§ 3.7 电荷体系和外场的相互作用　静电作用力

§3.7 电荷体系和外场的相互作用　静电作用力

一、电荷体系和外场的相互作用能及其多极展开

§ 3.7 电荷体系和外场的相互作用　静电作用力

一、电荷体系和外场的相互作用能及其多极展开

设：$\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$, $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为小区域电荷分布及其激发的电势

§3.7 电荷体系和外场的相互作用　静电作用力

一、电荷体系和外场的相互作用能及其多极展开

设：$\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$, $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为小区域电荷分布及其激发的电势

$\rho_e(\vec{\boldsymbol{r}})$, $\varphi_e(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为激发外场的电荷分布和外场的电势

§3.7 电荷体系和外场的相互作用　静电作用力

一、电荷体系和外场的相互作用能及其多极展开

设：$\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$, $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为小区域电荷分布及其激发的电势

$\rho_e(\vec{\boldsymbol{r}})$, $\varphi_e(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为激发外场的电荷分布和外场的电势

整个体系的静电能：

§ 3.7 电荷体系和外场的相互作用　静电作用力

一、电荷体系和外场的相互作用能及其多极展开

设：$\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$, $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为小区域电荷分布及其激发的电势

$\rho_e(\vec{\boldsymbol{r}})$, $\varphi_e(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为激发外场的电荷分布和外场的电势

整个体系的静电能：

$$W = \frac{1}{2}\int \underbrace{(\varphi+\varphi_e)}_{\text{总电势}}\ \underbrace{(\rho+\rho_e)}_{\text{总电荷分布}}\ \mathrm{d}\tau$$

§ 3.7 电荷体系和外场的相互作用　静电作用力

一、电荷体系和外场的相互作用能及其多极展开

设：$\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$, $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为小区域电荷分布及其激发的电势

$\rho_e(\vec{\boldsymbol{r}})$, $\varphi_e(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为激发外场的电荷分布和外场的电势

整个体系的静电能：

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}\int \underbrace{(\varphi+\varphi_e)}_{\text{总电势}}\ \underbrace{(\rho+\rho_e)}_{\text{总电荷分布}}\ \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2}\int(\rho_e\varphi+\rho\varphi_e)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\int\rho_e\varphi_e\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\int\rho\varphi\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

§3.7 电荷体系和外场的相互作用 静电作用力

一、电荷体系和外场的相互作用能及其多极展开

设：$\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$, $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为小区域电荷分布及其激发的电势

$\rho_e(\vec{\boldsymbol{r}})$, $\varphi_e(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为激发外场的电荷分布和外场的电势

整个体系的静电能：

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}\int \underbrace{(\varphi+\varphi_e)}_{\text{总电势}} \underbrace{(\rho+\rho_e)}_{\text{总电荷分布}} \,\mathrm{d}\tau \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\int (\rho_e\varphi+\rho\varphi_e)\,\mathrm{d}\tau}_{\text{小区域电荷分布与外场的相互作用能}} + \frac{1}{2}\int \rho_e\varphi_e\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\int \rho\varphi\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

§3.7 电荷体系和外场的相互作用 静电作用力

一、电荷体系和外场的相互作用能及其多极展开

设：$\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$, $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为小区域电荷分布及其激发的电势

$\rho_e(\vec{\boldsymbol{r}})$, $\varphi_e(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为激发外场的电荷分布和外场的电势

整个体系的静电能：

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}\int \underbrace{(\varphi+\varphi_e)}_{\text{总电势}}\ \underbrace{(\rho+\rho_e)}_{\text{总电荷分布}}\ \mathrm{d}\tau \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\int(\rho_e\varphi+\rho\varphi_e)\,\mathrm{d}\tau}_{\text{小区域电荷分布与外场的相互作用能}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \rho_e\varphi_e\,\mathrm{d}\tau}_{\text{外电荷分布的自能}} + \frac{1}{2}\int \rho\varphi\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

§ 3.7 电荷体系和外场的相互作用　静电作用力

一、电荷体系和外场的相互作用能及其多极展开

设：$\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$, $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为小区域电荷分布及其激发的电势

$\rho_e(\vec{\boldsymbol{r}})$, $\varphi_e(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为激发外场的电荷分布和外场的电势

整个体系的静电能：

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}\int \underbrace{(\varphi+\varphi_e)}_{\text{总电势}}\ \underbrace{(\rho+\rho_e)}_{\text{总电荷分布}}\ \mathrm{d}\tau \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\int(\rho_e\varphi+\rho\varphi_e)\,\mathrm{d}\tau}_{\text{小区域电荷分布与外场的相互作用能}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int\rho_e\varphi_e\,\mathrm{d}\tau}_{\text{外电荷分布的自能}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int\rho\varphi\,\mathrm{d}\tau}_{\text{小区域电荷分布的自能}}
\end{aligned}
$$

§ 3.7 电荷体系和外场的相互作用　静电作用力

一、电荷体系和外场的相互作用能及其多极展开

设：$\rho(\vec{r})$, $\varphi(\vec{r})$ 为小区域电荷分布及其激发的电势

$\rho_e(\vec{r})$, $\varphi_e(\vec{r})$ 为激发外场的电荷分布和外场的电势

整个体系的静电能：

$$W = \frac{1}{2}\int \underbrace{(\varphi+\varphi_e)}_{\text{总电势}} \underbrace{(\rho+\rho_e)}_{\text{总电荷分布}} \,\mathrm{d}\tau$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int (\rho_e\varphi+\rho\varphi_e)\,\mathrm{d}\tau}_{\text{小区域电荷分布与外场的相互作用能}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \rho_e\varphi_e\,\mathrm{d}\tau}_{\text{外电荷分布的自能}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \rho\varphi\,\mathrm{d}\tau}_{\text{小区域电荷分布的自能}}$$

电荷体系和外场相互作用能：$W_{\text{int}} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int (\rho_e\varphi+\rho\varphi_e)\,\mathrm{d}\tau$

§ 3.7 电荷体系和外场的相互作用　静电作用力

一、电荷体系和外场的相互作用能及其多极展开

设：$\rho(\vec{r})$, $\varphi(\vec{r})$ 为小区域电荷分布及其激发的电势

$\rho_e(\vec{r})$, $\varphi_e(\vec{r})$ 为激发外场的电荷分布和外场的电势

整个体系的静电能：

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}\int \underbrace{(\varphi+\varphi_e)}_{\text{总电势}}\ \underbrace{(\rho+\rho_e)}_{\text{总电荷分布}}\ \mathrm{d}\tau \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\int (\rho_e\varphi+\rho\varphi_e)\,\mathrm{d}\tau}_{\text{小区域电荷分布与外场的相互作用能}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \rho_e\varphi_e\,\mathrm{d}\tau}_{\text{外电荷分布的自能}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \rho\varphi\,\mathrm{d}\tau}_{\text{小区域电荷分布的自能}}
\end{aligned}
$$

电荷体系和外场相互作用能：$W_{\text{int}} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int (\rho_e\varphi+\rho\varphi_e)\,\mathrm{d}\tau$

由格林互易定理 (§3.3 p10)：$\displaystyle\int \rho\varphi_e\,\mathrm{d}\tau = \int \rho_e\varphi\,\mathrm{d}\tau$

§ 3.7 电荷体系和外场的相互作用　静电作用力

一、电荷体系和外场的相互作用能及其多极展开

设：$\rho(\vec{r})$, $\varphi(\vec{r})$ 为小区域电荷分布及其激发的电势

$\rho_e(\vec{r})$, $\varphi_e(\vec{r})$ 为激发外场的电荷分布和外场的电势

整个体系的静电能：

$$W = \frac{1}{2}\int \underbrace{(\varphi+\varphi_e)}_{\text{总电势}}\ \underbrace{(\rho+\rho_e)}_{\text{总电荷分布}}\ \mathrm{d}\tau$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int(\rho_e\varphi+\rho\varphi_e)\,\mathrm{d}\tau}_{\text{小区域电荷分布与外场的相互作用能}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int\rho_e\varphi_e\,\mathrm{d}\tau}_{\text{外电荷分布的自能}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int\rho\varphi\,\mathrm{d}\tau}_{\text{小区域电荷分布的自能}}$$

电荷体系和外场相互作用能：$W_{\text{int}} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int(\rho_e\varphi+\rho\varphi_e)\,\mathrm{d}\tau$

由格林互易定理 (§3.3 p10)：$\displaystyle\int\rho\varphi_e\,\mathrm{d}\tau = \int\rho_e\varphi\,\mathrm{d}\tau \quad\Longrightarrow\quad \boxed{W_{\text{int}} = \int\rho\varphi_e\,\mathrm{d}\tau}$

对小区域电荷，电荷分布在 $\vec{\boldsymbol{r}} \sim 0$ 区，故 $\varphi_e(\vec{\boldsymbol{r}})$ 在 $\vec{\boldsymbol{r}} = 0$ 作泰勒展开

对小区域电荷，电荷分布在 $\vec{\boldsymbol{r}} \sim 0$ 区，故 $\varphi_e(\vec{\boldsymbol{r}})$ 在 $\vec{\boldsymbol{r}} = 0$ 作泰勒展开

$$\varphi_e(\vec{\boldsymbol{r}}) = \varphi_e(\vec{\boldsymbol{r}})\Big|_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \sum_i x_i \frac{\partial \varphi_e}{\partial x_i}\Big|_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial x_i x_j}\Big|_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \ldots$$

写成矢量形式

对小区域电荷，电荷分布在 $\vec{r}\sim 0$ 区，故 $\varphi_e(\vec{r})$ 在 $\vec{r}=0$ 作泰勒展开

$$\begin{aligned}\varphi_e(\vec{r}) &= \varphi_e(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=0} + \sum_i x_i \frac{\partial \varphi_e}{\partial x_i}\Big|_{\vec{r}=0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial x_i x_j}\Big|_{\vec{r}=0} + \ldots \\ &= \varphi_e(0) + \vec{r}\cdot\nabla\varphi_e(0) + \frac{1}{2}(\vec{r}\vec{r}) : \nabla\nabla\varphi_e(0) + \ldots\end{aligned}$$

写成矢量形式

对小区域电荷，电荷分布在 $\vec{\boldsymbol{r}} \sim 0$ 区，故 $\varphi_e(\vec{\boldsymbol{r}})$ 在 $\vec{\boldsymbol{r}} = 0$ 作泰勒展开

$$\varphi_e(\vec{\boldsymbol{r}}) = \varphi_e(\vec{\boldsymbol{r}})\Big|_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \sum_i x_i \frac{\partial \varphi_e}{\partial x_i}\Big|_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial x_i x_j}\Big|_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \ldots$$

写成矢量形式

$$= \varphi_e(0) + \vec{\boldsymbol{r}} \cdot \nabla \varphi_e(0) + \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{r}}\vec{\boldsymbol{r}}) : \nabla\nabla\varphi_e(0) + \ldots$$

$$W_{\text{int}} = \int \rho \varphi_e \,\mathrm{d}\tau = \int \rho \varphi_e(0)\,\mathrm{d}\tau + \int \rho\, \vec{\boldsymbol{r}} \cdot \nabla\varphi_e(0)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\int \rho\, \vec{\boldsymbol{r}}\vec{\boldsymbol{r}} : \nabla\nabla\varphi_e(0)\,\mathrm{d}\tau + \ldots$$

对小区域电荷，电荷分布在 $\vec{r} \sim 0$ 区，故 $\varphi_e(\vec{r})$ 在 $\vec{r}=0$ 作泰勒展开

$$\varphi_e(\vec{r}) = \varphi_e(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=0} + \sum_i x_i \frac{\partial \varphi_e}{\partial x_i}\Big|_{\vec{r}=0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial x_i x_j}\Big|_{\vec{r}=0} + \dots$$

写成矢量形式

$$= \varphi_e(0) + \vec{r}\cdot\nabla\varphi_e(0) + \frac{1}{2}(\vec{r}\vec{r}) : \nabla\nabla\varphi_e(0) + \dots$$

$$W_{\text{int}} = \int \rho\varphi_e \, \mathrm{d}\tau = \int \rho\varphi_e(0)\,\mathrm{d}\tau + \int \rho\,\vec{r}\cdot\nabla\varphi_e(0)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\int \rho\,\vec{r}\vec{r} : \nabla\nabla\varphi_e(0)\,\mathrm{d}\tau + \dots$$

$\overleftrightarrow{I} : \nabla\nabla\varphi_e(0) = \nabla^2\varphi_e(0) = -\frac{1}{\epsilon}\rho_e(0) = 0$ （$\vec{r}=0$ 处无外电荷分布，故 $\rho_e(0)=0$）

对小区域电荷，电荷分布在 $\vec{r} \sim 0$ 区，故 $\varphi_e(\vec{r})$ 在 $\vec{r} = 0$ 作泰勒展开

$$\varphi_e(\vec{r}) = \varphi_e(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=0} + \sum_i x_i \frac{\partial \varphi_e}{\partial x_i}\Big|_{\vec{r}=0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial x_i x_j}\Big|_{\vec{r}=0} + \ldots \quad \text{写成矢量形式}$$

$$= \varphi_e(0) + \vec{r} \cdot \nabla \varphi_e(0) + \frac{1}{2}(\vec{r}\vec{r}) : \nabla\nabla\varphi_e(0) + \ldots$$

$$W_{\text{int}} = \int \rho \varphi_e \, \mathrm{d}\tau = \int \rho \varphi_e(0) \, \mathrm{d}\tau + \int \rho \, \vec{r} \cdot \nabla \varphi_e(0) \, \mathrm{d}\tau + \frac{1}{2} \int \rho \, \vec{r}\vec{r} : \nabla\nabla\varphi_e(0) \, \mathrm{d}\tau + \ldots$$

$$\overleftrightarrow{I} : \nabla\nabla\varphi_e(0) = \nabla^2\varphi_e(0) = -\frac{1}{\epsilon}\rho_e(0) = 0 \quad (\vec{r} = 0 \text{ 处无外电荷分布，故 } \rho_e(0) = 0)$$

$$W_{\text{int}} = \left[\int \rho \, \mathrm{d}\tau\right] \varphi_e(0) + \left[\int \rho \, \vec{r} \, \mathrm{d}\tau\right] \cdot \nabla\varphi_e(0) + \frac{1}{6}\int \rho \left(3\vec{r}\vec{r} - \vec{r}^{\,2}\overleftrightarrow{I}\right) : \nabla\nabla\varphi_e(0) \, \mathrm{d}\tau + \ldots$$

对小区域电荷，电荷分布在 $\vec{r} \sim 0$ 区，故 $\varphi_e(\vec{r})$ 在 $\vec{r} = 0$ 作泰勒展开

$$\varphi_e(\vec{r}) = \varphi_e(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=0} + \sum_i x_i \frac{\partial \varphi_e}{\partial x_i}\Big|_{\vec{r}=0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial x_i x_j}\Big|_{\vec{r}=0} + \dots$$

