$ 注意应消去 v_0

$$B'_y = -\gamma\left(1 + \frac{v v_0}{c^2}\right)\mu_0 \sigma \frac{v + v_0}{1 + v v_0/c^2} = -\gamma \mu_0 \sigma (v + v_0)$$

板惯性系 S_0，惯性系 S 相对于 S_0 以速度 v_0 运动，惯性系 S' 相对于 S 以速度 v 运动

在 S_0 观察：$E_{0z} = -\dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad \vec{\boldsymbol{B}}_0 = 0$

在 S 观察：$E_z = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B_y = -\mu_0\sigma v_0, \quad \sigma = \gamma_0\sigma_0, \quad \gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

在 S' 观察：$E'_z = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0}, \quad B'_y = -\mu_0\sigma' v', \quad \sigma' = \gamma'\sigma_0, \quad \gamma' = 1/\sqrt{1 - v'^2/c^2},$

v_0 和 v' 分别为在 S 和 S' 系中观察，板的速度

由速度变换公式：$v' = \dfrac{v_0 + v}{1 + vv_0/c^2}$ 　　§ 8.3, p 13, 相当于 $u_x = -v_0$

在 S' 观察：$E'_z = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0} = -\dfrac{\gamma'}{\gamma_0}\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B'_y = -\mu_0\sigma' v' = -\dfrac{\gamma'}{\gamma_0}\mu_0\sigma v'$

$$\text{而：}\ \frac{\gamma'}{\gamma_0} = \frac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = \gamma\left(1 + \frac{vv_0}{c^2}\right), \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$E'_z = -\gamma\left(1 + \frac{vv_0}{c^2}\right)\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \gamma\left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{vv_0}{c^2}\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right) = \gamma(E_z + vB_y),$$

注意应消去 v_0

$$B'_y = -\gamma\left(1 + \frac{vv_0}{c^2}\right)\mu_0\sigma\,\frac{v + v_0}{1 + vv_0/c^2} = -\gamma\mu_0\sigma(v + v_0) = \gamma(B_y + \mu_0\epsilon_0 v E_z)$$

板惯性系 S_0，惯性系 S 相对于 S_0 以速度 v_0 运动，惯性系 S' 相对于 S 以速度 v 运动

在 S_0 观察：$E_{0z} = -\dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad \vec{\boldsymbol{B}}_0 = 0$

在 S 观察：$E_z = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B_y = -\mu_0 \sigma v_0, \quad \sigma = \gamma_0 \sigma_0, \quad \gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

在 S' 观察：$E'_z = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0}, \quad B'_y = -\mu_0 \sigma' v', \quad \sigma' = \gamma' \sigma_0, \quad \gamma' = 1/\sqrt{1 - v'^2/c^2},$

v_0 和 v' 分别为在 S 和 S' 系中观察，板的速度

由速度变换公式：$v' = \dfrac{v_0 + v}{1 + v v_0/c^2}$ § 8.3, p 13, 相当于 $u_x = -v_0$

在 S' 观察：$E'_z = -\dfrac{\sigma'}{\epsilon_0} = -\dfrac{\gamma'}{\gamma_0}\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B'_y = -\mu_0 \sigma' v' = -\dfrac{\gamma'}{\gamma_0}\mu_0 \sigma v'$

$$\text{而：}\ \frac{\gamma'}{\gamma_0} = \frac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = \gamma\left(1 + \frac{v v_0}{c^2}\right), \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$E'_z = -\gamma\left(1 + \frac{v v_0}{c^2}\right)\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \gamma\left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{v v_0}{c^2}\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right) = \gamma(E_z + v B_y),$$

注意应消去 v_0

$$B'_y = -\gamma\left(1 + \frac{v v_0}{c^2}\right)\mu_0 \sigma \frac{v + v_0}{1 + v v_0/c^2} = -\gamma \mu_0 \sigma (v + v_0) = \gamma(B_y + \mu_0 \epsilon_0 v E_z)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{cases} E'_z = \gamma(E_z + v B_y) \\ B'_y = \gamma(B_y + v E_z/c^2) \end{cases}}$$

Let there be light

平行板放置于 $z = \pm a$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\begin{cases} E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \\ B'_y = \gamma(B_y + vE_z/c^2) \end{cases}}$

平行板放置于 $z = \pm a$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\begin{cases} E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \\ B'_y = \gamma(B_y + vE_z/c^2) \end{cases}}$

类似可得：若板置于 $y = \pm a$

Let there be light

平行板放置于 $z = \pm a$ $\Longrightarrow$ $$\boxed{\begin{cases} E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \\ B'_y = \gamma(B_y + vE_z/c^2) \end{cases}}$$

类似可得：若板置于 $y = \pm a$ $\Longrightarrow$ $$\boxed{\begin{cases} E'_y = \gamma(E_y - vB_z) \\ B'_z = \gamma(B_z - vE_y/c^2) \end{cases}}$$

Let there be light

平行板放置于 $z = \pm a$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\left\{\begin{array}{l} E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \\ B'_y = \gamma(B_y + vE_z/c^2) \end{array}\right.}$

类似可得：若板置于 $y = \pm a$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\left\{\begin{array}{l} E'_y = \gamma(E_y - vB_z) \\ B'_z = \gamma(B_z - vE_y/c^2) \end{array}\right.}$

对 x 电场的分量，可将板放置于：$x = \pm a$，由于垂直于运动方向没有洛仑兹收缩：$E'_x = E_x$

平行板放置于 $z=\pm a$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\left\{\begin{array}{l} E_z'=\gamma(E_z+vB_y) \\ B_y'=\gamma(B_y+vE_z/c^2) \end{array}\right.}$

类似可得：若板置于 $y=\pm a$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\left\{\begin{array}{l} E_y'=\gamma(E_y-vB_z) \\ B_z'=\gamma(B_z-vE_y/c^2) \end{array}\right.}$

对 x 电场的分量，可将板放置于：$x=\pm a$，由于垂直于运动方向没有洛仑兹收缩：$E_x'=E_x$

注意在 S 观察，板间仍然没有磁场，得不到 B_x 的变换关系。为此考虑一沿 x 向的无限长螺线管。

Let there be light

平行板放置于 $z = \pm a$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\begin{cases} E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \\ B'_y = \gamma(B_y + vE_z/c^2) \end{cases}}$

类似可得：若板置于 $y = \pm a$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\begin{cases} E'_y = \gamma(E_y - vB_z) \\ B'_z = \gamma(B_z - vE_y/c^2) \end{cases}}$

对 x 电场的分量，可将板放置于：$x = \pm a$，由于垂直于运动方向没有洛仑兹收缩：$E'_x = E_x$

注意在 S 观察，板间仍然没有磁场，得不到 B_x 的变换关系。为此考虑一沿 x 向的无限长螺线管。

在螺线管惯性系，管内磁感应强度：$B_x = \mu_0 nI$, $\quad n$, I 分别为单位长度线圈匝数和电流

平行板放置于 $z = \pm a$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\begin{cases} E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \\ B'_y = \gamma(B_y + vE_z/c^2) \end{cases}}$

类似可得：若板置于 $y = \pm a$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\begin{cases} E'_y = \gamma(E_y - vB_z) \\ B'_z = \gamma(B_z - vE_y/c^2) \end{cases}}$

对 x 电场的分量，可将板放置于：$x = \pm a$，由于垂直于运动方向没有洛仑兹收缩：$E'_x = E_x$

注意在 S 观察，板间仍然没有磁场，得不到 B_x 的变换关系。为此考虑一沿 x 向的无限长螺线管。

在螺线管惯性系，管内磁感应强度：$B_x = \mu_0 n I$, $\quad n$, I 分别为单位长度线圈匝数和电流

在 S' 惯性系观察，由于洛仑兹收缩：$n' = \gamma n$

平行板放置于 $z=\pm a$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\begin{cases} E'_z=\gamma(E_z+vB_y) \\ B'_y=\gamma(B_y+vE_z/c^2) \end{cases}}$

类似可得：若板置于 $y=\pm a$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\begin{cases} E'_y=\gamma(E_y-vB_z) \\ B'_z=\gamma(B_z-vE_y/c^2) \end{cases}}$

对 x 电场的分量，可将板放置于：$x=\pm a$，由于垂直于运动方向没有洛仑兹收缩：$E'_x=E_x$

注意在 S 观察，板间仍然没有磁场，得不到 B_x 的变换关系。为此考虑一沿 x 向的无限长螺线管。

在螺线管惯性系，管内磁感应强度：$B_x=\mu_0 nI,\qquad n,\, I$ 分别为单位长度线圈匝数和电流

在 S' 惯性系观察，由于洛仑兹收缩：$n'=\gamma n$

同时，由于时间运动时间变缓，电流（单位时间穿过导线截面的电量）也发生改变：

平行板放置于 $z=\pm a$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\begin{cases} E_z' = \gamma(E_z + vB_y) \\ B_y' = \gamma(B_y + vE_z/c^2) \end{cases}}$