写成矢量形式

$$= \varphi_e(0) + \vec{r}\cdot\nabla\varphi_e(0) + \frac{1}{2}(\vec{r}\vec{r}) : \nabla\nabla\varphi_e(0) + \dots$$

$$W_{\text{int}} = \int \rho\varphi_e \, \mathrm{d}\tau = \int \rho\varphi_e(0)\, \mathrm{d}\tau + \int \rho\, \vec{r}\cdot\nabla\varphi_e(0)\, \mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\int \rho\, \vec{r}\vec{r} : \nabla\nabla\varphi_e(0)\, \mathrm{d}\tau + \dots$$

$$\overleftrightarrow{I} : \nabla\nabla\varphi_e(0) = \nabla^2\varphi_e(0) = -\frac{1}{\epsilon}\rho_e(0) = 0$$

（$\vec{r} = 0$ 处无外电荷分布，故 $\rho_e(0) = 0$）

$$W_{\text{int}} = \left[\int \rho\, \mathrm{d}\tau\right]\varphi_e(0) + \left[\int \rho\, \vec{r}\, \mathrm{d}\tau\right]\cdot\nabla\varphi_e(0) + \frac{1}{6}\int \rho\,(3\vec{r}\vec{r} - \vec{r}^{\,2}\overleftrightarrow{I}) : \nabla\nabla\varphi_e(0)\, \mathrm{d}\tau + \dots$$

$$\boxed{W_{\text{int}} = \underbrace{Q\varphi_e(0)}_{\text{单极矩与外场的相互作用能}} + \underbrace{\left[-\vec{p}\cdot\vec{E}_e(0)\right]}_{\text{偶极矩与外场的相互作用能}} + \underbrace{\left[-\frac{1}{6}\overleftrightarrow{D} : \nabla\vec{E}_e(0)\right]}_{\text{偶极矩与外场的相互作用能}} + \dots}$$

对小区域电荷，电荷分布在 $\vec{r} \sim 0$ 区，故 $\varphi_e(\vec{r})$ 在 $\vec{r}=0$ 作泰勒展开

$$\varphi_e(\vec{r}) = \varphi_e(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=0} + \sum_i x_i \frac{\partial \varphi_e}{\partial x_i}\Big|_{\vec{r}=0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial x_i x_j}\Big|_{\vec{r}=0} + \dots$$

写成矢量形式

$$= \varphi_e(0) + \vec{r}\cdot\nabla\varphi_e(0) + \frac{1}{2}(\vec{r}\vec{r}) : \nabla\nabla\varphi_e(0) + \dots$$

$$W_{\text{int}} = \int \rho\varphi_e \, d\tau = \int \rho\varphi_e(0)\, d\tau + \int \rho\, \vec{r}\cdot\nabla\varphi_e(0)\, d\tau + \frac{1}{2}\int \rho\, \vec{r}\vec{r} : \nabla\nabla\varphi_e(0)\, d\tau + \dots$$

$$\overleftrightarrow{I} : \nabla\nabla\varphi_e(0) = \nabla^2\varphi_e(0) = -\frac{1}{\epsilon}\rho_e(0) = 0$$

（$\vec{r}=0$ 处无外电荷分布，故 $\rho_e(0)=0$）

$$W_{\text{int}} = \left[\int \rho\, d\tau\right]\varphi_e(0) + \left[\int \rho\, \vec{r}\, d\tau\right]\cdot\nabla\varphi_e(0) + \frac{1}{6}\int \rho\,(3\vec{r}\vec{r} - \vec{r}^{\,2}\overleftrightarrow{I}) : \nabla\nabla\varphi_e(0)\, d\tau + \dots$$

$$\boxed{W_{\text{int}} = \underbrace{Q\varphi_e(0)}_{\text{单极矩与外场的相互作用能}} + \underbrace{\left[-\vec{p}\cdot\vec{E}_e(0)\right]}_{\text{偶极矩与外场的相互作用能}} + \underbrace{\left[-\frac{1}{6}\overleftrightarrow{D} : \nabla\vec{E}_e(0)\right]}_{\text{偶极矩与外场的相互作用能}} + \dots}$$

$$Q = \int \rho\, d\tau, \quad \vec{p} = \int \rho\, \vec{r}\, d\tau, \quad \overleftrightarrow{D} = \int \rho\,(3\vec{r}\vec{r} - \vec{r}^{\,2}\overleftrightarrow{I})\, d\tau, \quad \nabla\varphi_e(0) = -\vec{E}_e(0)$$

对小区域电荷，电荷分布在 $\vec{r}\sim 0$ 区，故 $\varphi_e(\vec{r})$ 在 $\vec{r}=0$ 作泰勒展开

$$\varphi_e(\vec{r}) = \varphi_e(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=0} + \sum_i x_i \frac{\partial \varphi_e}{\partial x_i}\Big|_{\vec{r}=0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial x_i x_j}\Big|_{\vec{r}=0} + \dots$$

写成矢量形式

$$= \varphi_e(0) + \vec{r}\cdot\nabla\varphi_e(0) + \frac{1}{2}(\vec{r}\vec{r}) : \nabla\nabla\varphi_e(0) + \dots$$

$$W_{\mathrm{int}} = \int \rho\varphi_e \,\mathrm{d}\tau = \int \rho\varphi_e(0)\,\mathrm{d}\tau + \int \rho\,\vec{r}\cdot\nabla\varphi_e(0)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\int \rho\,\vec{r}\vec{r} : \nabla\nabla\varphi_e(0)\,\mathrm{d}\tau + \dots$$

$$\overleftrightarrow{I} : \nabla\nabla\varphi_e(0) = \nabla^2\varphi_e(0) = -\frac{1}{\epsilon}\rho_e(0) = 0$$

（$\vec{r}=0$ 处无外电荷分布，故 $\rho_e(0)=0$）

$$W_{\mathrm{int}} = \left[\int \rho\,\mathrm{d}\tau\right]\varphi_e(0) + \left[\int \rho\,\vec{r}\,\mathrm{d}\tau\right]\cdot\nabla\varphi_e(0) + \frac{1}{6}\int \rho\,(3\vec{r}\vec{r} - \vec{r}^{\,2}\overleftrightarrow{I}) : \nabla\nabla\varphi_e(0)\,\mathrm{d}\tau + \dots$$

$$\boxed{W_{\mathrm{int}} = \underbrace{Q\varphi_e(0)}_{\text{单极矩与外场的相互作用能}} + \underbrace{\left[-\vec{p}\cdot\vec{E}_e(0)\right]}_{\text{偶极矩与外场的相互作用能}} + \underbrace{\left[-\frac{1}{6}\overleftrightarrow{D} : \nabla\vec{E}_e(0)\right]}_{\text{偶极矩与外场的相互作用能}} + \dots}$$

$$Q = \int \rho\,\mathrm{d}\tau, \quad \vec{p} = \int \rho\,\vec{r}\,\mathrm{d}\tau, \quad \overleftrightarrow{D} = \int \rho\,(3\vec{r}\vec{r} - \vec{r}^{\,2}\overleftrightarrow{I})\,\mathrm{d}\tau, \quad \nabla\varphi_e(0) = -\vec{E}_e(0)$$

电荷系与外场的相互作用能为单、偶、四、……极矩与外场的相互作用能之和

例 1：无电荷空间任一点的静电势之值等于以该点为球心的任一球面上的电势之平均值。(p115 习题 4.1)

例 1：无电荷空间任一点的静电势之值等于以该点为球心的任一球面上的电势之平均值。(p115 习题 4.1)

可以先证明球外一点电荷在一半径为 R 的球面上的电势平均值，等于该点电荷在球心的电势

例 1：无电荷空间任一点的静电势之值等于以该点为球心的任一球面上的电势之平均值。(p115 习题 4.1)

可以先证明球外一点电荷在一半径为 R 的球面上的电势平均值，等于该点电荷在球心的电势

为此，可选球心于原点，点电荷 q 在 z 轴距球心 a

例 1：无电荷空间任一点的静电势之值等于以该点为球心的任一球面上的电势之平均值。(p115 习题 4.1)

可以先证明球外一点电荷在一半径为 R 的球面上的电势平均值，等于该点电荷在球心的电势

为此，可选球心于原点，点电荷 q 在 z 轴距球心 a

q 在球面任意一点的电势：$\varphi_{(R,\theta,\phi)} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}$

例 1：无电荷空间任一点的静电势之值等于以该点为球心的任一球面上的电势之平均值。(p115 习题 4.1)

可以先证明球外一点电荷在一半径为 R 的球面上的电势平均值，等于该点电荷在球心的电势

为此，可选球心于原点，点电荷 q 在 z 轴距球心 a

q 在球面任意一点的电势：$\varphi_{(R,\theta,\phi)} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}$

电势球面平均值：$\varphi_{\text{ave}} = \dfrac{1}{4\pi R^2}\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\dfrac{R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}$

例 1：无电荷空间任一点的静电势之值等于以该点为球心的任一球面上的电势之平均值。(p115 习题 4.1)

可以先证明球外一点电荷在一半径为 R 的球面上的电势平均值，等于该点电荷在球心的电势

为此，可选球心于原点，点电荷 q 在 z 轴距球心 a

q 在球面任意一点的电势：$\varphi_{(R,\theta,\phi)} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}$

电势球面平均值：
$$\varphi_{\text{ave}} = \frac{1}{4\pi R^2}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2aR}\left[\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a}$$

例 1：无电荷空间任一点的静电势之值等于以该点为球心的任一球面上的电势之平均值。(p115 习题 4.1)

可以先证明球外一点电荷在一半径为 R 的球面上的电势平均值，等于该点电荷在球心的电势

为此，可选球心于原点，点电荷 q 在 z 轴距球心 a

q 在球面任意一点的电势：$\varphi_{(R,\theta,\phi)} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}$

电势球面平均值：
$$\varphi_{\text{ave}} = \frac{1}{4\pi R^2}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{R^2\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2aR}\left[\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a}$$

即：球外一点电荷在一半径为 R 的球面上的电势平均值等于该点电荷在球心的电势 $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{a}$

例 1：无电荷空间任一点的静电势之值等于以该点为球心的任一球面上的电势之平均值。(p115 习题 4.1)

可以先证明球外一点电荷在一半径为 R 的球面上的电势平均值，等于该点电荷在球心的电势

为此，可选球心于原点，点电荷 q 在 z 轴距球心 a

q 在球面任意一点的电势：$\varphi_{(R,\theta,\phi)} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}$

电势球面平均值：
$$\varphi_{\text{ave}} = \frac{1}{4\pi R^2}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2aR}\left[\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a}$$

即：球外一点电荷在一半径为 R 的球面上的电势平均值等于该点电荷在球心的电势 $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{a}$

由叠加原理易推广至球外任意电荷分布情况

讨论：

例 1：无电荷空间任一点的静电势之值等于以该点为球心的任一球面上的电势之平均值。(p115 习题 4.1)

可以先证明球外一点电荷在一半径为 R 的球面上的电势平均值，等于该点电荷在球心的电势

为此，可选球心于原点，点电荷 q 在 z 轴距球心 a

q 在球面任意一点的电势：$\varphi_{(R,\theta,\phi)} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}$

电势球面平均值：
$$\varphi_{\text{ave}} = \frac{1}{4\pi R^2}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{R^2\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2aR}\left[\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a}$$

即：球外一点电荷在一半径为 R 的球面上的电势平均值等于该点电荷在球心的电势 $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{a}$

由叠加原理易推广至球外任意电荷分布情况

讨论：

(1) 无电荷空间任一点的静电势不可能取极值，静电势只在边界上取极值

例 1：无电荷空间任一点的静电势之值等于以该点为球心的任一球面上的电势之平均值。(p115 习题 4.1)

可以先证明球外一点电荷在一半径为 R 的球面上的电势平均值，等于该点电荷在球心的电势

为此，可选球心于原点，点电荷 q 在 z 轴距球心 a

q 在球面任意一点的电势：$\varphi_{(R,\theta,\phi)} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}}$

电势球面平均值：

$$\varphi_{\text{ave}} = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2aR} \left[\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a}$$

即：球外一点电荷在一半径为 R 的球面上的电势平均值等于该点电荷在球心的电势 $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q}{a}$

由叠加原理易推广至球外任意电荷分布情况

讨论：

(1) 无电荷空间任一点的静电势不可能取极值，静电势只在边界上取极值

(2) Earnshaw's Theorem：带电粒子不可能仅由静电力的作用而处于稳定平衡

例 1：无电荷空间任一点的静电势之值等于以该点为球心的任一球面上的电势之平均值。(p115 习题 4.1)

可以先证明球外一点电荷在一半径为 R 的球面上的电势平均值，等于该点电荷在球心的电势

为此，可选球心于原点，点电荷 q 在 z 轴距球心 a

q 在球面任意一点的电势：$\varphi_{(R,\theta,\phi)} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}}$

电势球面平均值：
$$\varphi_{\text{ave}} = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}}$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2aR} \left[\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a}$$

即：球外一点电荷在一半径为 R 的球面上的电势平均值等于该点电荷在球心的电势 $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{a}$

由叠加原理易推广至球外任意电荷分布情况

讨论：

(1) 无电荷空间任一点的静电势不可能取极值，静电势只在边界上取极值

(2) Earnshaw's Theorem：带电粒子不可能仅由静电力的作用而处于稳定平衡

因为带电粒子与外静电场的相互作用能 $W_{\text{int}} = q\varphi_e$ 不可能取极值

关于 Earnshaw's Theorem 的另一种证明　（物理上似乎更为"透明"）

关于 Earnshaw's Theorem 的另一种证明 （物理上似乎更为“透明”）

静电力：$F(\vec{\boldsymbol{r}}) = q\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$，其中 $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为其它电荷产生的静电场：

关于 Earnshaw's Theorem 的另一种证明 （物理上似乎更为“透明”）

静电力：$F(\vec{r}) = q\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{r})$， 其中 $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{r})$ 为其它电荷产生的静电场：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{r}) = \rho_e/\epsilon_0 = 0$

关于 Earnshaw's Theorem 的另一种证明 （物理上似乎更为"透明"）

静电力：$F(\vec{\boldsymbol{r}}) = q\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$， 其中 $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为其它电荷产生的静电场：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \rho_e/\epsilon_0 = 0$

考察静电力通量：$\displaystyle\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma$

关于 Earnshaw's Theorem 的另一种证明　（物理上似乎更为“透明”）

静电力：$F(\vec{\boldsymbol{r}}) = q\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$，　其中 $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为其它电荷产生的静电场：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \rho_e/\epsilon_0 = 0$

考察静电力通量：$\displaystyle\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma = \int_V \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{F}}\, \mathrm{d}\tau = q\int \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\, \mathrm{d}\tau = 0$