类似可得：若板置于 $y=\pm a$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\begin{cases} E_y' = \gamma(E_y - vB_z) \\ B_z' = \gamma(B_z - vE_y/c^2) \end{cases}}$

对 x 电场的分量，可将板放置于：$x=\pm a$，由于垂直于运动方向没有洛仑兹收缩：$E_x' = E_x$

注意在 S 观察，板间仍然没有磁场，得不到 B_x 的变换关系。为此考虑一沿 x 向的无限长螺线管。

在螺线管惯性系，管内磁感应强度：$B_x = \mu_0 nI$， n, I 分别为单位长度线圈匝数和电流

在 S' 惯性系观察，由于洛仑兹收缩：$n' = \gamma n$

同时，由于时间运动时间变缓，电流（单位时间穿过导线截面的电量）也发生改变：

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}, \quad I' = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t'}, \quad \mathrm{d}t' = \gamma \mathrm{d}t = \gamma \mathrm{d}\tau$$

在 S 系观察，因为观察者相对于螺线管静止，时间为固有时间

平行板放置于 $z=\pm a$ $\Longrightarrow$ $$\boxed{\begin{cases} E'_z=\gamma(E_z+vB_y) \\ B'_y=\gamma(B_y+vE_z/c^2) \end{cases}}$$

类似可得：若板置于 $y=\pm a$ $\Longrightarrow$ $$\boxed{\begin{cases} E'_y=\gamma(E_y-vB_z) \\ B'_z=\gamma(B_z-vE_y/c^2) \end{cases}}$$

对 x 电场的分量，可将板放置于：$x=\pm a$，由于垂直于运动方向没有洛仑兹收缩：$E'_x=E_x$

注意在 S 观察，板间仍然没有磁场，得不到 B_x 的变换关系。为此考虑一沿 x 向的无限长螺线管。

在螺线管惯性系，管内磁感应强度：$B_x=\mu_0 nI$, $\quad n$, I 分别为单位长度线圈匝数和电流

在 S' 惯性系观察，由于洛仑兹收缩：$n'=\gamma n$

同时，由于时间运动时间变缓，电流（单位时间穿过导线截面的电量）也发生改变：

$$I=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t},\quad I'=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t'},\quad \mathrm{d}t'=\gamma\mathrm{d}t=\gamma\mathrm{d}\tau$$ 在 S 系观察，因为观察者相对于螺线管静止，时间为固有时间

$$\Longrightarrow\quad I=\gamma I'$$

平行板放置于 $z = \pm a$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\begin{cases} E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \\ B'_y = \gamma(B_y + vE_z/c^2) \end{cases}}$

类似可得：若板置于 $y = \pm a$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\begin{cases} E'_y = \gamma(E_y - vB_z) \\ B'_z = \gamma(B_z - vE_y/c^2) \end{cases}}$

对 x 电场的分量，可将板放置于：$x = \pm a$，由于垂直于运动方向没有洛仑兹收缩：$E'_x = E_x$

注意在 S 观察，板间仍然没有磁场，得不到 B_x 的变换关系。为此考虑一沿 x 向的无限长螺线管。

在螺线管惯性系，管内磁感应强度：$B_x = \mu_0 nI$，　n, I 分别为单位长度线圈匝数和电流

在 S' 惯性系观察，由于洛仑兹收缩：$n' = \gamma n$

同时，由于时间运动时间变缓，电流（单位时间穿过导线截面的电量）也发生改变：

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}, \quad I' = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t'}, \quad \mathrm{d}t' = \gamma \mathrm{d}t = \gamma \mathrm{d}\tau$$

在 S 系观察，因为观察者相对于螺线管静止，时间为固有时间

$$\Longrightarrow \quad I = \gamma I' \quad \Longrightarrow \quad B'_x = \mu_0 n' I' = \mu_0 n I = B_x$$

平行板放置于 $z=\pm a$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\begin{cases} E'_z=\gamma(E_z+vB_y) \\ B'_y=\gamma(B_y+vE_z/c^2) \end{cases}}$

类似可得：若板置于 $y=\pm a$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\begin{cases} E'_y=\gamma(E_y-vB_z) \\ B'_z=\gamma(B_z-vE_y/c^2) \end{cases}}$

对 x 电场的分量，可将板放置于：$x=\pm a$，由于垂直于运动方向没有洛仑兹收缩：$E'_x=E_x$

注意在 S 观察，板间仍然没有磁场，得不到 B_x 的变换关系。为此考虑一沿 x 向的无限长螺线管。

在螺线管惯性系，管内磁感应强度：$B_x=\mu_0 nI$，　n, I 分别为单位长度线圈匝数和电流

在 S' 惯性系观察，由于洛仑兹收缩：$n'=\gamma n$

同时，由于时间运动时间变缓，电流（单位时间穿过导线截面的电量）也发生改变：

$$I=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t},\quad I'=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t'},\quad \mathrm{d}t'=\gamma\mathrm{d}t=\gamma\mathrm{d}\tau$$

在 S 系观察，因为观察者相对于螺线管静止，时间为固有时间

$$\Longrightarrow\quad I=\gamma I'\quad\Longrightarrow\quad B'_x=\mu_0 n'I'=\mu_0 nI=B_x$$

综上：

$$\boxed{\begin{array}{lll} E'_x=E_x, & E'_y=\gamma(E_y-vB_z), & E'_z=\gamma(E_z+vB_y) \\ B'_x=B_x, & B'_y=\gamma\left(B_y+\dfrac{v}{c^2}E_z\right), & B'_z=\gamma\left(B_z-\dfrac{v}{c^2}E_y\right) \end{array}}$$

Let there be light

$$\boxed{\begin{aligned} &E'_x = E_x, \quad &&E'_y = \gamma(E_y - vB_z), \quad &&E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \\ &B'_x = B_x, \quad &&B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right), \quad &&B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) \end{aligned}}$$

Let there be light

$$\boxed{\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma(E_y - vB_z), & E'_z &= \gamma(E_z + vB_y) \\ B'_x &= B_x, & B'_y &= \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right), & B'_z &= \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) \end{aligned}}$$

讨论：

Let there be light

$$E'_x = E_x, \qquad E'_y = \gamma(E_y - vB_z), \qquad E'_z = \gamma(E_z + vB_y)$$
$$B'_x = B_x, \qquad B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right), \qquad B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)$$

讨论：

1. 当 $\vec{\boldsymbol{B}} = 0$ 时：$\vec{\boldsymbol{B}}' = \gamma\frac{v}{c^2}(E_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - E_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_z) = \frac{v}{c^2}(E'_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - E'_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$

$$\boxed{\begin{aligned} &E'_x = E_x, && E'_y = \gamma(E_y - vB_z), && E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \\ &B'_x = B_x, && B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right), && B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) \end{aligned}}$$

讨论：

1. 当 $\vec{\boldsymbol{B}} = 0$ 时：$\vec{\boldsymbol{B}}' = \gamma\dfrac{v}{c^2}(E_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - E_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_z) = \dfrac{v}{c^2}(E'_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - E'_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$

$\Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{B}}' = -\dfrac{1}{c^2}(\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{E}}')$，　若某惯性系无磁场，则任意惯性系电磁场相互垂直

$$\boxed{\begin{aligned} &E'_x = E_x, \quad && E'_y = \gamma(E_y - vB_z), \quad && E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \\ &B'_x = B_x, \quad && B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right), \quad && B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) \end{aligned}}$$

讨论：

1. 当 $\vec{\boldsymbol{B}} = 0$ 时：$\vec{\boldsymbol{B}}' = \gamma\dfrac{v}{c^2}(E_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - E_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_z) = \dfrac{v}{c^2}(E'_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - E'_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$

   $\Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{B}}' = -\dfrac{1}{c^2}(\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{E}}')$， 若某惯性系无磁场，则任意惯性系电磁场相互垂直

2. 当 $\vec{\boldsymbol{E}} = 0$ 时：$\vec{\boldsymbol{E}}' = -\gamma v(B_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - B_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_z) = -v(B'_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - B'_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$

$$E'_x = E_x, \qquad E'_y = \gamma(E_y - vB_z), \qquad E'_z = \gamma(E_z + vB_y)$$
$$B'_x = B_x, \qquad B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right), \qquad B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)$$

讨论：

1. 当 $\vec{\boldsymbol{B}} = 0$ 时：$\vec{\boldsymbol{B}}' = \gamma\frac{v}{c^2}(E_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - E_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_z) = \frac{v}{c^2}(E'_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - E'_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$

$$\Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{B}}' = -\frac{1}{c^2}(\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{E}}'),$$ 若某惯性系无磁场，则任意惯性系电磁场相互垂直

2. 当 $\vec{\boldsymbol{E}} = 0$ 时：$\vec{\boldsymbol{E}}' = -\gamma v(B_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - B_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_z) = -v(B'_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - B'_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$

$$\Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{E}}' = \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}',$$ 若某惯性系无电场，则任意惯性系电磁场相互垂直

Let there be light

$$
\begin{aligned}
&E'_x = E_x, \quad && E'_y = \gamma(E_y - vB_z), \quad && E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \\
&B'_x = B_x, \quad && B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right), \quad && B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)
\end{aligned}
$$

讨论：

1. 当 $\vec{\boldsymbol{B}} = 0$ 时：$\vec{\boldsymbol{B}}' = \gamma\dfrac{v}{c^2}(E_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - E_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_z) = \dfrac{v}{c^2}(E'_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - E'_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$

   $\Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{B}}' = -\dfrac{1}{c^2}(\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{E}}'),$ 若某惯性系无磁场，则任意惯性系电磁场相互垂直

2. 当 $\vec{\boldsymbol{E}} = 0$ 时：$\vec{\boldsymbol{E}}' = -\gamma v(B_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - B_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_z) = -v(B'_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - B'_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$

   $\Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{E}}' = \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}',$ 若某惯性系无电场，则任意惯性系电磁场相互垂直

3. 由上，若某惯性系只有电场或磁场，则在其它惯性系，电磁场关系非常简单。

$$
\begin{aligned}
&E'_x = E_x, \qquad E'_y = \gamma(E_y - vB_z), \qquad E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \\
&B'_x = B_x, \qquad B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right), \qquad B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)
\end{aligned}
$$

讨论：

1. 当 $\vec{B} = 0$ 时：$\vec{B}' = \gamma\frac{v}{c^2}(E_z\,\hat{e}_y - E_y\,\hat{e}_z) = \frac{v}{c^2}(E'_y\,\hat{e}_y - E'_z\,\hat{e}_z)$

   $\Longrightarrow \quad \vec{B}' = -\frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E}'),$ 若某惯性系无磁场，则任意惯性系电磁场相互垂直

2. 当 $\vec{E} = 0$ 时：$\vec{E}' = -\gamma v(B_z\,\hat{e}_y - B_y\,\hat{e}_z) = -v(B'_z\,\hat{e}_y - B'_y\,\hat{e}_z)$

   $\Longrightarrow \quad \vec{E}' = \vec{v}\times\vec{B}',$ 若某惯性系无电场，则任意惯性系电磁场相互垂直

3. 由上，若某惯性系只有电场或磁场，则在其它惯性系，电磁场关系非常简单。

例 3：求匀速运动点电荷的电磁场

$$E'_x = E_x, \qquad E'_y = \gamma(E_y - vB_z), \qquad E'_z = \gamma(E_z + vB_y)$$

$$B'_x = B_x, \qquad B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right), \qquad B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)$$

讨论：

1. 当 $\vec{\boldsymbol{B}} = 0$ 时：$\vec{\boldsymbol{B}}' = \gamma\frac{v}{c^2}(E_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - E_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_z) = \frac{v}{c^2}(E'_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - E'_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$

   $\Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{B}}' = -\frac{1}{c^2}(\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{E}}'),$ 若某惯性系无磁场，则任意惯性系电磁场相互垂直

2. 当 $\vec{\boldsymbol{E}} = 0$ 时：$\vec{\boldsymbol{E}}' = -\gamma v(B_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - B_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_z) = -v(B'_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - B'_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$

   $\Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{E}}' = \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}',$ 若某惯性系无电场，则任意惯性系电磁场相互垂直

3. 由上，若某惯性系只有电场或磁场，则在其它惯性系，电磁场关系非常简单。

例 3：求匀速运动点电荷的电磁场

在电荷惯性系 S_0：$\vec{\boldsymbol{E}}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r_0^3}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}_0}{r_0}$

$$E'_x = E_x,\qquad E'_y = \gamma(E_y - vB_z),\qquad E'_z = \gamma(E_z + vB_y)$$
$$B'_x = B_x,\qquad B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right),\qquad B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)$$

讨论：

1. 当 $\vec{\boldsymbol{B}} = 0$ 时：$\vec{\boldsymbol{B}}' = \gamma\frac{v}{c^2}(E_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - E_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_z) = \frac{v}{c^2}(E'_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - E'_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$

   $\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{B}}' = -\frac{1}{c^2}(\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{E}}')$， 若某惯性系无磁场，则任意惯性系电磁场相互垂直

2. 当 $\vec{\boldsymbol{E}} = 0$ 时：$\vec{\boldsymbol{E}}' = -\gamma v(B_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - B_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_z) = -v(B'_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - B'_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$

   $\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{E}}' = \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}'$， 若某惯性系无电场，则任意惯性系电磁场相互垂直

3. 由上，若某惯性系只有电场或磁场，则在其它惯性系，电磁场关系非常简单。

例 3：求匀速运动点电荷的电磁场

在电荷惯性系 S_0：$\vec{\boldsymbol{E}}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r_0^3}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}_0}{r_0}$

$$4\pi\epsilon_0 E_{x0} = \frac{qx_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}}$$
$$4\pi\epsilon_0 E_{y0} = \frac{qy_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}}$$
$$4\pi\epsilon_0 E_{z0} = \frac{qz_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &E'_x = E_x, && E'_y = \gamma(E_y - vB_z), && E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \\ &B'_x = B_x, && B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right), && B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) \end{aligned}}$$

讨论：

1. 当 $\vec{\boldsymbol{B}} = 0$ 时：$\vec{\boldsymbol{B}}' = \gamma\dfrac{v}{c^2}(E_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - E_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_z) = \dfrac{v}{c^2}(E'_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - E'_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$

   $\Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{B}}' = -\dfrac{1}{c^2}(\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{E}}'),$ 若某惯性系无磁场，则任意惯性系电磁场相互垂直

2. 当 $\vec{\boldsymbol{E}} = 0$ 时：$\vec{\boldsymbol{E}}' = -\gamma v(B_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - B_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_z) = -v(B'_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - B'_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$

   $\Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{E}}' = \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}',$ 若某惯性系无电场，则任意惯性系电磁场相互垂直

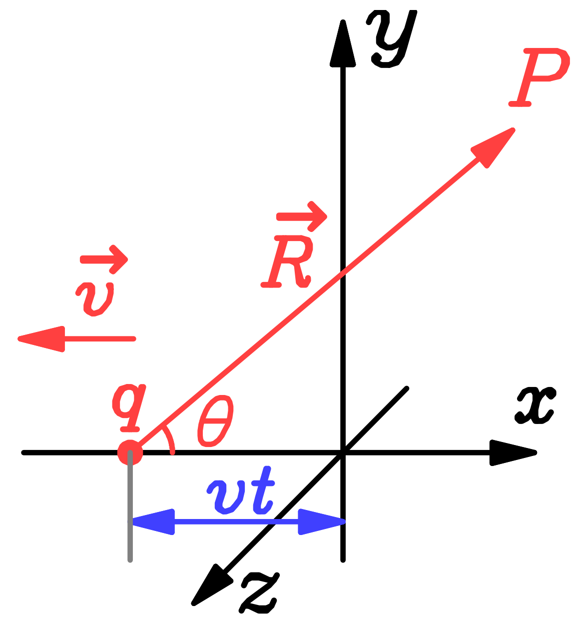
3. 由上，若某惯性系只有电场或磁场，则在其它惯性系，电磁场关系非常简单。

例 3：求匀速运动点电荷的电磁场

在电荷惯性系 S_0：$\vec{\boldsymbol{E}}_0 = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{r_0^3}\dfrac{\vec{\boldsymbol{r}}_0}{r_0}$

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 E_{x0} &= \frac{qx_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \\ 4\pi\epsilon_0 E_{y0} &= \frac{qy_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \\ 4\pi\epsilon_0 E_{z0} &= \frac{qz_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 E_x &= E_{x0} = \frac{qx_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \\ 4\pi\epsilon_0 E_y &= \gamma E_y = \frac{q\gamma y_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \\ 4\pi\epsilon_0 E_z &= \gamma E_z = \frac{q\gamma z_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Let there be light

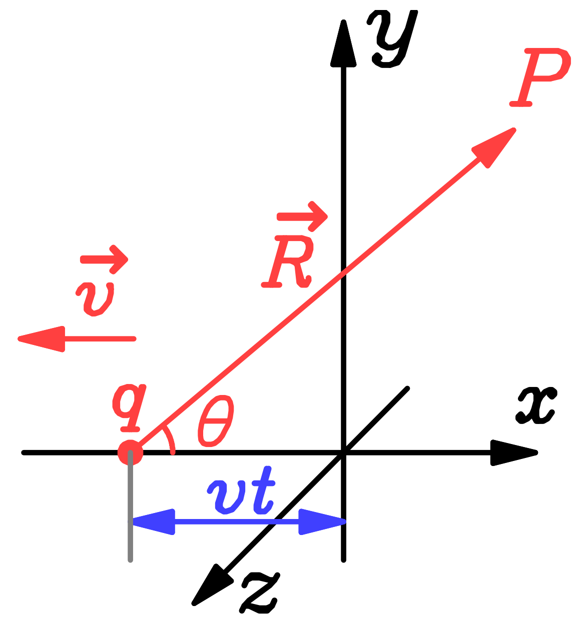


Let there be light

$$4\pi\epsilon_0 E_{x0} = \frac{qx_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}$$