关于 Earnshaw's Theorem 的另一种证明 （物理上似乎更为“透明”）

静电力：$F(\vec{\boldsymbol{r}}) = q\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$， 其中 $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为其它电荷产生的静电场：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \rho_e/\epsilon_0 = 0$

考察静电力通量：$\displaystyle\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma = \int_V \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}\,\mathrm{d}\tau = q\int \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = 0$

$\Longrightarrow$ 静电力线的通量恒为 0

关于 Earnshaw's Theorem 的另一种证明 （物理上似乎更为“透明”）

静电力：$F(\vec{\boldsymbol{r}}) = q\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$， 其中 $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为其它电荷产生的静电场：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \rho_e/\epsilon_0 = 0$

考察静电力通量：$\displaystyle\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma = \int_V \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}\,\mathrm{d}\tau = q\int \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = 0$

$\Longrightarrow$ 静电力线的通量恒为 0

力线通量为 0，$\displaystyle\oint \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma = 0$ 的物理含义：

关于 Earnshaw's Theorem 的另一种证明 （物理上似乎更为“透明”）

静电力：$F(\vec{\boldsymbol{r}}) = q\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$， 其中 $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为其它电荷产生的静电场：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \rho_e/\epsilon_0 = 0$

考察静电力通量：$\displaystyle\oint_S \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma = \int_V \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}\,\mathrm{d}\tau = q\int \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = 0$

$\Longrightarrow$ 静电力线的通量恒为 0

力线通量为 0，$\displaystyle\oint \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma = 0$ 的物理含义：

对稳定平衡点，任何方向的微扰，都应有恢复力，反映在力线通量上，

对稳定平衡点，至少应该可找到一个包围平衡点闭合面，在该闭合面上力线通量为负。

关于 Earnshaw's Theorem 的另一种证明 （物理上似乎更为“透明”）

静电力：$F(\vec{r}) = q\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{r})$，其中 $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{r})$ 为其它电荷产生的静电场：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{r}) = \rho_e/\epsilon_0 = 0$

考察静电力通量：$\displaystyle\oint_S \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma = \int_V \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}\,\mathrm{d}\tau = q\int \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau = 0$

$\Longrightarrow$ 静电力线的通量恒为 0

力线通量为 0，$\displaystyle\oint \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma = 0$ 的物理含义：

对稳定平衡点，任何方向的微扰，都应有恢复力，反映在力线通量上，

对稳定平衡点，至少应该可找到一个包围平衡点闭合面，在该闭合面上力线通量为负。

对静电力，力线通量恒为 0，即必有某些方向的力使粒子远离平衡，故不可能有稳定平衡

例 2：半径为 R 的球内一点电荷 q 在球面的电势之平均值 $\varphi_{\text{ave}} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$

例 2：半径为 R 的球内一点电荷 q 在球面的电势之平均值 $\varphi_{\text{ave}} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$

可选球心于原点，点电荷 q 在 z 轴距球心 a，$a < R$

例 2：半径为 R 的球内一点电荷 q 在球面的电势之平均值 $\varphi_{\text{ave}} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$

可选球心于原点，点电荷 q 在 z 轴距球心 a，$a < R$

q 在球面任意一点的电势：$\varphi_{(R,\theta,\phi)} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}}$

例 2：半径为 R 的球内一点电荷 q 在球面的电势之平均值 $\varphi_{\text{ave}} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$

可选球心于原点，点电荷 q 在 z 轴距球心 a，$a < R$

q 在球面任意一点的电势：$\varphi_{(R,\theta,\phi)} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}}$

球面电势平均值：$\varphi_{\text{ave}} = \dfrac{1}{4\pi R^2}\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\dfrac{R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}}$

例 2：半径为 R 的球内一点电荷 q 在球面的电势之平均值 $\varphi_{\text{ave}} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$

可选球心于原点，点电荷 q 在 z 轴距球心 a，$a < R$

q 在球面任意一点的电势：$\varphi_{(R,\theta,\phi)} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}$

球面电势平均值：
$$\varphi_{\text{ave}} = \frac{1}{4\pi R^2}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2aR}\left[\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}\right]_0^{\pi}$$

例 2：半径为 R 的球内一点电荷 q 在球面的电势之平均值 $\varphi_{\text{ave}} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$

可选球心于原点，点电荷 q 在 z 轴距球心 a，$a < R$

q 在球面任意一点的电势：$\varphi_{(R,\theta,\phi)} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}}$

球面电势平均值：
$$\begin{aligned}\varphi_{\text{ave}} &= \frac{1}{4\pi R^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2aR} \Big[\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta} \Big]_0^{\pi} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2aR} \Big[R + a - \big| R - a \big| \Big] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}\end{aligned}$$

注意这时 $a < R$

例 2：半径为 R 的球内一点电荷 q 在球面的电势之平均值 $\varphi_{\text{ave}} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$

可选球心于原点，点电荷 q 在 z 轴距球心 a，$a < R$

q 在球面任意一点的电势：$\varphi_{(R,\theta,\phi)} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}}$

球面电势平均值：
$$\begin{aligned}
\varphi_{\text{ave}} &= \frac{1}{4\pi R^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2aR} \left[\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2aR} \Big[R + a - \big| R - a \big| \Big] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}
\end{aligned}$$

注意这时 $a < R$

即：半径为 R 的球内一点电荷 q 在球面上电势之平均值等于$\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q}{R}$

例 2：半径为 R 的球内一点电荷 q 在球面的电势之平均值 $\varphi_{\text{ave}} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$

可选球心于原点，点电荷 q 在 z 轴距球心 a，$a < R$

q 在球面任意一点的电势：$\varphi_{(R,\theta,\phi)} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}}$

球面电势平均值：
$$\begin{aligned}
\varphi_{\text{ave}} &= \frac{1}{4\pi R^2}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{R^2\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2aR}\Big[\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}\Big]_0^{\pi} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2aR}\Big[R + a - \big|R - a\big|\Big] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R}
\end{aligned}$$

注意这时 $a < R$

即：半径为 R 的球内一点电荷 q 在球面上电势之平均值等于 $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{R}$

由叠加原理易推广至球内任意电荷分布情况

球内任意分布的电荷在球面上的电势平均值等于：$\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q_{\text{enc}}}{R}$

Q_{enc} 为球内总电量

例 2：半径为 R 的球内一点电荷 q 在球面的电势之平均值 $\varphi_{\text{ave}} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$

可选球心于原点，点电荷 q 在 z 轴距球心 a，$a < R$

q 在球面任意一点的电势：$\varphi_{(R,\theta,\phi)} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}$

球面电势平均值：
$$\varphi_{\text{ave}} = \frac{1}{4\pi R^2}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{R^2\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2aR}\left[\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2aR}\Big[R+a-\big|R-a\big|\Big] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R}$$

注意这时 $a < R$

即：半径为 R 的球内一点电荷 q 在球面上电势之平均值等于 $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{R}$

由叠加原理易推广至球内任意电荷分布情况

球内任意分布的电荷在球面上的电势平均值等于：$\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q_{\text{enc}}}{R}$　　Q_{enc} 为球内总电量

若球内外都有电荷，球面电势平均值为：$\varphi_{\text{ave}} = \varphi_c + \dfrac{Q_{\text{enc}}}{4\pi\epsilon_0 R}$　　φ_c 为球外电荷在球心的电势

二、静电作用力

二、静电作用力

静电作用力的几种求法：

(1) 洛伦兹力：$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{d}\tau$

二、静电作用力

静电作用力的几种求法：

(1) 洛伦兹力：$\vec{\boldsymbol{F}} = \displaystyle\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{d}\tau$

(2) 麦克斯韦应力张量：$\vec{\boldsymbol{F}} = \displaystyle\oint \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_{\text{stress}}\,\mathrm{d}\sigma$

二、静电作用力

静电作用力的几种求法：

(1) 洛伦兹力：$\vec{\boldsymbol{F}} = \displaystyle\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{d}\tau$

(2) 麦克斯韦应力张量：$\vec{\boldsymbol{F}} = \displaystyle\oint \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_{\text{stress}}\,\mathrm{d}\sigma$

(3) 虚功原理

二、静电作用力

静电作用力的几种求法：

(1) 洛伦兹力：$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{d}\tau$

(2) 麦克斯韦应力张量：$\vec{\boldsymbol{F}} = \oint \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_{\text{stress}}\,\mathrm{d}\sigma$

(3) 虚功原理

虚功原理

二、静电作用力

静电作用力的几种求法：

(1) 洛伦兹力：$\vec{\boldsymbol{F}} = \displaystyle\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{d}\tau$

(2) 麦克斯韦应力张量：$\vec{\boldsymbol{F}} = \displaystyle\oint \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_{\text{stress}}\,\mathrm{d}\sigma$

(3) 虚功原理

虚功原理

设体系的第 k 个广义坐标发生改变 $\delta\theta_k$，则静电力作功：$\delta A = \displaystyle\sum_k F_k \delta\theta_k$

二、静电作用力

静电作用力的几种求法：

(1) 洛伦兹力：$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{d}\tau$

(2) 麦克斯韦应力张量：$\vec{\boldsymbol{F}} = \oint \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_{\text{stress}}\,\mathrm{d}\sigma$

(3) 虚功原理

虚功原理

设体系的第 k 个广义坐标发生改变 $\delta\theta_k$，则静电力作功：$\delta A = \sum_k F_k \delta\theta_k$

F_k 为广义力

二、静电作用力

静电作用力的几种求法：

(1) 洛伦兹力：$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{d}\tau$

(2) 麦克斯韦应力张量：$\vec{\boldsymbol{F}} = \oint \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_{\text{stress}}\,\mathrm{d}\sigma$

(3) 虚功原理

虚功原理

设体系的第 k 个广义坐标发生改变 $\delta\theta_k$，则静电力作功：$\delta A = \sum_k F_k \delta\theta_k$

静电力作功必引起体系静电能的改变 δW，

F_k 为广义力

二、静电作用力

静电作用力的几种求法：

(1) 洛伦兹力：$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{d}\tau$

(2) 麦克斯韦应力张量：$\vec{\boldsymbol{F}} = \oint \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_{\text{stress}}\,\mathrm{d}\sigma$

(3) 虚功原理

虚功原理

设体系的第 k 个广义坐标发生改变 $\delta\theta_k$，则静电力作功：$\delta A = \sum_k F_k\delta\theta_k$

静电力作功必引起体系静电能的改变 δW，

F_k 为广义力

如果能求得 δW 与 δA 的关系，则可求得静电情况下的广义力(力或力矩)

二、静电作用力

静电作用力的几种求法：

(1) 洛伦兹力：$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{d}\tau$

(2) 麦克斯韦应力张量：$\vec{\boldsymbol{F}} = \oint \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_{\text{stress}}\,\mathrm{d}\sigma$

(3) 虚功原理

虚功原理

设体系的第 k 个广义坐标发生改变 $\delta\theta_k$，则静电力作功：$\delta A = \sum_k F_k\delta\theta_k$

静电力作功必引起体系静电能的改变 δW，

F_k 为广义力

如果能求得 δW 与 δA 的关系，则可求得静电情况下的广义力(力或力矩)

孤立体系

二、静电作用力

静电作用力的几种求法：

(1) 洛伦兹力：$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{d}\tau$

(2) 麦克斯韦应力张量：$\vec{\boldsymbol{F}} = \oint \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_{\text{stress}}\,\mathrm{d}\sigma$

(3) 虚功原理

虚功原理

设体系的第 k 个广义坐标发生改变 $\delta\theta_k$，则静电力作功：$\delta A = \sum_k F_k \delta\theta_k$

静电力作功必引起体系静电能的改变 δW，

F_k 为广义力

如果能求得 δW 与 δA 的关系，则可求得静电情况下的广义力(力或力矩)

孤立体系

孤立体系与外界无能量交换，则静电力作功等于体系静电能量之减少

二、静电作用力

静电作用力的几种求法：

(1) 洛伦兹力：$\vec{F} = \int \rho(\vec{r})\vec{E}\,\mathrm{d}\tau$

(2) 麦克斯韦应力张量：$\vec{F} = \oint \vec{n}\cdot\overleftrightarrow{T}_{\text{stress}}\,\mathrm{d}\sigma$

(3) 虚功原理

虚功原理

设体系的第 k 个广义坐标发生改变 $\delta\theta_k$，则静电力作功：$\delta A = \sum\limits_k F_k\delta\theta_k$

静电力作功必引起体系静电能的改变 δW，

F_k 为广义力

如果能求得 δW 与 δA 的关系，则可求得静电情况下的广义力(力或力矩)

孤立体系

孤立体系与外界无能量交换，则静电力作功等于体系静电能量之减少

$\delta A = -\,\delta W$，从而 $\delta A = \sum\limits_k F_k\delta\theta_k = -\delta W$，求得 $F_k = -\left.\dfrac{\delta W}{\delta\theta_k}\right|_{\text{孤立体系}}$

二、静电作用力

静电作用力的几种求法：

(1) 洛伦兹力：$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{d}\tau$

(2) 麦克斯韦应力张量：$\vec{\boldsymbol{F}} = \oint \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_{\text{stress}}\,\mathrm{d}\sigma$

(3) 虚功原理

虚功原理

设体系的第 k 个广义坐标发生改变 $\delta\theta_k$，则静电力作功：$\delta A = \sum\limits_k F_k\delta\theta_k$

静电力作功必引起体系静电能的改变 δW， F_k 为广义力

如果能求得 δW 与 δA 的关系，则可求得静电情况下的广义力(力或力矩)

孤立体系

孤立体系与外界无能量交换，则静电力作功等于体系静电能量之减少

$\delta A = -\delta W$，从而 $\delta A = \sum\limits_k F_k\delta\theta_k = -\delta W$，求得 $F_k = -\left.\dfrac{\delta W}{\delta\theta_k}\right|_{\text{孤立体系}}$

如静电力作功过程各电荷分布不变，各电荷体系自能不变，$\delta W = \delta W_{\text{int}}$，$F_k = -\delta W_{\text{int}}/\delta\theta_k$，

二、静电作用力

静电作用力的几种求法：

(1) 洛伦兹力：$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{d}\tau$

(2) 麦克斯韦应力张量：$\vec{\boldsymbol{F}} = \oint \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_{\text{stress}}\,\mathrm{d}\sigma$

(3) 虚功原理

虚功原理

设体系的第 k 个广义坐标发生改变 $\delta\theta_k$，则静电力作功：$\delta A = \sum_k F_k \delta\theta_k$

静电力作功必引起体系静电能的改变 δW， F_k 为广义力

如果能求得 δW 与 δA 的关系，则可求得静电情况下的广义力(力或力矩)

孤立体系

孤立体系与外界无能量交换，则静电力作功等于体系静电能量之减少

$$\delta A = -\,\delta W，\ \text{从而}\ \delta A = \sum_k F_k\delta\theta_k = -\delta W，\ \text{求得}\ F_k = -\left.\frac{\delta W}{\delta\theta_k}\right|_{\text{孤立体系}} = -\frac{\delta W_{\text{int}}}{\delta\theta_k}$$