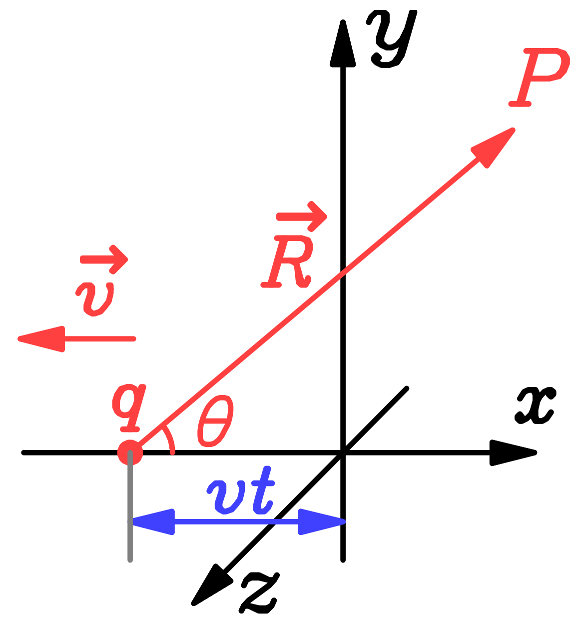
$$4\pi\epsilon_0 E_{y0} = \frac{qy_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}$$

$$4\pi\epsilon_0 E_{z0} = \frac{qz_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}$$



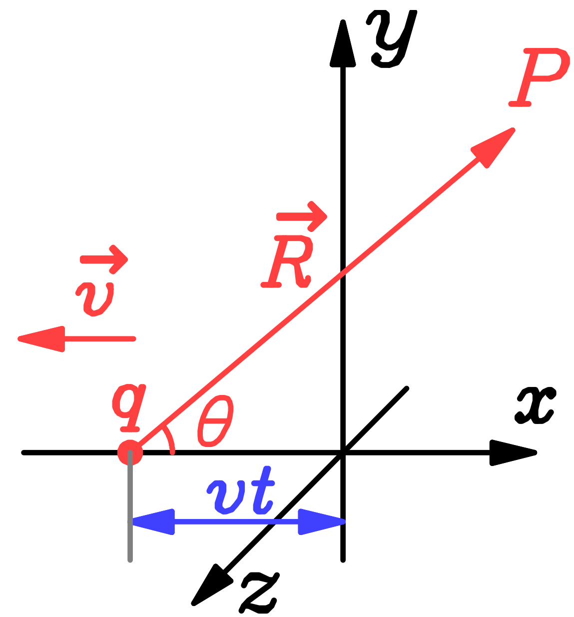
Let there be light

$$
\begin{aligned}
4\pi\epsilon_0 E_{x0} &= \frac{qx_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \\
4\pi\epsilon_0 E_{y0} &= \frac{qy_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \\
4\pi\epsilon_0 E_{z0} &= \frac{qz_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}
\end{aligned}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{aligned}
4\pi\epsilon_0 E_x &= E_{x0} = \frac{qx_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \\
4\pi\epsilon_0 E_y &= \gamma E_y = \frac{q\gamma y_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \\
4\pi\epsilon_0 E_z &= \gamma E_z = \frac{q\gamma z_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
4\pi\epsilon_0 E_{x0} &= \frac{q x_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \\
4\pi\epsilon_0 E_{y0} &= \frac{q y_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \\
4\pi\epsilon_0 E_{z0} &= \frac{q z_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}
\end{aligned}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{aligned}
4\pi\epsilon_0 E_x &= E_{x0} = \frac{q x_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \\
4\pi\epsilon_0 E_y &= \gamma E_y = \frac{q\gamma y_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \\
4\pi\epsilon_0 E_z &= \gamma E_z = \frac{q\gamma z_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

由洛伦兹变换，化为 S 系坐标的函数：
$$
\begin{cases}
x_0 = \gamma(x+vt) = \gamma R_x \\
y_0 = y = R_y \\
z_0 = z = R_z
\end{cases}
$$

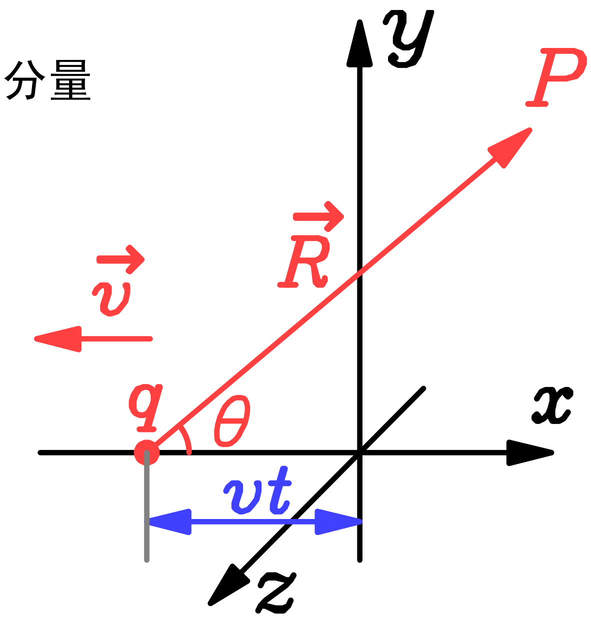


Let there be light

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 E_{x0} &= \frac{qx_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \\ 4\pi\epsilon_0 E_{y0} &= \frac{qy_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \\ 4\pi\epsilon_0 E_{z0} &= \frac{qz_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 E_x &= E_{x0} = \frac{qx_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \\ 4\pi\epsilon_0 E_y &= \gamma E_y = \frac{q\gamma y_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \\ 4\pi\epsilon_0 E_z &= \gamma E_z = \frac{q\gamma z_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

由洛伦兹变换，化为 S 系坐标的函数：$\begin{cases} x_0 = \gamma(x+vt) = \gamma R_x \\ y_0 = y = R_y \\ z_0 = z = R_z \end{cases}$

R_x，R_y，R_z 为电荷当前位置到观察点的位置矢量的直角坐标分量



$$4\pi\epsilon_0 E_{x0} = \frac{qx_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \qquad\qquad 4\pi\epsilon_0 E_x = E_{x0} = \frac{qx_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}$$

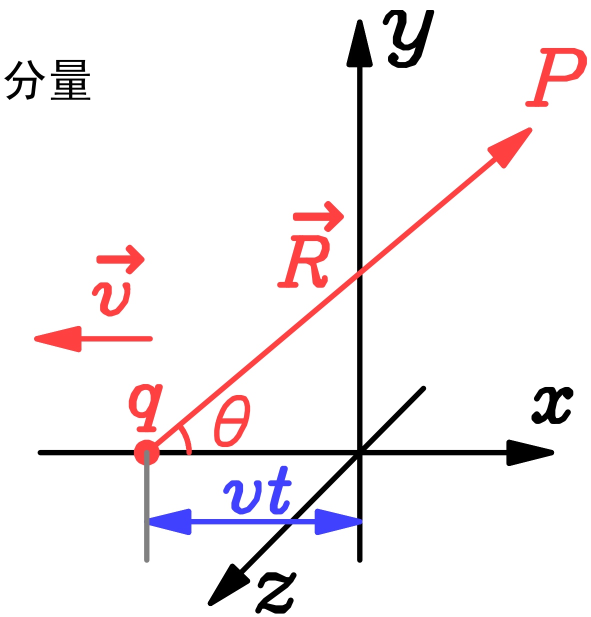
$$4\pi\epsilon_0 E_{y0} = \frac{qy_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \quad \Longrightarrow \quad 4\pi\epsilon_0 E_y = \gamma E_y = \frac{q\gamma y_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}$$

$$4\pi\epsilon_0 E_{z0} = \frac{qz_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \qquad\qquad 4\pi\epsilon_0 E_z = \gamma E_z = \frac{q\gamma z_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}$$

由洛伦兹变换，化为 S 系坐标的函数：
$$\begin{cases} x_0 = \gamma(x+vt) = \gamma R_x \\ y_0 = y = R_y \\ z_0 = z = R_z \end{cases}$$

R_x，R_y，R_z 为电荷当前位置到观察点的位置矢量的直角坐标分量

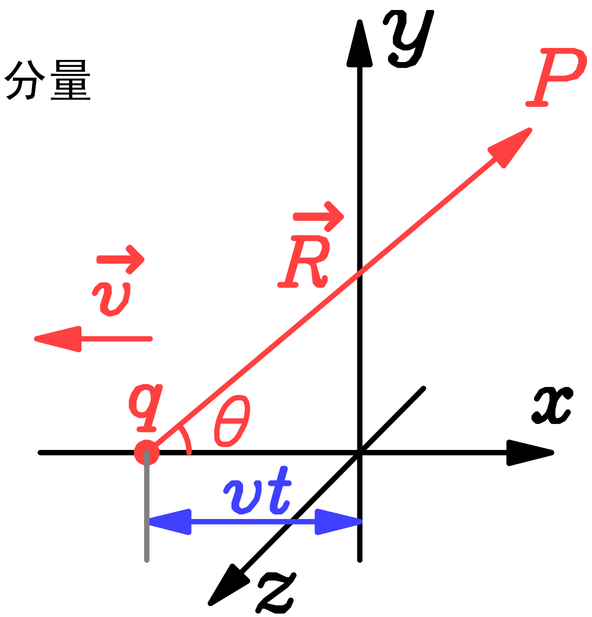
代入：$\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\gamma q\vec{\boldsymbol{R}}}{(\gamma^2R_x^2+R_y^2+R_z^2)^{3/2}}$



$$4\pi\epsilon_0 E_{x0} = \frac{qx_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \qquad\qquad 4\pi\epsilon_0 E_x = E_{x0} = \frac{qx_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}$$
$$4\pi\epsilon_0 E_{y0} = \frac{qy_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \quad\Longrightarrow\quad 4\pi\epsilon_0 E_y = \gamma E_y = \frac{q\gamma y_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}$$
$$4\pi\epsilon_0 E_{z0} = \frac{qz_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \qquad\qquad 4\pi\epsilon_0 E_z = \gamma E_z = \frac{q\gamma z_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}$$