如静电力作功过程各电荷分布不变，各电荷体系自能不变，$\delta W = \delta W_{\text{int}}$，$F_k = -\delta W_{\text{int}}/\delta\theta_k$，

非孤立体系

非孤立体系与交换外界能量，$\delta A \neq -\delta W$

非孤立体系

非孤立体系与交换外界能量，$\delta A \neq -\delta W$

仅对简单情况可解。例如：体系中有导体与电源相连，保持各导体电势不变

非孤立体系

非孤立体系与交换外界能量，$\delta A \neq -\delta W$

仅对简单情况可解。例如：体系中有导体与电源相连，保持各导体电势不变

体系某广义坐标发生改变必导致导体上的电量改变，外源做功 δW_0

非孤立体系

非孤立体系与交换外界能量，$\delta A \neq -\delta W$

仅对简单情况可解。例如：体系中有导体与电源相连，保持各导体电势不变

体系某广义坐标发生改变必导致导体上的电量改变，外源做功 δW_0

$\delta W_0 = \delta W + \delta A$ (对孤立体系 $\delta W_0 = 0$，非孤立体系 $\delta W_0 \neq 0$)

非孤立体系

非孤立体系与交换外界能量，$\delta A \neq -\delta W$

仅对简单情况可解。例如：体系中有导体与电源相连，保持各导体电势不变

体系某广义坐标发生改变必导致导体上的电量改变，外源做功 δW_0

$\delta W_0 = \delta W + \delta A$ (对孤立体系 $\delta W_0 = 0$，非孤立体系 $\delta W_0 \neq 0$)

由于发生虚位移，使得第 j 个导体的电量改变 δQ_j

非孤立体系

非孤立体系与交换外界能量，$\delta A \neq -\delta W$

仅对简单情况可解。例如：体系中有导体与电源相连，保持各导体电势不变

体系某广义坐标发生改变必导致导体上的电量改变，外源做功 δW_0

$\delta W_0 = \delta W + \delta A$ (对孤立体系 $\delta W_0 = 0$，非孤立体系 $\delta W_0 \neq 0$)

由于发生虚位移，使得第 j 个导体的电量改变 δQ_j

外源做功：$\delta W_0 = \sum_j \varphi_j \delta Q_j$ (相当于电源把 δQ_j 从无穷远搬到导体 j)

非孤立体系

非孤立体系与交换外界能量，$\delta A \neq -\delta W$

仅对简单情况可解。例如：体系中有导体与电源相连，保持各导体电势不变

体系某广义坐标发生改变必导致导体上的电量改变，外源做功 δW_0

$\delta W_0 = \delta W + \delta A$ (对孤立体系 $\delta W_0 = 0$，非孤立体系 $\delta W_0 \neq 0$)

由于发生虚位移，使得第 j 个导体的电量改变 δQ_j

外源做功：$\delta W_0 = \sum_j \varphi_j \delta Q_j$ (相当于电源把 δQ_j 从无穷远搬到导体 j)

导体系静电能 $W = \frac{1}{2} \sum_j Q_j \varphi_j$

非孤立体系

非孤立体系与交换外界能量，$\delta A \neq -\delta W$

仅对简单情况可解。例如：体系中有导体与电源相连，保持各导体电势不变

体系某广义坐标发生改变必导致导体上的电量改变，外源做功 δW_0

$\delta W_0 = \delta W + \delta A$ (对孤立体系 $\delta W_0 = 0$，非孤立体系 $\delta W_0 \neq 0$)

由于发生虚位移，使得第 j 个导体的电量改变 δQ_j

外源做功：$\delta W_0 = \sum_j \varphi_j \delta Q_j$ (相当于电源把 δQ_j 从无穷远搬到导体 j)

导体系静电能 $W = \dfrac{1}{2}\sum_j Q_j \varphi_j$ (§3.3 p1)

非孤立体系

非孤立体系与交换外界能量，$\delta A \neq -\delta W$

仅对简单情况可解。例如：体系中有导体与电源相连，保持各导体电势不变

体系某广义坐标发生改变必导致导体上的电量改变，外源做功 δW_0

$\delta W_0 = \delta W + \delta A$ (对孤立体系 $\delta W_0 = 0$，非孤立体系 $\delta W_0 \neq 0$)

由于发生虚位移，使得第 j 个导体的电量改变 δQ_j

外源做功：$\delta W_0 = \sum_j \varphi_j \delta Q_j$ (相当于电源把 δQ_j 从无穷远搬到导体 j)

导体系静电能 $W = \frac{1}{2}\sum_j Q_j \varphi_j$ (§3.3 p1)

若保持各导体电势不变，则：$\delta W = \frac{1}{2}\sum_j \varphi_j \delta Q_j = \frac{1}{2}\delta W_0 \quad \Rightarrow \quad \delta W_0 = 2\,\delta W$

非孤立体系

非孤立体系与交换外界能量，$\delta A \neq -\delta W$

仅对简单情况可解。例如：体系中有导体与电源相连，保持各导体电势不变

体系某广义坐标发生改变必导致导体上的电量改变，外源做功 δW_0

$\delta W_0 = \delta W + \delta A$ (对孤立体系 $\delta W_0 = 0$，非孤立体系 $\delta W_0 \neq 0$)

由于发生虚位移，使得第 j 个导体的电量改变 δQ_j

外源做功：$\delta W_0 = \sum_j \varphi_j \delta Q_j$ (相当于电源把 δQ_j 从无穷远搬到导体 j)

导体系静电能 $W = \frac{1}{2}\sum_j Q_j \varphi_j$ (§3.3 p1)

若保持各导体电势不变，则：$\delta W = \frac{1}{2}\sum_j \varphi_j \delta Q_j = \frac{1}{2}\delta W_0 \quad \Rightarrow \quad \delta W_0 = 2\,\delta W$

$$\delta A = \sum_k F_k \delta\theta_k = \delta W_0 - \delta W = \delta W \quad \Longrightarrow \quad F_k = +\frac{\delta W}{\delta \theta_k}$$

例 3：求电偶极子 $\vec{p}$ 在外电场 $\vec{E}$ 中受到的作用力和力矩

例 3：求电偶极子 $\vec{p}$ 在外电场 $\vec{E}$ 中受到的作用力和力矩

基于虚功原理的计算

例 3：求电偶极子 $\vec{p}$ 在外电场 $\vec{E}$ 中受到的作用力和力矩

基于虚功原理的计算

几个假设：(1) 电偶极子很小，不影响激发外场的电荷分布

例 3：求电偶极子 $\vec{p}$ 在外电场 $\vec{E}$ 中受到的作用力和力矩

基于虚功原理的计算

几个假设：(1) 电偶极子很小，不影响激发外场的电荷分布

(2) 电偶极子是刚性的，在外电场作用下电荷分布不变

例 3：求电偶极子 $\vec{p}$ 在外电场 $\vec{E}$ 中受到的作用力和力矩

基于虚功原理的计算

几个假设：(1) 电偶极子很小，不影响激发外场的电荷分布

(2) 电偶极子是刚性的，在外电场作用下电荷分布不变

外电场与电偶极子构成孤立体系 $\delta W_0 = 0$

例 3：求电偶极子 $\vec{p}$ 在外电场 $\vec{E}$ 中受到的作用力和力矩

基于虚功原理的计算

几个假设：(1) 电偶极子很小，不影响激发外场的电荷分布

(2) 电偶极子是刚性的，在外电场作用下电荷分布不变

外电场与电偶极子构成孤立体系 $\delta W_0 = 0$

由于电偶极子和外场电荷的电荷分布都不变，其自能不变

例 3：求电偶极子 $\vec{p}$ 在外电场 $\vec{E}$ 中受到的作用力和力矩

基于虚功原理的计算

几个假设：(1) 电偶极子很小，不影响激发外场的电荷分布

(2) 电偶极子是刚性的，在外电场作用下电荷分布不变

外电场与电偶极子构成孤立体系 $\delta W_0 = 0$

由于电偶极子和外场电荷的电荷分布都不变，其自能不变

体系静电能的变化即电偶极子和外场相互作用能 W_{int} 的变化：$F_k = -\dfrac{\delta W_{\text{int}}}{\delta \theta_k}$

例 3：求电偶极子 $\vec{p}$ 在外电场 $\vec{E}$ 中受到的作用力和力矩

基于虚功原理的计算

几个假设：(1) 电偶极子很小，不影响激发外场的电荷分布

(2) 电偶极子是刚性的，在外电场作用下电荷分布不变

外电场与电偶极子构成孤立体系 $\delta W_0 = 0$

由于电偶极子和外场电荷的电荷分布都不变，其自能不变

体系静电能的变化即电偶极子和外场相互作用能 W_{int} 的变化：$F_k = -\dfrac{\delta W_{\text{int}}}{\delta \theta_k}$

$W_{\text{int}} = -\vec{p}\cdot\vec{E}$, $\quad F_x = -\dfrac{\delta W_{\text{int}}}{\delta x} = \vec{p}\cdot\dfrac{\delta \vec{E}}{\delta x}$ 　矢量形式：$\vec{F} = \vec{p}\cdot\nabla\vec{E}$

例 3：求电偶极子 $\vec{p}$ 在外电场 $\vec{E}$ 中受到的作用力和力矩

基于虚功原理的计算

几个假设：(1) 电偶极子很小，不影响激发外场的电荷分布

(2) 电偶极子是刚性的，在外电场作用下电荷分布不变

外电场与电偶极子构成孤立体系 $\delta W_0 = 0$

由于电偶极子和外场电荷的电荷分布都不变，其自能不变

体系静电能的变化即电偶极子和外场相互作用能 W_{int} 的变化：$F_k = -\dfrac{\delta W_{\text{int}}}{\delta \theta_k}$

$W_{\text{int}} = -\vec{p}\cdot\vec{E}$,　$F_x = -\dfrac{\delta W_{\text{int}}}{\delta x} = \vec{p}\cdot\dfrac{\delta \vec{E}}{\delta x}$　矢量形式：$\vec{F} = \vec{p}\cdot\nabla\vec{E}$

力矩：

例 3：求电偶极子 $\vec{p}$ 在外电场 $\vec{E}$ 中受到的作用力和力矩

基于虚功原理的计算

几个假设：(1) 电偶极子很小，不影响激发外场的电荷分布

(2) 电偶极子是刚性的，在外电场作用下电荷分布不变

外电场与电偶极子构成孤立体系 $\delta W_0 = 0$

由于电偶极子和外场电荷的电荷分布都不变，其自能不变

体系静电能的变化即电偶极子和外场相互作用能 W_{int} 的变化：$F_k = -\dfrac{\delta W_{\text{int}}}{\delta \theta_k}$

$W_{\text{int}} = -\vec{p}\cdot\vec{E}$, $\quad F_x = -\dfrac{\delta W_{\text{int}}}{\delta x} = \vec{p}\cdot\dfrac{\delta \vec{E}}{\delta x}$ 矢量形式：$\vec{F} = \vec{p}\cdot\nabla\vec{E}$

力矩：

设电场沿 $\hat{e}_z$，$\vec{p}$ 与 $\vec{E}$ 成 θ 角

例 3：求电偶极子 $\vec{p}$ 在外电场 $\vec{E}$ 中受到的作用力和力矩

基于虚功原理的计算

几个假设：(1) 电偶极子很小，不影响激发外场的电荷分布

(2) 电偶极子是刚性的，在外电场作用下电荷分布不变

外电场与电偶极子构成孤立体系 $\delta W_0 = 0$

由于电偶极子和外场电荷的电荷分布都不变，其自能不变

体系静电能的变化即电偶极子和外场相互作用能 W_{int} 的变化：$F_k = -\dfrac{\delta W_{\text{int}}}{\delta \theta_k}$

$W_{\text{int}} = -\vec{p}\cdot\vec{E}$, $\quad F_x = -\dfrac{\delta W_{\text{int}}}{\delta x} = \vec{p}\cdot\dfrac{\delta \vec{E}}{\delta x}$ 矢量形式：$\vec{F} = \vec{p}\cdot\nabla\vec{E}$

力矩：

设电场沿 $\hat{e}_z$，$\vec{p}$ 与 $\vec{E}$ 成 θ 角

力矩：$L = -\dfrac{\delta W_{\text{int}}}{\delta \theta} = \dfrac{\delta(pE\cos\theta)}{\delta\theta} = -pE\sin\theta$ 矢量形式：$\vec{L} = \vec{p}\times\vec{E}$

附：基于洛伦兹力公式的计算

附：基于洛伦兹力公式的计算

位于原点的电偶极子的电荷密度：$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})$

附：基于洛伦兹力公式的计算

位于原点的电偶极子的电荷密度：$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})$

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\ E(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = \int [-\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})]\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau$$

附：基于洛伦兹力公式的计算

位于原点的电偶极子的电荷密度：$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})$

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{F}} &= \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\ E(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = \int [-\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})]\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau \\ &= -\int \{[\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})] \cdot \vec{\boldsymbol{p}}\}\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = -\int [\,\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})\,] \cdot [\,\vec{\boldsymbol{p}}\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

附：基于洛伦兹力公式的计算

位于原点的电偶极子的电荷密度：$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})$

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{F}} &= \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\ E(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = \int [-\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})]\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau \\ &= -\int \{[\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})]\cdot\vec{\boldsymbol{p}}\}\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = -\int [\,\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\cdot[\,\vec{\boldsymbol{p}}\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

利用 $\displaystyle\int \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}\tau = -\Big[\nabla\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{t}}\Big]_{\vec{\boldsymbol{r}}=0}$

附：基于洛伦兹力公式的计算

位于原点的电偶极子的电荷密度：$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})$

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\ E(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = \int [-\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})]\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau$$

$$= -\int \{[\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})] \cdot \vec{\boldsymbol{p}}\}\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = -\int [\,\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})\,] \cdot [\,\vec{\boldsymbol{p}}\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\,\mathrm{d}\tau$$

利用 $\displaystyle\int \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}\tau = -\Big[\nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{t}}\Big]_{\vec{\boldsymbol{r}}=0}$

$$= \Big\{\nabla \cdot [\,\vec{\boldsymbol{p}}\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\Big\}_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} = \Big[\vec{\boldsymbol{p}} \cdot (\nabla\vec{\boldsymbol{E}})\Big]_{\vec{\boldsymbol{r}}=0}$$

附：基于洛伦兹力公式的计算

位于原点的电偶极子的电荷密度：$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})$

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\; E(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = \int [-\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})]\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau$$

$$= -\int \{[\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})] \cdot \vec{\boldsymbol{p}}\}\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = -\int [\,\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})\,] \cdot [\,\vec{\boldsymbol{p}}\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\,\mathrm{d}\tau$$