由洛伦兹变换，化为 S 系坐标的函数：
$$\begin{cases} x_0 = \gamma(x+vt) = \gamma R_x \\ y_0 = y = R_y \\ z_0 = z = R_z \end{cases}$$

R_x，R_y，R_z 为电荷当前位置到观察点的位置矢量的直角坐标分量



代入：
$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma q\vec{\boldsymbol{R}}}{(\gamma^2R_x^2+R_y^2+R_z^2)^{3/2}}$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma q\vec{\boldsymbol{R}}}{(\gamma^2R^2\cos^2\theta+R^2\sin^2\theta)^{3/2}}$$

$$4\pi\epsilon_0 E_{x0} = \frac{qx_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \qquad\qquad 4\pi\epsilon_0 E_x = E_{x0} = \frac{qx_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}$$

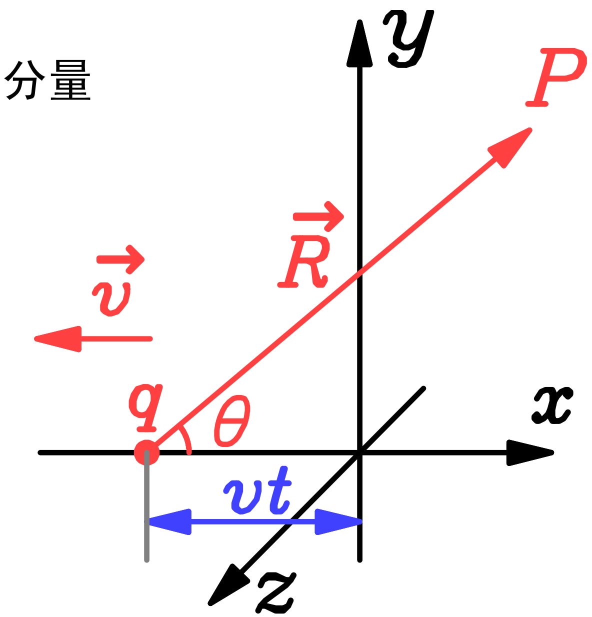
$$4\pi\epsilon_0 E_{y0} = \frac{qy_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \quad \Longrightarrow \quad 4\pi\epsilon_0 E_y = \gamma E_y = \frac{q\gamma y_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}$$

$$4\pi\epsilon_0 E_{z0} = \frac{qz_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \qquad\qquad 4\pi\epsilon_0 E_z = \gamma E_z = \frac{q\gamma z_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}$$

由洛伦兹变换，化为 S 系坐标的函数：
$$\begin{cases} x_0 = \gamma(x+vt) = \gamma R_x \\ y_0 = y = R_y \\ z_0 = z = R_z \end{cases}$$

R_x，R_y，R_z 为电荷当前位置到观察点的位置矢量的直角坐标分量

代入：
$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma q\vec{\boldsymbol{R}}}{(\gamma^2R_x^2+R_y^2+R_z^2)^{3/2}}$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma q\vec{\boldsymbol{R}}}{(\gamma^2R^2\cos^2\theta+R^2\sin^2\theta)^{3/2}}$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-v^2/c^2)q}{[1-(v^2/c^2)\sin^2\theta]^{3/2}}\frac{\hat{\boldsymbol{e}}_R}{R^2}$$



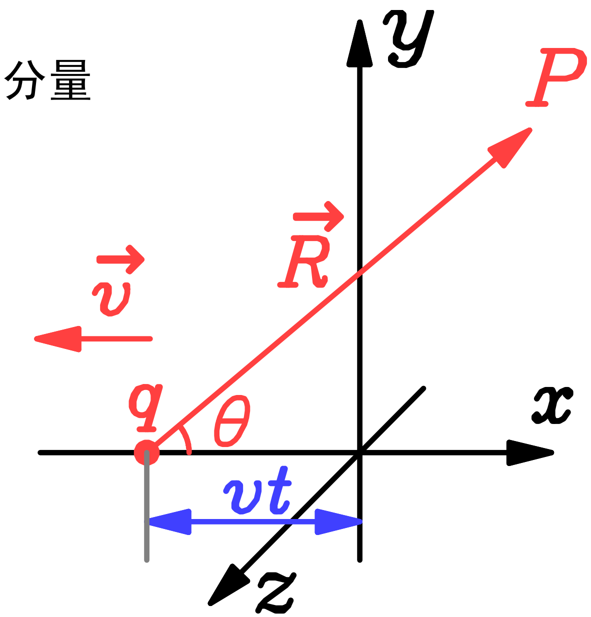
$$4\pi\epsilon_0 E_{x0} = \frac{qx_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \qquad\qquad 4\pi\epsilon_0 E_x = E_{x0} = \frac{qx_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}$$

$$4\pi\epsilon_0 E_{y0} = \frac{qy_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \quad\Longrightarrow\quad 4\pi\epsilon_0 E_y = \gamma E_y = \frac{q\gamma y_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}$$

$$4\pi\epsilon_0 E_{z0} = \frac{qz_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}} \qquad\qquad 4\pi\epsilon_0 E_z = \gamma E_z = \frac{q\gamma z_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}$$

由洛伦兹变换，化为 S 系坐标的函数：
$$\begin{cases} x_0 = \gamma(x+vt) = \gamma R_x \\ y_0 = y = R_y \\ z_0 = z = R_z \end{cases}$$

R_x，R_y，R_z 为电荷当前位置到观察点的位置矢量的直角坐标分量

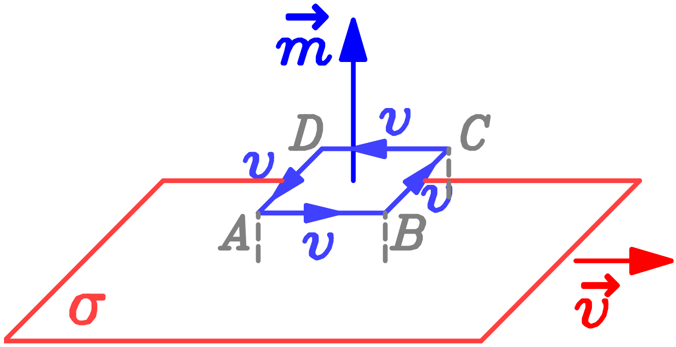


代入：
$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma q\vec{\boldsymbol{R}}}{(\gamma^2R_x^2+R_y^2+R_z^2)^{3/2}}$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma q\vec{\boldsymbol{R}}}{(\gamma^2R^2\cos^2\theta+R^2\sin^2\theta)^{3/2}}$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-v^2/c^2)q}{[1-(v^2/c^2)\sin^2\theta]^{3/2}}\frac{\hat{\boldsymbol{e}}_R}{R^2}$$

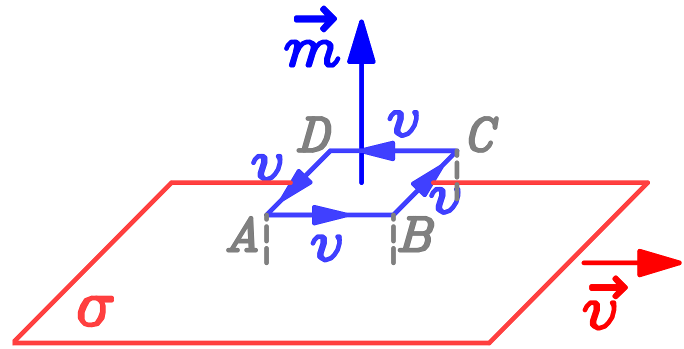
$$\vec{\boldsymbol{B}} = -\frac{1}{c^2}(\vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{E}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q(1-v^2/c^2)\sin\theta}{[1-(v^2/c^2)\sin^2\theta]^{3/2}}\frac{\hat{\boldsymbol{e}}_\phi}{R^2}$$

例 4：一边长为 a 的正方形，每边的线电荷密度为 λ，线电荷以速度 v 沿正方形边循环。现将此正方形放置于一无限大、静止面电荷密度为 σ_0 的平面上方，距平面 b，现让平面以速度 v 沿 $+x$ 方向运动，试在磁偶极惯性系 S 和平面惯性系 S' 求作用于偶极上的力矩。

例 4：一边长为 a 的正方形，每边的线电荷密度为 λ，线电荷以速度 v 沿正方形边循环。现将此正方形放置于一无限大、静止面电荷密度为 σ_0 的平面上方，距平面 b，现让平面以速度 v 沿 $+x$ 方向运动，试在磁偶极惯性系 S 和平面惯性系 S' 求作用于偶极上的力矩。

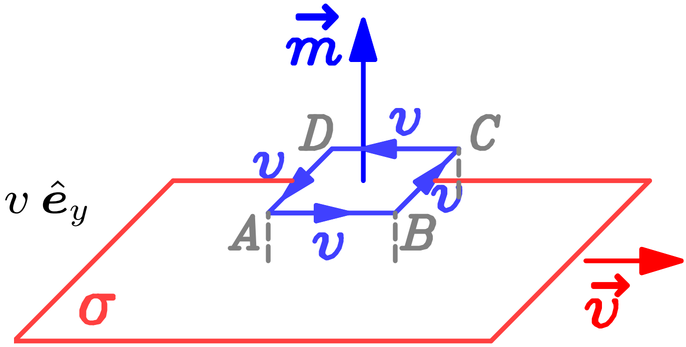


例 4：一边长为 a 的正方形，每边的线电荷密度为 λ，线电荷以速度 v 沿正方形边循环。现将此正方形放置于一无限大、静止面电荷密度为 σ_0 的平面上方，距平面 b，现让平面以速度 v 沿 $+x$ 方向运动，试在磁偶极惯性系 S 和平面惯性系 S' 求作用于偶极上的力矩。



在 S 系：运动的面电荷构成面点流：$\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \sigma v\, \hat{\boldsymbol{e}}_x = \gamma\sigma_0 v\, \hat{\boldsymbol{e}}_x$

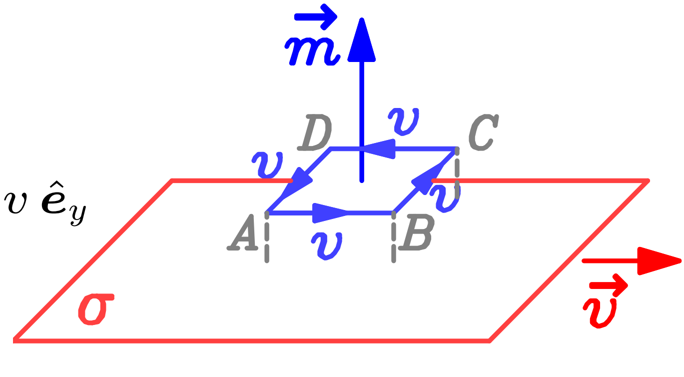
例 4：一边长为 a 的正方形，每边的线电荷密度为 λ，线电荷以速度 v 沿正方形边循环。现将此正方形放置于一无限大、静止面电荷密度为 σ_0 的平面上方，距平面 b，现让平面以速度 v 沿 $+x$ 方向运动，试在磁偶极惯性系 S 和平面惯性系 S' 求作用于偶极上的力矩。



在 S 系：运动的面电荷构成面点流：$\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \sigma v\, \hat{\boldsymbol{e}}_x = \gamma\sigma_0 v\, \hat{\boldsymbol{e}}_x$

从而磁偶极处的磁感应强度为：$\vec{\boldsymbol{B}} = -\dfrac{\mu_0}{2}\alpha\, \hat{\boldsymbol{e}}_y = -\dfrac{1}{2}\,\mu_0\gamma\sigma_0 v\, \hat{\boldsymbol{e}}_y$

例 4：一边长为 a 的正方形，每边的线电荷密度为 λ，线电荷以速度 v 沿正方形边循环。现将此正方形放置于一无限大、静止面电荷密度为 σ_0 的平面上方，距平面 b，现让平面以速度 v 沿 $+x$ 方向运动，试在磁偶极惯性系 S 和平面惯性系 S' 求作用于偶极上的力矩。

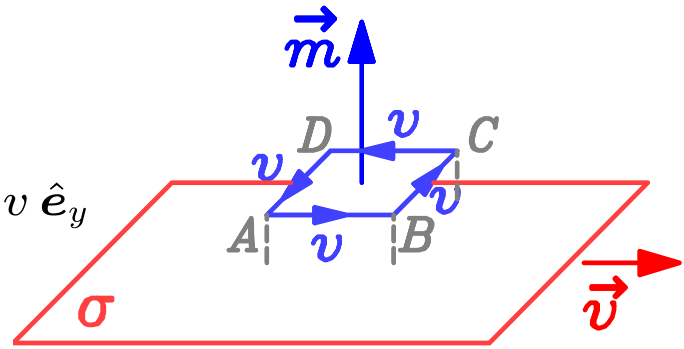


在 S 系：运动的面电荷构成面点流：$\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \sigma v\,\hat{\boldsymbol{e}}_x = \gamma\sigma_0 v\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$

从而磁偶极处的磁感应强度为：$\vec{\boldsymbol{B}} = -\dfrac{\mu_0}{2}\alpha\,\hat{\boldsymbol{e}}_y = -\dfrac{1}{2}\,\mu_0\gamma\sigma_0 v\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$

力矩：$\vec{\boldsymbol{N}} = \vec{\boldsymbol{m}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = \lambda v a^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{B}} = \dfrac{1}{2}\,\mu_0\lambda\sigma v^2 a^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$

例 4：一边长为 a 的正方形，每边的线电荷密度为 λ，线电荷以速度 v 沿正方形边循环。现将此正方形放置于一无限大、静止面电荷密度为 σ_0 的平面上方，距平面 b，现让平面以速度 v 沿 $+x$ 方向运动，试在磁偶极惯性系 S 和平面惯性系 S' 求作用于偶极上的力矩。



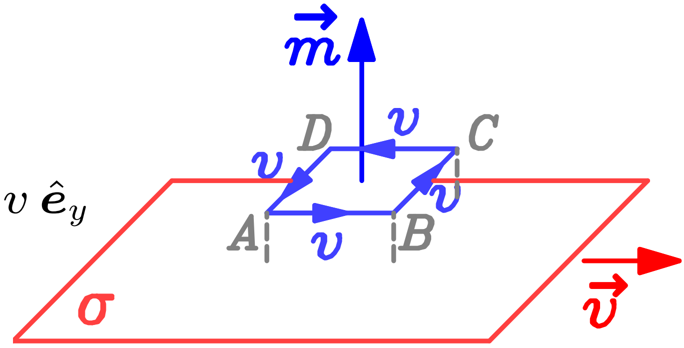
在 S 系：运动的面电荷构成面点流：$\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \sigma v\, \hat{\boldsymbol{e}}_x = \gamma\sigma_0 v\, \hat{\boldsymbol{e}}_x$

从而磁偶极处的磁感应强度为：$\vec{\boldsymbol{B}} = -\dfrac{\mu_0}{2}\alpha\, \hat{\boldsymbol{e}}_y = -\dfrac{1}{2}\,\mu_0\gamma\sigma_0 v\, \hat{\boldsymbol{e}}_y$

力矩：$\vec{\boldsymbol{N}} = \vec{\boldsymbol{m}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = \lambda v a^2\, \hat{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{B}} = \dfrac{1}{2}\,\mu_0\lambda\sigma v^2 a^2\, \hat{\boldsymbol{e}}_x$

在 S' 系：面电荷静止，无磁场，只有电场 $\vec{\boldsymbol{E}}' = \dfrac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\, \hat{\boldsymbol{e}}_z$

例 4：一边长为 a 的正方形，每边的线电荷密度为 λ，线电荷以速度 v 沿正方形边循环。现将此正方形放置于一无限大、静止面电荷密度为 σ_0 的平面上方，距平面 b，现让平面以速度 v 沿 $+x$ 方向运动，试在磁偶极惯性系 S 和平面惯性系 S' 求作用于偶极上的力矩。



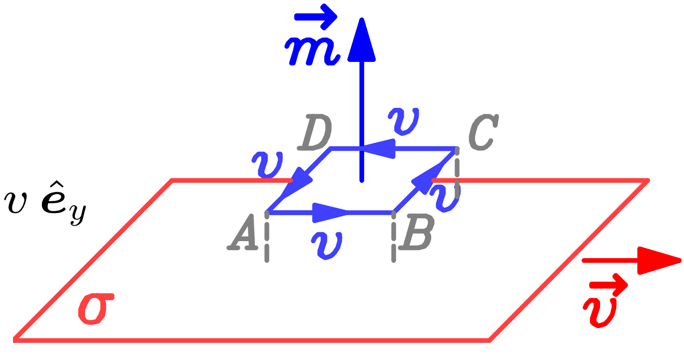
在 S 系：运动的面电荷构成面点流：$\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \sigma v\,\hat{\boldsymbol{e}}_x = \gamma\sigma_0 v\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$