利用 $\int \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}\tau = -\left[\nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{t}}\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}=0}$

$$= \left\{\nabla \cdot [\,\vec{\boldsymbol{p}}\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\right\}_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} = \left[\vec{\boldsymbol{p}} \cdot (\nabla\vec{\boldsymbol{E}})\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}=0}$$

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \int \vec{\boldsymbol{r}} \times [\rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\,\mathrm{d}\tau = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})[\,\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\,\mathrm{d}\tau$$

附：基于洛伦兹力公式的计算

位于原点的电偶极子的电荷密度：$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})$

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\ E(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = \int [-\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})]\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau$$

$$= -\int \{[\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})]\cdot\vec{\boldsymbol{p}}\}\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = -\int [\,\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\cdot[\,\vec{\boldsymbol{p}}\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\,\mathrm{d}\tau$$

利用 $\displaystyle\int \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}\tau = -\left[\nabla\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{t}}\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}=0}$

$$= \left\{\nabla\cdot[\,\vec{\boldsymbol{p}}\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\right\}_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} = \left[\vec{\boldsymbol{p}}\cdot(\nabla\vec{\boldsymbol{E}})\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}=0}$$

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \int \vec{\boldsymbol{r}}\times[\rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\,\mathrm{d}\tau = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})[\,\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\,\mathrm{d}\tau$$

$$= -\int \vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})[\,\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\,\mathrm{d}\tau = -\int \{\,[\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})]\cdot\vec{\boldsymbol{p}}\,\}[\,\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\,\mathrm{d}\tau$$

附：基于洛伦兹力公式的计算

位于原点的电偶极子的电荷密度：$\rho(\vec{r}) = -\vec{p}\cdot\nabla\delta(\vec{r})$

$$\vec{F} = \int \rho(\vec{r})\ E(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau = \int [-\vec{p}\cdot\nabla\delta(\vec{r})]\vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau$$

$$= -\int \{[\nabla\delta(\vec{r})]\cdot\vec{p}\}\,\vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau = -\int [\,\nabla\delta(\vec{r})\,]\cdot[\,\vec{p}\,\vec{E}(\vec{r})\,]\,\mathrm{d}\tau$$

利用 $\int \nabla\delta(\vec{r})\cdot\overleftrightarrow{t}\,\mathrm{d}\tau = -\left[\nabla\cdot\overleftrightarrow{t}\right]_{\vec{r}=0}$

$$= \left\{\nabla\cdot[\,\vec{p}\,\vec{E}(\vec{r})\,]\right\}_{\vec{r}=0} = \left[\vec{p}\cdot(\nabla\vec{E})\right]_{\vec{r}=0}$$

$$\vec{L} = \int \vec{r}\times[\rho(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})\,]\,\mathrm{d}\tau = \int \rho(\vec{r})[\,\vec{r}\times\vec{E}(\vec{r})\,]\,\mathrm{d}\tau$$

$$= -\int \vec{p}\cdot\nabla\delta(\vec{r})[\,\vec{r}\times\vec{E}(\vec{r})\,]\,\mathrm{d}\tau = -\int \{\,[\nabla\delta(\vec{r})]\cdot\vec{p}\,\}[\,\vec{r}\times\vec{E}(\vec{r})\,]\,\mathrm{d}\tau$$

$$= -\int [\nabla\delta(\vec{r})]\cdot\underbrace{\{\vec{p}\,[\,\vec{r}\times\vec{E}(\vec{r})\,]\}}_{\text{并矢}}\,\mathrm{d}\tau$$

附：基于洛伦兹力公式的计算

位于原点的电偶极子的电荷密度：$\rho(\vec{r}) = -\vec{p}\cdot\nabla\delta(\vec{r})$

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \int \rho(\vec{r})\ E(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau = \int [-\vec{p}\cdot\nabla\delta(\vec{r})]\vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau \\
&= -\int \{[\nabla\delta(\vec{r})]\cdot\vec{p}\}\,\vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau = -\int [\,\nabla\delta(\vec{r})\,]\cdot[\,\vec{p}\,\vec{E}(\vec{r})\,]\,\mathrm{d}\tau \\
&\qquad\qquad \text{利用} \int \nabla\delta(\vec{r})\cdot\overleftrightarrow{t}\,\mathrm{d}\tau = -\left[\nabla\cdot\overleftrightarrow{t}\right]_{\vec{r}=0} \\
&= \left\{\nabla\cdot[\,\vec{p}\,\vec{E}(\vec{r})\,]\right\}_{\vec{r}=0} = \left[\vec{p}\cdot(\nabla\vec{E})\right]_{\vec{r}=0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \int \vec{r}\times[\rho(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})\,]\,\mathrm{d}\tau = \int \rho(\vec{r})[\,\vec{r}\times\vec{E}(\vec{r})\,]\,\mathrm{d}\tau \\
&= -\int \vec{p}\cdot\nabla\delta(\vec{r})[\,\vec{r}\times\vec{E}(\vec{r})\,]\,\mathrm{d}\tau = -\int \{\,[\nabla\delta(\vec{r})]\cdot\vec{p}\,\}[\,\vec{r}\times\vec{E}(\vec{r})\,]\,\mathrm{d}\tau \\
&= -\int [\nabla\delta(\vec{r})]\cdot\underbrace{\{\vec{p}\,[\,\vec{r}\times\vec{E}(\vec{r})\,]\}}_{\text{并矢}}\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{利用} \int \nabla\delta(\vec{r})\cdot\overleftrightarrow{t}\,\mathrm{d}\tau = -\left[\nabla\cdot\overleftrightarrow{t}\right]_{\vec{r}=0}
\end{aligned}$$

附：基于洛伦兹力公式的计算

位于原点的电偶极子的电荷密度：$\rho(\vec{r}) = -\vec{p}\cdot\nabla\delta(\vec{r})$

$$\vec{F} = \int \rho(\vec{r})\ E(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau = \int [-\vec{p}\cdot\nabla\delta(\vec{r})]\vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau$$

$$= -\int \{[\nabla\delta(\vec{r})]\cdot\vec{p}\}\,\vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau = -\int [\nabla\delta(\vec{r})]\cdot[\vec{p}\,\vec{E}(\vec{r})]\,\mathrm{d}\tau$$

利用 $\int \nabla\delta(\vec{r})\cdot\overleftrightarrow{t}\,\mathrm{d}\tau = -\left[\nabla\cdot\overleftrightarrow{t}\right]_{\vec{r}=0}$

$$= \left\{\nabla\cdot[\vec{p}\,\vec{E}(\vec{r})]\right\}_{\vec{r}=0} = \left[\vec{p}\cdot(\nabla\vec{E})\right]_{\vec{r}=0}$$

$$\vec{L} = \int \vec{r}\times[\rho(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})]\,\mathrm{d}\tau = \int \rho(\vec{r})[\vec{r}\times\vec{E}(\vec{r})]\,\mathrm{d}\tau$$

$$= -\int \vec{p}\cdot\nabla\delta(\vec{r})[\vec{r}\times\vec{E}(\vec{r})]\,\mathrm{d}\tau = -\int \{[\nabla\delta(\vec{r})]\cdot\vec{p}\}[\vec{r}\times\vec{E}(\vec{r})]\,\mathrm{d}\tau$$

$$= -\int [\nabla\delta(\vec{r})]\cdot\underbrace{\{\vec{p}[\vec{r}\times\vec{E}(\vec{r})]\}}_{\text{并矢}}\,\mathrm{d}\tau$$

利用 $\int \nabla\delta(\vec{r})\cdot\overleftrightarrow{t}\,\mathrm{d}\tau = -\left[\nabla\cdot\overleftrightarrow{t}\right]_{\vec{r}=0}$

$$= \nabla\cdot\{\vec{p}[\vec{r}\times\vec{E}(\vec{r})]\}\Big|_{\vec{r}=0}$$

利用 $\vec{p}$ 是常矢量，$(\vec{p}\cdot\nabla)$ 是标量算符

附：基于洛伦兹力公式的计算

位于原点的电偶极子的电荷密度：$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})$

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{F}} &= \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\, E(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = \int [-\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})]\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau \\
&= -\int \{[\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})]\cdot\vec{\boldsymbol{p}}\}\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = -\int [\,\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\cdot[\,\vec{\boldsymbol{p}}\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\,\mathrm{d}\tau \\
&\qquad\qquad \text{利用} \int \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}\tau = -\Big[\nabla\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{t}}\Big]_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} \\
&= \Big\{\nabla\cdot[\,\vec{\boldsymbol{p}}\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\Big\}_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} = \Big[\vec{\boldsymbol{p}}\cdot(\nabla\vec{\boldsymbol{E}})\Big]_{\vec{\boldsymbol{r}}=0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{L}} &= \int \vec{\boldsymbol{r}}\times[\rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\,\mathrm{d}\tau = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})[\,\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\,\mathrm{d}\tau \\
&= -\int \vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})[\,\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\,\mathrm{d}\tau = -\int \{\,[\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})]\cdot\vec{\boldsymbol{p}}\,\}[\,\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\,\mathrm{d}\tau \\
&= -\int [\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})]\cdot\underbrace{\{\vec{\boldsymbol{p}}\,[\,\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\}}_{\text{并矢}}\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{利用} \int \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}\tau = -\Big[\nabla\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{t}}\Big]_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} \\
&= \nabla\cdot\{\vec{\boldsymbol{p}}\,[\,\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\}\Big|_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} \qquad \text{利用 } \vec{\boldsymbol{p}} \text{ 是常矢量，} (\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla) \text{ 是标量算符} \\
&= \Big\{(\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla)[\,\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\Big\}_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} = \Big\{\Big[(\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla)\vec{\boldsymbol{r}}\Big]\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\Big\}_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \Big\{\vec{\boldsymbol{r}}\times\Big[(\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla)\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\Big]\Big\}_{\vec{\boldsymbol{r}}=0}
\end{aligned}$$

附：基于洛伦兹力公式的计算

位于原点的电偶极子的电荷密度：$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})$

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\ E(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = \int [-\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})]\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau$$

$$= -\int \{[\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})] \cdot \vec{\boldsymbol{p}}\}\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = -\int [\,\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})\,] \cdot [\,\vec{\boldsymbol{p}}\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\,\mathrm{d}\tau$$

利用 $\int \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}\tau = -\left[\nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{t}}\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}=0}$

$$= \left\{\nabla \cdot [\,\vec{\boldsymbol{p}}\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\right\}_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} = \left[\vec{\boldsymbol{p}} \cdot (\nabla\vec{\boldsymbol{E}})\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}=0}$$

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \int \vec{\boldsymbol{r}} \times [\rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\,\mathrm{d}\tau = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})[\,\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\,\mathrm{d}\tau$$

$$= -\int \vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})[\,\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\,\mathrm{d}\tau = -\int \{\,[\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})] \cdot \vec{\boldsymbol{p}}\,\}[\,\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\,\mathrm{d}\tau$$

$$= -\int [\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}})] \cdot \underbrace{\{\vec{\boldsymbol{p}}\,[\,\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\}}_{\text{并矢}}\,\mathrm{d}\tau$$

利用 $\int \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}\tau = -\left[\nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{t}}\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}=0}$

$$= \nabla \cdot \{\vec{\boldsymbol{p}}\,[\,\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\}\Big|_{\vec{\boldsymbol{r}}=0}$$

利用 $\vec{\boldsymbol{p}}$ 是常矢量，$(\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla)$ 是标量算符

$$= \left\{(\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla)[\,\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,]\right\}_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} = \left\{[(\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla)\vec{\boldsymbol{r}}\,] \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\right\}_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} + \left\{\vec{\boldsymbol{r}} \times [(\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla)\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})]\right\}_{\vec{\boldsymbol{r}}=0}$$

$$= \left\{[\vec{\boldsymbol{p}} \cdot (\nabla\vec{\boldsymbol{r}})] \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\right\}_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} = \left\{[\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}\,] \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\right\}_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} = \left[\vec{\boldsymbol{p}} \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}=0}$$

附：洛伦兹力公式 + Taylor 展开

附：洛伦兹力公式 + Taylor 展开

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau$$

附：洛伦兹力公式 + Taylor 展开

$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau$　　对电荷分布区域很小，$|\vec{\boldsymbol{r}}| \sim 0$，$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 在 $\vec{\boldsymbol{r}} = 0$ 附近展开

附：洛伦兹力公式 + Taylor 展开

$\vec{F} = \int \rho(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau$　　对电荷分布区域很小，$|\vec{r}| \sim 0$，$\vec{E}(\vec{r})$ 在 $\vec{r}=0$ 附近展开

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(0) + \vec{r}\cdot\left\{\left[\nabla\vec{E}(\vec{r})\right]_{\vec{r}=0}\right\} + \dots$$

附：洛伦兹力公式 + Taylor 展开

$\vec{F} = \int \rho(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau$　　对电荷分布区域很小，$|\vec{r}| \sim 0$，$\vec{E}(\vec{r})$ 在 $\vec{r} = 0$ 附近展开

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(0) + \vec{r}\cdot\left\{\left[\nabla\vec{E}(\vec{r})\right]_{\vec{r}=0}\right\} + \ldots$$

故：$\vec{F} = \int \rho(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau$　　$\vec{E}(\vec{r})$ 仅保留前两项

附：洛伦兹力公式 + Taylor 展开

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau$$

对电荷分布区域很小，$|\vec{\boldsymbol{r}}| \sim 0$，$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 在 $\vec{\boldsymbol{r}} = 0$ 附近展开

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{E}}(0) + \vec{\boldsymbol{r}}\cdot\left\{\left[\nabla\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}=0}\right\} + \ldots$$

故：

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{F}} &= \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau \\ &= \left[\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau\right]\vec{\boldsymbol{E}}(0) + \left[\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}\tau\right]\cdot\left\{\left[\nabla\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}=0}\right\}\end{aligned}$$

$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 仅保留前两项

附：洛伦兹力公式 + Taylor 展开

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau$$ 对电荷分布区域很小，$|\vec{\boldsymbol{r}}| \sim 0$，$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 在 $\vec{\boldsymbol{r}}=0$ 附近展开

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{E}}(0) + \vec{\boldsymbol{r}}\cdot\left\{\left[\nabla\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}=0}\right\} + \ldots$$

故：$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau$ $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 仅保留前两项

$$= \left[\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau\right]\vec{\boldsymbol{E}}(0) + \left[\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}\tau\right]\cdot\left\{\left[\nabla\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}=0}\right\}$$

$$= Q\vec{\boldsymbol{E}}(0) + \vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\vec{\boldsymbol{E}}(0)$$

附：洛伦兹力公式 + Taylor 展开

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau$$

对电荷分布区域很小，$|\vec{\boldsymbol{r}}| \sim 0$，$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 在 $\vec{\boldsymbol{r}} = 0$ 附近展开