从而磁偶极处的磁感应强度为：$\vec{\boldsymbol{B}} = -\dfrac{\mu_0}{2}\alpha\,\hat{\boldsymbol{e}}_y = -\dfrac{1}{2}\,\mu_0\gamma\sigma_0 v\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$

力矩：$\vec{\boldsymbol{N}} = \vec{\boldsymbol{m}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = \lambda v a^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{B}} = \dfrac{1}{2}\,\mu_0\lambda\sigma v^2 a^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$

在 S' 系：面电荷静止，无磁场，只有电场 $\vec{\boldsymbol{E}}' = \dfrac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$ 正方形 ABCD 运动速度为 $-v\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$

例 4：一边长为 a 的正方形，每边的线电荷密度为 λ，线电荷以速度 v 沿正方形边循环。现将此正方形放置于一无限大、静止面电荷密度为 σ_0 的平面上方，距平面 b，现让平面以速度 v 沿 $+x$ 方向运动，试在磁偶极惯性系 S 和平面惯性系 S' 求作用于偶极上的力矩。



在 S 系：运动的面电荷构成面点流：$\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \sigma v\,\hat{\boldsymbol{e}}_x = \gamma\sigma_0 v\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$

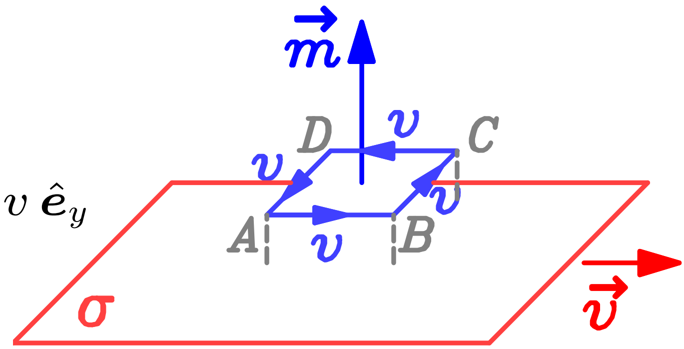
从而磁偶极处的磁感应强度为：$\vec{\boldsymbol{B}} = -\dfrac{\mu_0}{2}\alpha\,\hat{\boldsymbol{e}}_y = -\dfrac{1}{2}\,\mu_0\gamma\sigma_0 v\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$

力矩：$\vec{\boldsymbol{N}} = \vec{\boldsymbol{m}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = \lambda v a^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{B}} = \dfrac{1}{2}\,\mu_0\lambda\sigma v^2 a^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$

在 S' 系：面电荷静止，无磁场，只有电场 $\vec{\boldsymbol{E}}' = \dfrac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$ 正方形 ABCD 运动速度为 $-v\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$

正方形 AB 边，电荷密度为：$\lambda_1 = \lambda_0 = \lambda/\gamma$,

例 4：一边长为 a 的正方形，每边的线电荷密度为 λ，线电荷以速度 v 沿正方形边循环。现将此正方形放置于一无限大、静止面电荷密度为 σ_0 的平面上方，距平面 b，现让平面以速度 v 沿 $+x$ 方向运动，试在磁偶极惯性系 S 和平面惯性系 S' 求作用于偶极上的力矩。



在 S 系：运动的面电荷构成面点流：$\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \sigma v\,\hat{\boldsymbol{e}}_x = \gamma\sigma_0 v\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$

从而磁偶极处的磁感应强度为：$\vec{\boldsymbol{B}} = -\dfrac{\mu_0}{2}\alpha\,\hat{\boldsymbol{e}}_y = -\dfrac{1}{2}\,\mu_0\gamma\sigma_0 v\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$

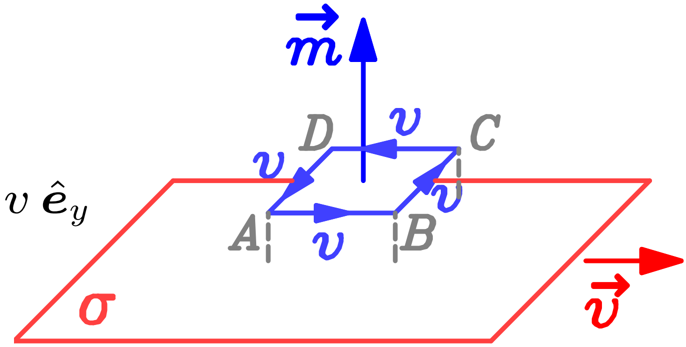
力矩：$\vec{\boldsymbol{N}} = \vec{\boldsymbol{m}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = \lambda v a^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{B}} = \dfrac{1}{2}\,\mu_0\lambda\sigma v^2 a^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$

在 S' 系：面电荷静止，无磁场，只有电场 $\vec{\boldsymbol{E}}' = \dfrac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$ 正方形 ABCD 运动速度为 $-v\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$

正方形 AB 边，电荷密度为：$\lambda_1 = \lambda_0 = \lambda/\gamma$，

正方形 CD 边，电荷密度为：$\lambda_2 = \gamma'\lambda_0$，$\quad \gamma' = 1/\sqrt{1-v'^2}$，$\quad v' = 2v/(1+v^2/c^2)$

例 4：一边长为 a 的正方形，每边的线电荷密度为 λ，线电荷以速度 v 沿正方形边循环。现将此正方形放置于一无限大、静止面电荷密度为 σ_0 的平面上方，距平面 b，现让平面以速度 v 沿 $+x$ 方向运动，试在磁偶极惯性系 S 和平面惯性系 S' 求作用于偶极上的力矩。



在 S 系：运动的面电荷构成面点流：$\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \sigma v\, \hat{\boldsymbol{e}}_x = \gamma\sigma_0 v\, \hat{\boldsymbol{e}}_x$

从而磁偶极处的磁感应强度为：$\vec{\boldsymbol{B}} = -\dfrac{\mu_0}{2}\alpha\, \hat{\boldsymbol{e}}_y = -\dfrac{1}{2}\,\mu_0\gamma\sigma_0 v\, \hat{\boldsymbol{e}}_y$

力矩：$\vec{\boldsymbol{N}} = \vec{\boldsymbol{m}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = \lambda v a^2\, \hat{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{B}} = \dfrac{1}{2}\,\mu_0\lambda\sigma v^2 a^2\, \hat{\boldsymbol{e}}_x$

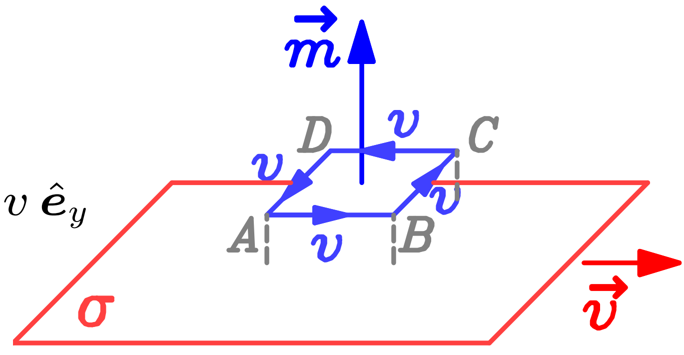
在 S' 系：面电荷静止，无磁场，只有电场 $\vec{\boldsymbol{E}}' = \dfrac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$ 正方形 ABCD 运动速度为 $-v\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$

正方形 AB 边，电荷密度为：$\lambda_1 = \lambda_0 = \lambda/\gamma$,

正方形 CD 边，电荷密度为：$\lambda_2 = \gamma'\lambda_0$, $\quad \gamma' = 1/\sqrt{1 - v'^2}$, $\quad v' = 2v/(1 + v^2/c^2)$

正方形 BC 和 AD 两边，电荷密度相同。

例 4：一边长为 a 的正方形，每边的线电荷密度为 λ，线电荷以速度 v 沿正方形边循环。现将此正方形放置于一无限大、静止面电荷密度为 σ_0 的平面上方，距平面 b，现让平面以速度 v 沿 $+x$ 方向运动，试在磁偶极惯性系 S 和平面惯性系 S' 求作用于偶极上的力矩。



在 S 系：运动的面电荷构成面点流：$\vec{\alpha} = \sigma v\,\hat{e}_x = \gamma\sigma_0 v\,\hat{e}_x$

从而磁偶极处的磁感应强度为：$\vec{B} = -\dfrac{\mu_0}{2}\alpha\,\hat{e}_y = -\dfrac{1}{2}\,\mu_0\gamma\sigma_0 v\,\hat{e}_y$

力矩：$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B} = \lambda v a^2\,\hat{e}_z \times \vec{B} = \dfrac{1}{2}\mu_0\lambda\sigma v^2 a^2\,\hat{e}_x$