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{E}}(0) + \vec{\boldsymbol{r}} \cdot \left\{ \left[\nabla \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} \right\} + \dots$$

故：
$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{F}} &= \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau \\ &= \left[\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau\right]\vec{\boldsymbol{E}}(0) + \left[\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}\tau\right] \cdot \left\{ \left[\nabla \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} \right\} \\ &= Q\vec{\boldsymbol{E}}(0) + \vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{E}}(0)\end{aligned}$$

$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 仅保留前两项

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \int \vec{\boldsymbol{r}} \times \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau$$

$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 仅保留第一项

附：洛伦兹力公式 + Taylor 展开

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau$$ 对电荷分布区域很小，$|\vec{\boldsymbol{r}}| \sim 0$，$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 在 $\vec{\boldsymbol{r}} = 0$ 附近展开

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{E}}(0) + \vec{\boldsymbol{r}} \cdot \left\{ \left[\nabla \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} \right\} + \ldots$$

故：$\vec{\boldsymbol{F}} = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau$ $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 仅保留前两项

$$= \left[\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau\right] \vec{\boldsymbol{E}}(0) + \left[\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}\tau\right] \cdot \left\{ \left[\nabla \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}=0} \right\}$$

$$= Q\vec{\boldsymbol{E}}(0) + \vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla \vec{\boldsymbol{E}}(0)$$

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \int \vec{\boldsymbol{r}} \times \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau$$ $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 仅保留第一项

$$= \left[\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{E}}(0)\,\mathrm{d}\tau\right]$$

附：洛伦兹力公式 + Taylor 展开

$\vec{F} = \int \rho(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau$　　对电荷分布区域很小，$|\vec{r}| \sim 0$，$\vec{E}(\vec{r})$ 在 $\vec{r}=0$ 附近展开

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(0) + \vec{r}\cdot\left\{\left[\nabla\vec{E}(\vec{r})\right]_{\vec{r}=0}\right\} + \ldots$$

故：$\vec{F} = \int \rho(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau$　　$\vec{E}(\vec{r})$ 仅保留前两项

$$= \left[\int \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau\right]\vec{E}(0) + \left[\int \rho(\vec{r})\vec{r}\,\mathrm{d}\tau\right]\cdot\left\{\left[\nabla\vec{E}(\vec{r})\right]_{\vec{r}=0}\right\}$$

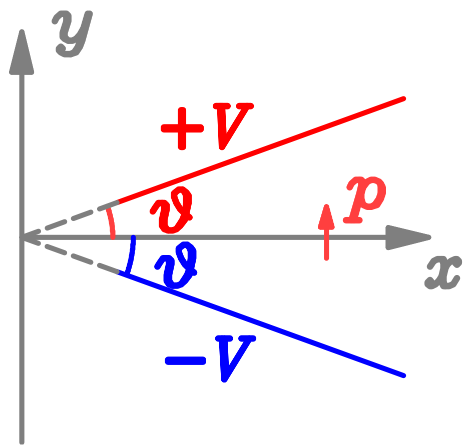
$$= Q\vec{E}(0) + \vec{p}\cdot\nabla\vec{E}(0)$$

$\vec{L} = \int \vec{r}\times\rho(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau = \int \rho(\vec{r})\vec{r}\times\vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau$　　$\vec{E}(\vec{r})$ 仅保留第一项

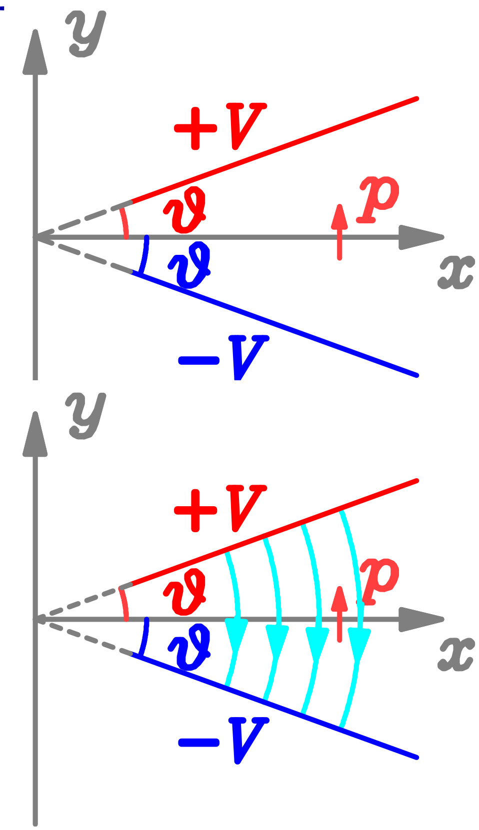
$$= \left[\int \rho(\vec{r})\vec{r}\times\vec{E}(0)\,\mathrm{d}\tau\right]$$

$$= \left[\int \rho(\vec{r})\vec{r}\,\mathrm{d}\tau\right]\times\vec{E}(0) = \vec{p}\times\vec{E}(0)$$

例 4：如上图所示，一方向平行于 $\hat{e}_y$ 的电偶极子 $\vec{p}$，放置于两个大导体平板的角平分面上，两导体平板之夹角为 2θ，分别保持电势 $\pm V$，已知 θ 很小，求 $\vec{p}$ 的受力方向。



例 4：如上图所示，一方向平行于 $\hat{e}_y$ 的电偶极子 $\vec{p}$，放置于两个大导体平板的角平分面上，两导体平板之夹角为 2θ，分别保持电势 $\pm V$，已知 θ 很小，求 $\vec{p}$ 的受力方向。

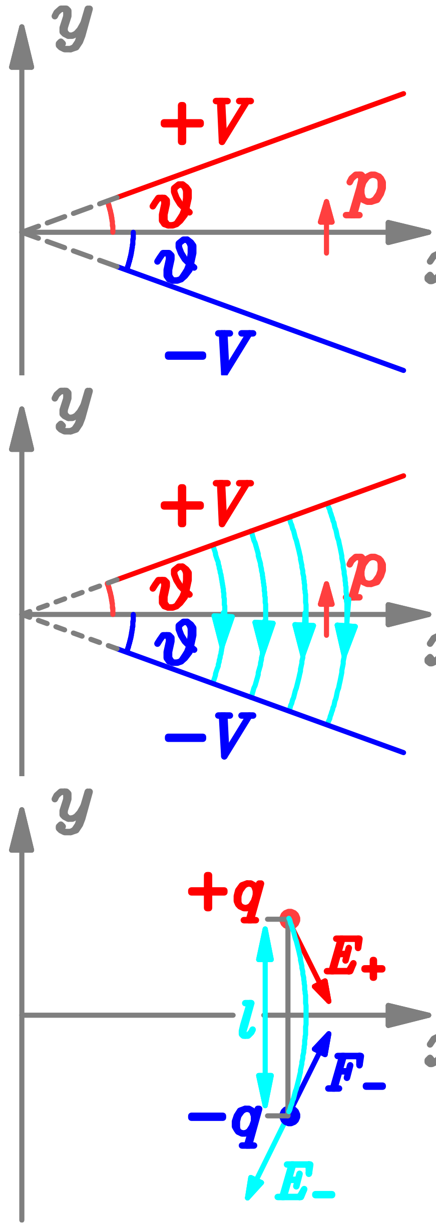


θ 很小，电力线如中图所示，在 xoy 截面内看，是一些圆弧线

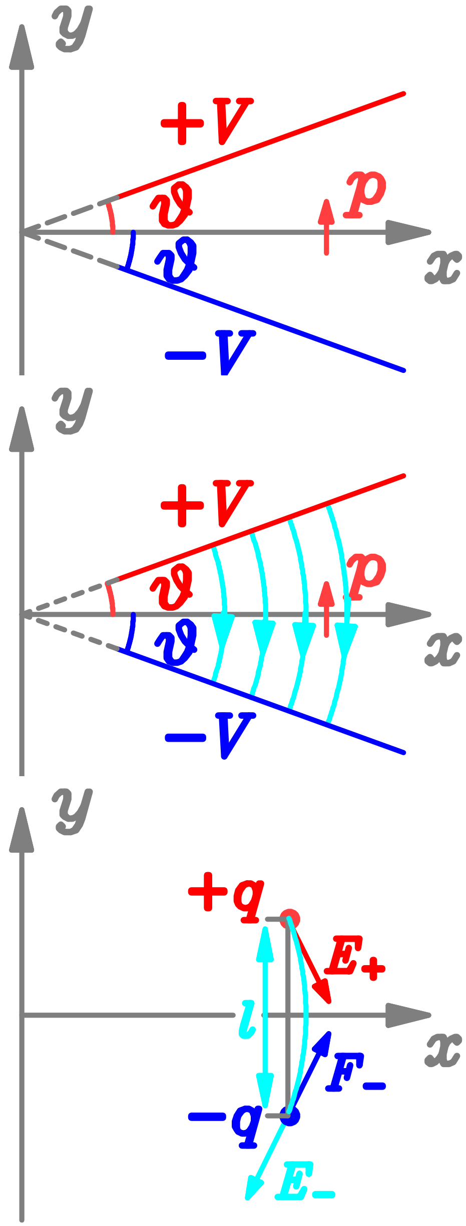
例 4：如上图所示，一方向平行于 $\hat{e}_y$ 的电偶极子 $\vec{\boldsymbol{p}}$，放置于两个大导体平板的角平分面上，两导体平板之夹角为 2θ，分别保持电势 $\pm V$，已知 θ 很小，求 $\vec{\boldsymbol{p}}$ 的受力方向。

θ 很小，电力线如中图所示，在 xoy 截面内看，是一些圆弧线

如下图所示，如果把 $\vec{\boldsymbol{p}}$ 看成一对正负电荷 $\pm q$



例 4：如上图所示，一方向平行于 $\hat{e}_y$ 的电偶极子 $\vec{p}$，放置于两个大导体平板的角平分面上，两导体平板之夹角为 2θ，分别保持电势 $\pm V$，已知 θ 很小，求 $\vec{p}$ 的受力方向。

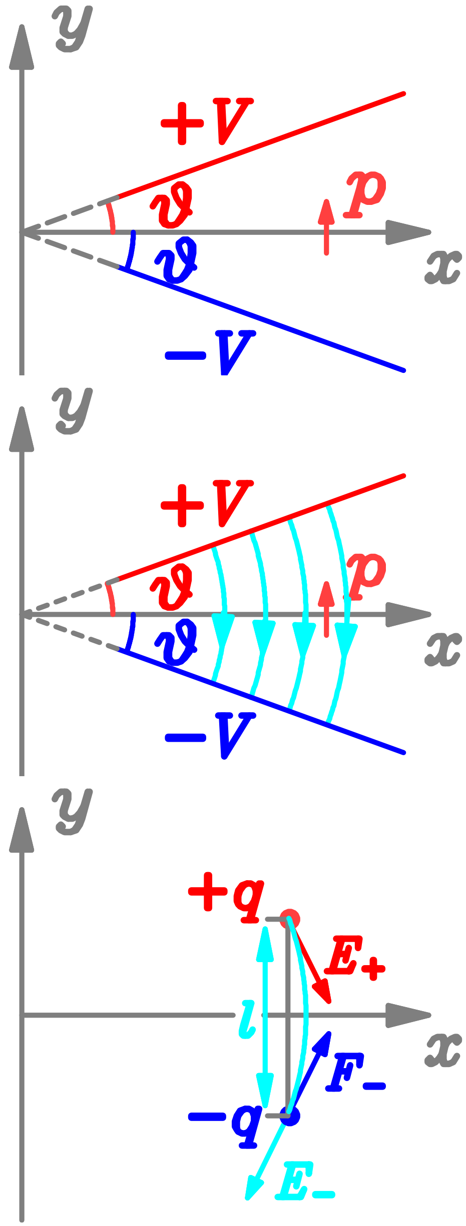


θ 很小，电力线如中图所示，在 xoy 截面内看，是一些圆弧线

如下图所示，如果把 $\vec{p}$ 看成一对正负电荷 $\pm q$

$\pm q$ 受力如图示，因此偶极子受力沿 $\hat{e}_x$ 方向

例 4：如上图所示，一方向平行于 $\hat{e}_y$ 的电偶极子 $\vec{p}$，放置于两个大导体平板的角平分面上，两导体平板之夹角为 2θ，分别保持电势 $\pm V$，已知 θ 很小，求 $\vec{p}$ 的受力方向。



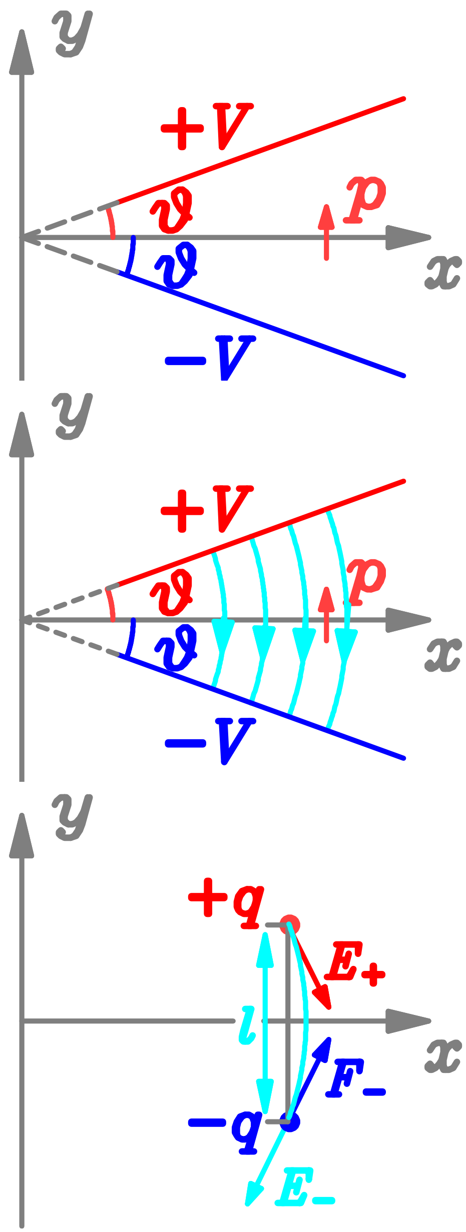
θ 很小，电力线如中图所示，在 xoy 截面内看，是一些圆弧线

如下图所示，如果把 $\vec{p}$ 看成一对正负电荷 $\pm q$

$\pm q$ 受力如图示，因此偶极子受力沿 $\hat{e}_x$ 方向

从受力公式，$\vec{F} = \vec{p}\cdot\nabla\vec{E} = (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E} = (p\,\hat{e}_y\cdot\nabla)\vec{E} = p\,\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial y}$

例 4：如上图所示，一方向平行于 $\hat{e}_y$ 的电偶极子 $\vec{p}$，放置于两个大导体平板的角平分面上，两导体平板之夹角为 2θ，分别保持电势 $\pm V$，已知 θ 很小，求 $\vec{p}$ 的受力方向。