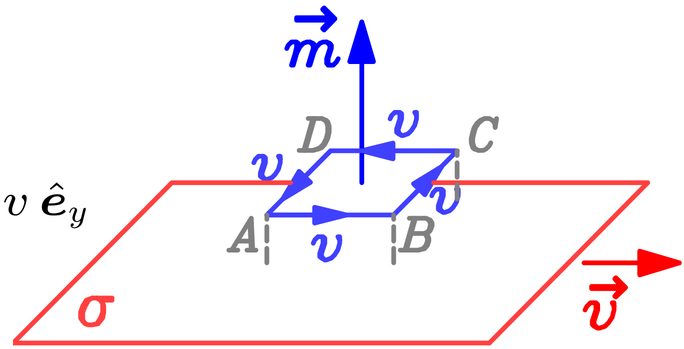
在 S' 系：面电荷静止，无磁场，只有电场 $\vec{E}' = \dfrac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\,\hat{e}_z$ 正方形 ABCD 运动速度为 $-v\,\hat{e}_x$

正方形 AB 边，电荷密度为：$\lambda_1 = \lambda_0 = \lambda/\gamma$,

正方形 CD 边，电荷密度为：$\lambda_2 = \gamma'\lambda_0$, $\quad \gamma' = 1/\sqrt{1 - v'^2}$, $\quad v' = 2v/(1 + v^2/c^2)$

正方形 BC 和 AD 两边，电荷密度相同。可求得 $\gamma' = \gamma^2(1 + v^2/c^2)$, $\quad \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

例 4：一边长为 a 的正方形，每边的线电荷密度为 λ，线电荷以速度 v 沿正方形边循环。现将此正方形放置于一无限大、静止面电荷密度为 σ_0 的平面上方，距平面 b，现让平面以速度 v 沿 $+x$ 方向运动，试在磁偶极惯性系 S 和平面惯性系 S' 求作用于偶极上的力矩。



在 S 系：运动的面电荷构成面点流：$\vec{\alpha} = \sigma v\, \hat{e}_x = \gamma\sigma_0 v\, \hat{e}_x$

从而磁偶极处的磁感应强度为：$\vec{B} = -\dfrac{\mu_0}{2}\alpha\, \hat{e}_y = -\dfrac{1}{2}\,\mu_0\gamma\sigma_0 v\, \hat{e}_y$

力矩：$\vec{N} = \vec{m}\times\vec{B} = \lambda v a^2\, \hat{e}_z \times \vec{B} = \dfrac{1}{2}\mu_0\lambda\sigma v^2 a^2\, \hat{e}_x$

在 S' 系：面电荷静止，无磁场，只有电场 $\vec{E}' = \dfrac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\,\hat{e}_z$ 正方形 ABCD 运动速度为 $-v\,\hat{e}_x$

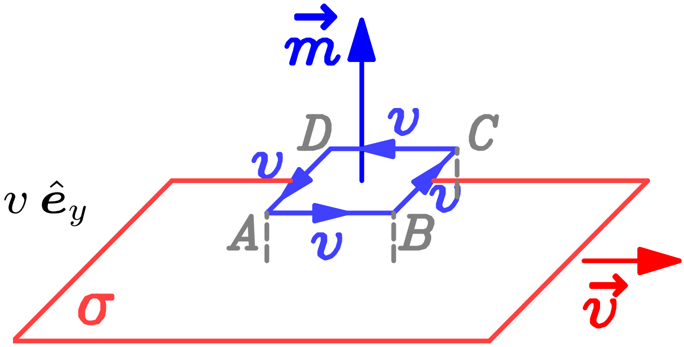
正方形 AB 边，电荷密度为：$\lambda_1 = \lambda_0 = \lambda/\gamma$,

正方形 CD 边，电荷密度为：$\lambda_2 = \gamma'\lambda_0$, $\quad \gamma' = 1/\sqrt{1-v'^2}$, $\quad v' = 2v/(1+v^2/c^2)$

正方形 BC 和 AD 两边，电荷密度相同。可求得 $\gamma' = \gamma^2(1+v^2/c^2)$, $\quad \gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$

AB 边电量：$q_{AB} = \lambda_1 \dfrac{a}{\gamma} = \dfrac{a\lambda}{\gamma^2}$,

例 4：一边长为 a 的正方形，每边的线电荷密度为 λ，线电荷以速度 v 沿正方形边循环。现将此正方形放置于一无限大、静止面电荷密度为 σ_0 的平面上方，距平面 b，现让平面以速度 v 沿 $+x$ 方向运动，试在磁偶极惯性系 S 和平面惯性系 S' 求作用于偶极上的力矩。



在 S 系：运动的面电荷构成面点流：$\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \sigma v\,\hat{\boldsymbol{e}}_x = \gamma\sigma_0 v\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$

从而磁偶极处的磁感应强度为：$\vec{\boldsymbol{B}} = -\dfrac{\mu_0}{2}\alpha\,\hat{\boldsymbol{e}}_y = -\dfrac{1}{2}\,\mu_0\gamma\sigma_0 v\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$

力矩：$\vec{\boldsymbol{N}} = \vec{\boldsymbol{m}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = \lambda v a^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{B}} = \dfrac{1}{2}\,\mu_0\lambda\sigma v^2 a^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$

在 S' 系：面电荷静止，无磁场，只有电场 $\vec{\boldsymbol{E}}' = \dfrac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$ 正方形 ABCD 运动速度为 $-v\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$

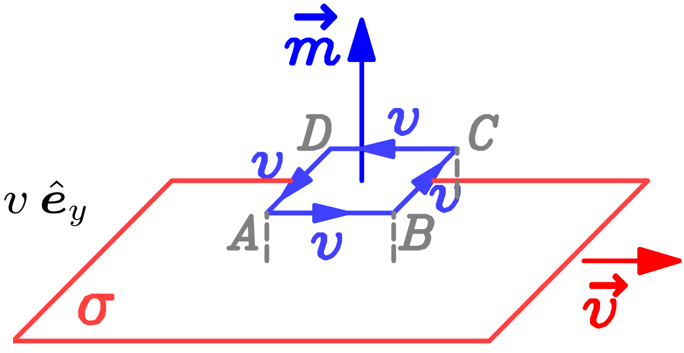
正方形 AB 边，电荷密度为：$\lambda_1 = \lambda_0 = \lambda/\gamma$,

正方形 CD 边，电荷密度为：$\lambda_2 = \gamma'\lambda_0$, $\quad \gamma' = 1/\sqrt{1 - v'^2}$, $\quad v' = 2v/(1 + v^2/c^2)$

正方形 BC 和 AD 两边，电荷密度相同。可求得 $\gamma' = \gamma^2(1 + v^2/c^2)$, $\quad \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

AB 边电量：$q_{AB} = \lambda_1\dfrac{a}{\gamma} = \dfrac{a\lambda}{\gamma^2}$, $\qquad$ CD 边电量：$q_{CD} = \lambda_2\dfrac{a}{\gamma} = (1 + v^2/c^2)\lambda a$

例 4：一边长为 a 的正方形，每边的线电荷密度为 λ，线电荷以速度 v 沿正方形边循环。现将此正方形放置于一无限大、静止面电荷密度为 σ_0 的平面上方，距平面 b，现让平面以速度 v 沿 $+x$ 方向运动，试在磁偶极惯性系 S 和平面惯性系 S' 求作用于偶极上的力矩。



在 S 系：运动的面电荷构成面点流：$\vec{\alpha} = \sigma v\,\hat{e}_x = \gamma\sigma_0 v\,\hat{e}_x$

从而磁偶极处的磁感应强度为：$\vec{B} = -\dfrac{\mu_0}{2}\alpha\,\hat{e}_y = -\dfrac{1}{2}\,\mu_0\gamma\sigma_0 v\,\hat{e}_y$

力矩：$\vec{N} = \vec{m}\times\vec{B} = \lambda v a^2\,\hat{e}_z\times\vec{B} = \dfrac{1}{2}\,\mu_0\lambda\sigma v^2 a^2\,\hat{e}_x$

在 S' 系：面电荷静止，无磁场，只有电场 $\vec{E}' = \dfrac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\,\hat{e}_z$ 正方形 ABCD 运动速度为 $-v\,\hat{e}_x$

正方形 AB 边，电荷密度为：$\lambda_1 = \lambda_0 = \lambda/\gamma$,

正方形 CD 边，电荷密度为：$\lambda_2 = \gamma'\lambda_0,\quad \gamma' = 1/\sqrt{1-v'^2},\quad v' = 2v/(1+v^2/c^2)$

正方形 BC 和 AD 两边，电荷密度相同。可求得 $\gamma' = \gamma^2(1+v^2/c^2),\quad \gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$

AB 边电量：$q_{AB} = \lambda_1\dfrac{a}{\gamma} = \dfrac{a\lambda}{\gamma^2}$, CD 边电量：$q_{CD} = \lambda_2\dfrac{a}{\gamma} = (1+v^2/c^2)\lambda a$

偶极矩：$\vec{p} = (q_{AB}\dfrac{a}{2} - q_{CD}\dfrac{a}{2})\,\hat{e}_y = \dfrac{\lambda a^2 v^2}{c^2}\,\hat{e}_y$, 力矩：$\vec{N}' = \vec{p}\times\vec{E}' = \dfrac{1}{\gamma}\,\dfrac{1}{2}\,\mu_0\lambda\sigma a^2 v^2\,\hat{e}_x$