θ 很小，电力线如中图所示，在 xoy 截面内看，是一些圆弧线

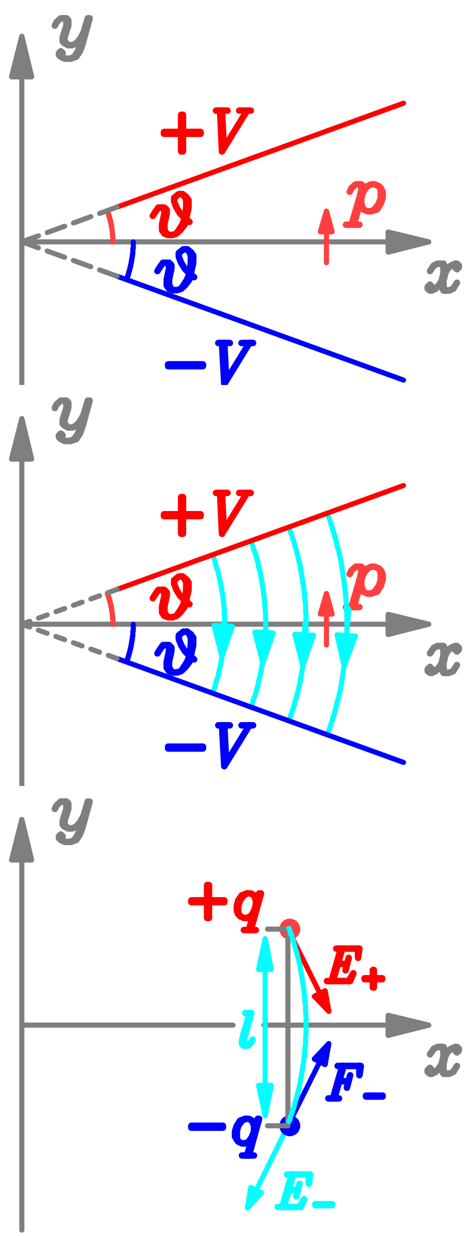
如下图所示，如果把 $\vec{p}$ 看成一对正负电荷 $\pm q$

$\pm q$ 受力如图示，因此偶极子受力沿 $\hat{e}_x$ 方向

从受力公式，$\vec{F} = \vec{p} \cdot \nabla \vec{E} = (\vec{p} \cdot \nabla)\vec{E} = (p\,\hat{e}_y \cdot \nabla)\vec{E} = p\,\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial y}$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = \lim_{l \to 0} \frac{(\vec{E}_+ - \vec{E}_-)}{l},$$

例 4：如上图所示，一方向平行于 $\hat{e}_y$ 的电偶极子 $\vec{p}$，放置于两个大导体平板的角平分面上，两导体平板之夹角为 2θ，分别保持电势 $\pm V$，已知 θ 很小，求 $\vec{p}$ 的受力方向。



θ 很小，电力线如中图所示，在 xoy 截面内看，是一些圆弧线

如下图所示，如果把 $\vec{p}$ 看成一对正负电荷 $\pm q$

$\pm q$ 受力如图示，因此偶极子受力沿 $\hat{e}_x$ 方向

从受力公式，$\vec{F} = \vec{p}\cdot\nabla\vec{E} = (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E} = (p\,\hat{e}_y\cdot\nabla)\vec{E} = p\,\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial y}$

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial y} = \lim_{l\to 0}\frac{(\vec{E}_+ - \vec{E}_-)}{l},$$

$$\vec{E}_+ = E_{+y}\,\hat{e}_y + E_{+x}\,\hat{e}_x,\quad \vec{E}_- = E_{-y}\,\hat{e}_y + E_{-x}\,\hat{e}_x,$$

例 4：如上图所示，一方向平行于 $\hat{e}_y$ 的电偶极子 $\vec{p}$，放置于两个大导体平板的角平分面上，两导体平板之夹角为 2θ，分别保持电势 $\pm V$，已知 θ 很小，求 $\vec{p}$ 的受力方向。

θ 很小，电力线如中图所示，在 xoy 截面内看，是一些圆弧线

如下图所示，如果把 $\vec{p}$ 看成一对正负电荷 $\pm q$

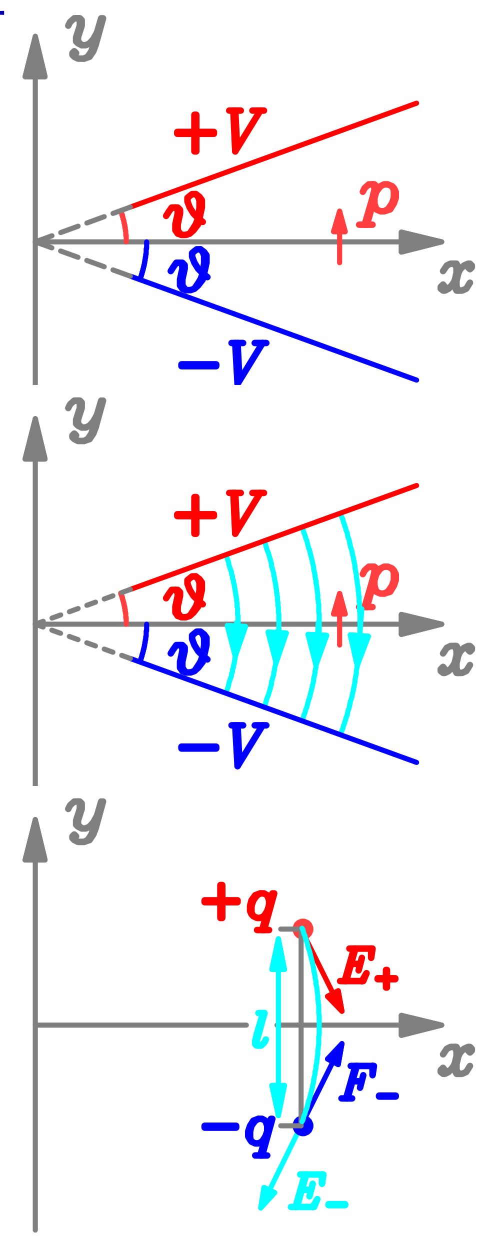
$\pm q$ 受力如图示，因此偶极子受力沿 $\hat{e}_x$ 方向

从受力公式，$\vec{F} = \vec{p}\cdot\nabla\vec{E} = (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E} = (p\,\hat{e}_y\cdot\nabla)\vec{E} = p\,\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial y}$

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial y} = \lim_{l\to 0}\frac{(\vec{E}_+ - \vec{E}_-)}{l},$$

$$\vec{E}_+ = E_{+y}\,\hat{e}_y + E_{+x}\,\hat{e}_x,\quad \vec{E}_- = E_{-y}\,\hat{e}_y + E_{-x}\,\hat{e}_x,$$

由对称性知，$E_{+y} = E_{-y}$



例 4：如上图所示，一方向平行于 $\hat{e}_y$ 的电偶极子 $\vec{p}$，放置于两个大导体平板的角平分面上，两导体平板之夹角为 2θ，分别保持电势 $\pm V$，已知 θ 很小，求 $\vec{p}$ 的受力方向。

θ 很小，电力线如中图所示，在 xoy 截面内看，是一些圆弧线

如下图所示，如果把 $\vec{p}$ 看成一对正负电荷 $\pm q$

$\pm q$ 受力如图示，因此偶极子受力沿 $\hat{e}_x$ 方向

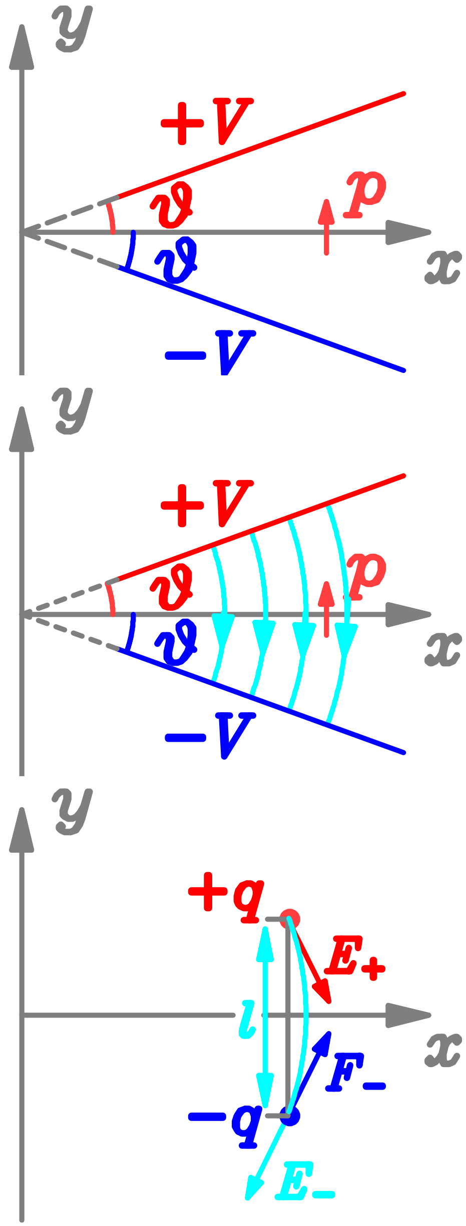
从受力公式，$\vec{F} = \vec{p}\cdot\nabla\vec{E} = (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E} = (p\,\hat{e}_y\cdot\nabla)\vec{E} = p\,\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial y}$

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial y} = \lim_{l\to 0}\frac{(\vec{E}_+ - \vec{E}_-)}{l},$$

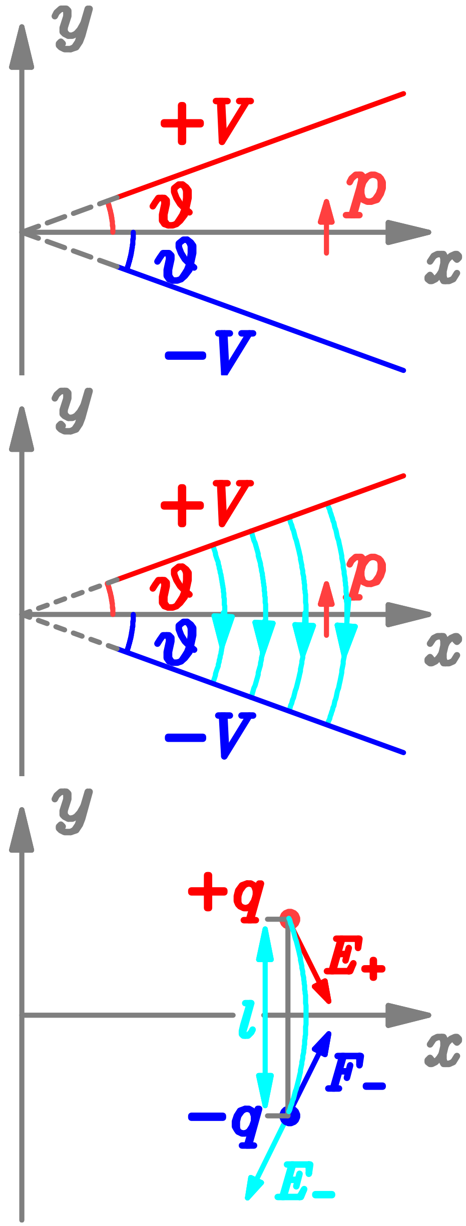
$$\vec{E}_+ = E_{+y}\,\hat{e}_y + E_{+x}\,\hat{e}_x, \quad \vec{E}_- = E_{-y}\,\hat{e}_y + E_{-x}\,\hat{e}_x,$$

由对称性知，$E_{+y} = E_{-y}$

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial y} = \lim_{l\to 0}\frac{(\vec{E}_+ - \vec{E}_-)}{l} = \lim_{l\to 0}\frac{(E_{+x} - E_{-x})\,\hat{e}_x}{l} = \frac{\partial E_x}{\partial y}\,\hat{e}_x$$



例 4：如上图所示，一方向平行于 $\hat{e}_y$ 的电偶极子 $\vec{p}$，放置于两个大导体平板的角平分面上，两导体平板之夹角为 2θ，分别保持电势 $\pm V$，已知 θ 很小，求 $\vec{p}$ 的受力方向。



θ 很小，电力线如中图所示，在 xoy 截面内看，是一些圆弧线

如下图所示，如果把 $\vec{p}$ 看成一对正负电荷 $\pm q$

$\pm q$ 受力如图示，因此偶极子受力沿 $\hat{e}_x$ 方向

从受力公式，$\vec{F} = \vec{p}\cdot\nabla\vec{E} = (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E} = (p\,\hat{e}_y\cdot\nabla)\vec{E} = p\,\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial y}$

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial y} = \lim_{l\to 0}\frac{(\vec{E}_+ - \vec{E}_-)}{l},$$

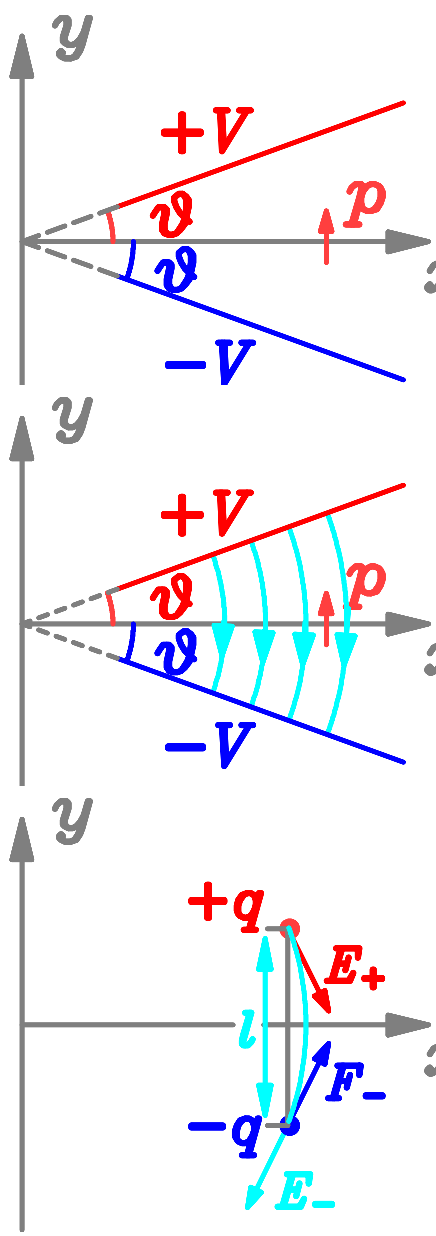
$$\vec{E}_+ = E_{+y}\,\hat{e}_y + E_{+x}\,\hat{e}_x, \quad \vec{E}_- = E_{-y}\,\hat{e}_y + E_{-x}\,\hat{e}_x,$$

由对称性知，$E_{+y} = E_{-y}$

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial y} = \lim_{l\to 0}\frac{(\vec{E}_+ - \vec{E}_-)}{l} = \lim_{l\to 0}\frac{(E_{+x} - E_{-x})\,\hat{e}_x}{l} = \frac{\partial E_x}{\partial y}\,\hat{e}_x$$

从而：$\vec{F} = p\,\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial y} = p\dfrac{\partial E_x}{\partial y}\,\hat{e}_x$

例 4：如上图所示，一方向平行于 $\hat{e}_y$ 的电偶极子 $\vec{p}$，放置于两个大导体平板的角平分面上，两导体平板之夹角为 2θ，分别保持电势 $\pm V$，已知 θ 很小，求 $\vec{p}$ 的受力方向。



θ 很小，电力线如中图所示，在 xoy 截面内看，是一些圆弧线

如下图所示，如果把 $\vec{p}$ 看成一对正负电荷 $\pm q$

$\pm q$ 受力如图示，因此偶极子受力沿 $\hat{e}_x$ 方向

从受力公式，$\vec{F} = \vec{p}\cdot\nabla\vec{E} = (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E} = (p\,\hat{e}_y\cdot\nabla)\vec{E} = p\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial y}$

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial y} = \lim_{l\to 0}\frac{(\vec{E}_+ - \vec{E}_-)}{l},$$

$$\vec{E}_+ = E_{+y}\,\hat{e}_y + E_{+x}\,\hat{e}_x, \quad \vec{E}_- = E_{-y}\,\hat{e}_y + E_{-x}\,\hat{e}_x,$$

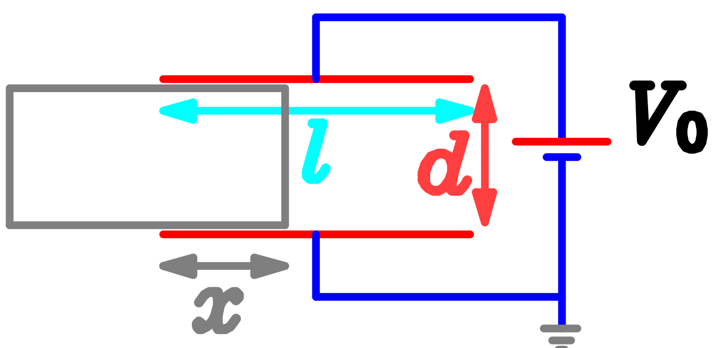
由对称性知，$E_{+y} = E_{-y}$

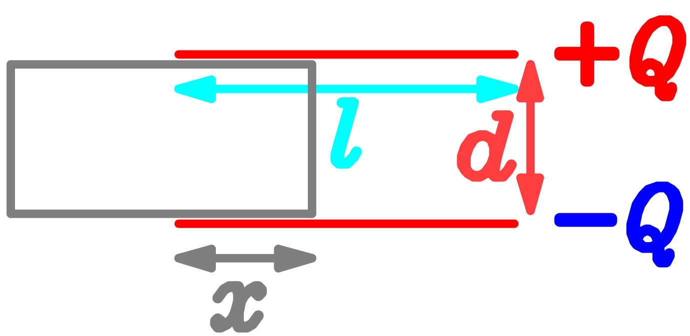
$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial y} = \lim_{l\to 0}\frac{(\vec{E}_+ - \vec{E}_-)}{l} = \lim_{l\to 0}\frac{(E_{+x} - E_{-x})\,\hat{e}_x}{l} = \frac{\partial E_x}{\partial y}\,\hat{e}_x$$

从而：$\vec{F} = p\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial y} = p\dfrac{\partial E_x}{\partial y}\,\hat{e}_x$

偶极子受力沿 $\hat{e}_x$ 方向

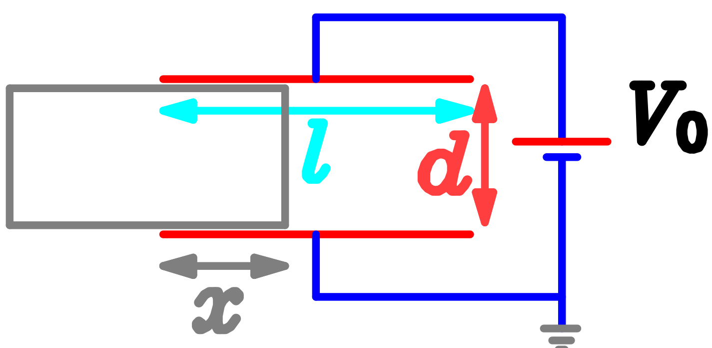
例 5：求如图所示平行板电容器中的线性均匀各向同性介质的受力，忽略边缘效应和电致伸缩效应。

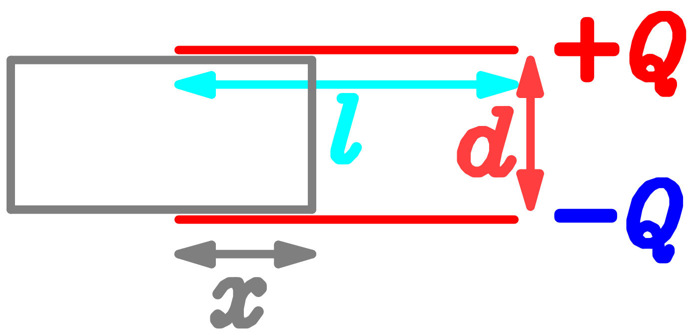




例 5：求如图所示平行板电容器中的线性均匀各向同性介质的受力，忽略边缘效应和电致伸缩效应。

左图，平行电容器导体板电势保持不变，非孤立体系

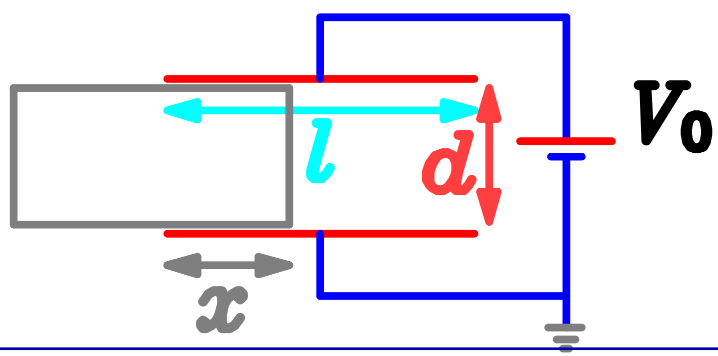


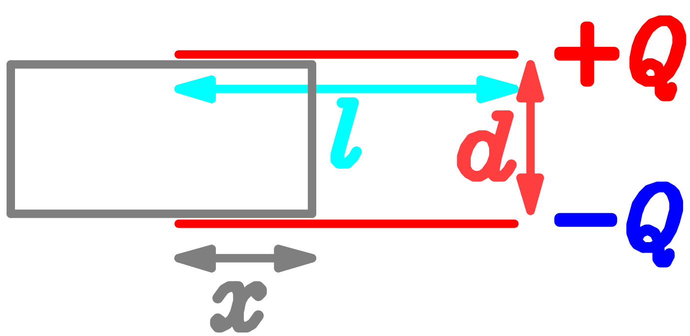


例 5：求如图所示平行板电容器中的线性均匀各向同性介质的受力，忽略边缘效应和电致伸缩效应。

左图，平行电容器导体板电势保持不变，非孤立体系

体系静电能 $W = \frac{1}{2}\int \epsilon\vec{\boldsymbol{E}}^2\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\left[xbd\epsilon(V/d)^2 + (l-x)bd\epsilon_0(V/d)^2\right]$



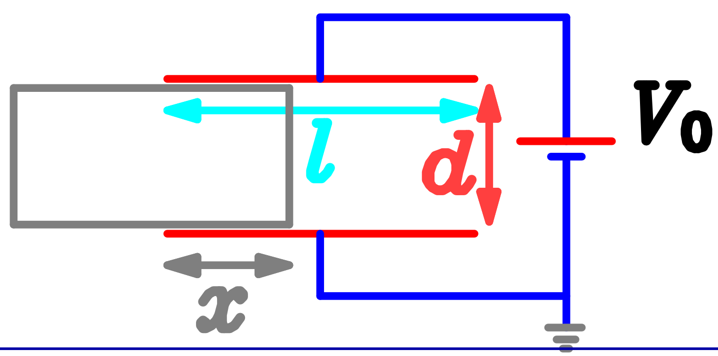


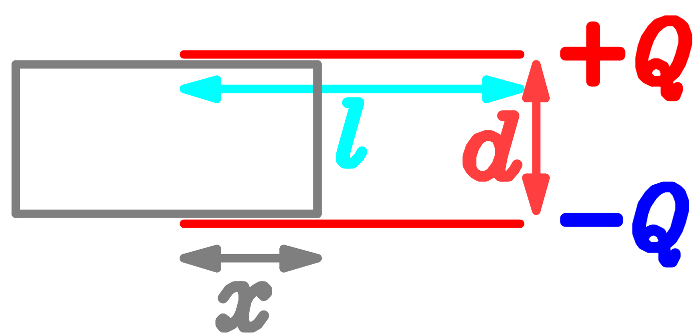
例 5：求如图所示平行板电容器中的线性均匀各向同性介质的受力，忽略边缘效应和电致伸缩效应。

左图，平行电容器导体板电势保持不变，非孤立体系

体系静电能 $W = \frac{1}{2}\int \epsilon \vec{\boldsymbol{E}}^2\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\left[xbd\epsilon(V/d)^2 + (l-x)bd\epsilon_0(V/d)^2\right]$

$$F_x = +\frac{\delta W}{\delta x} = \frac{1}{2}(V/d)^2(\epsilon - \epsilon_0)bd$$





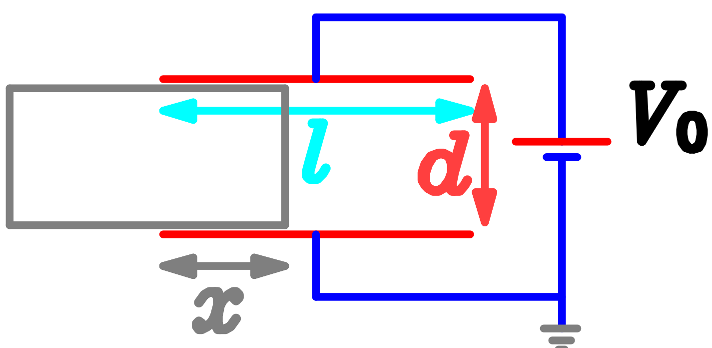
例 5：求如图所示平行板电容器中的线性均匀各向同性介质的受力，忽略边缘效应和电致伸缩效应。

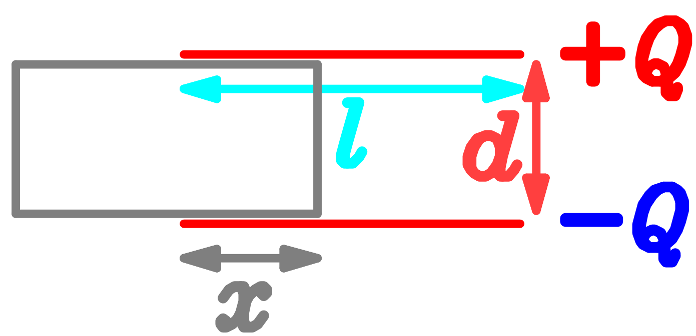
左图，平行电容器导体板电势保持不变，非孤立体系

体系静电能 $W = \frac{1}{2}\int \epsilon \vec{\boldsymbol{E}}^2\, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\left[xbd\epsilon(V/d)^2 + (l-x)bd\epsilon_0(V/d)^2\right]$

$F_x = +\dfrac{\delta W}{\delta x} = \frac{1}{2}(V/d)^2(\epsilon - \epsilon_0)bd$

右图，平行电容器导体板电量保持不变





例 5：求如图所示平行板电容器中的线性均匀各向同性介质的受力，忽略边缘效应和电致伸缩效应。

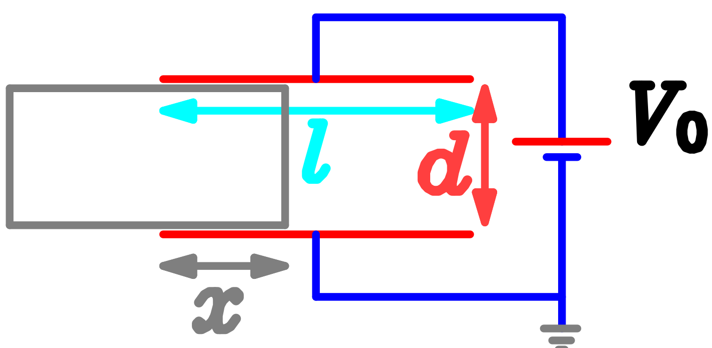
左图，平行电容器导体板电势保持不变，非孤立体系

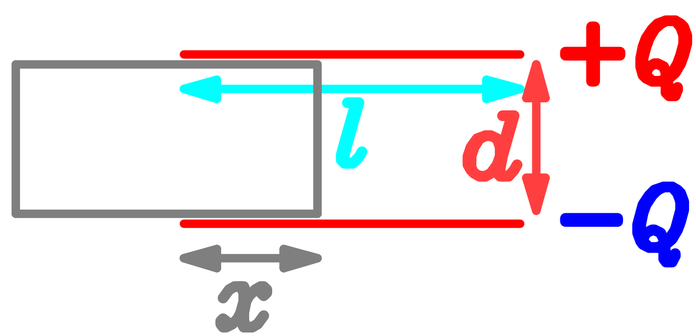
体系静电能 $W = \frac{1}{2}\int \epsilon\vec{\boldsymbol{E}}^2\,\mathrm{d}\tau = \dfrac{1}{2}\left[xbd\epsilon(V/d)^2 + (l-x)bd\epsilon_0(V/d)^2\right]$

$F_x = +\dfrac{\delta W}{\delta x} = \frac{1}{2}(V/d)^2(\epsilon-\epsilon_0)bd$

右图，平行电容器导体板电量保持不变

体系静电能 $W = \frac{1}{2}\int \epsilon\vec{\boldsymbol{E}}^2\,\mathrm{d}\tau = \dfrac{1}{2}\left[xbd\,\dfrac{\sigma_{q1}^2}{\epsilon} + (l-x)bd\,\dfrac{\sigma_{q2}^2}{\epsilon_0}\right]$





例 5：求如图所示平行板电容器中的线性均匀各向同性介质的受力，忽略边缘效应和电致伸缩效应。

左图，平行电容器导体板电势保持不变，非孤立体系

体系静电能 $W = \frac{1}{2}\int \epsilon \vec{E}^2 \,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\left[xbd\epsilon(V/d)^2 + (l-x)bd\epsilon_0(V/d)^2\right]$

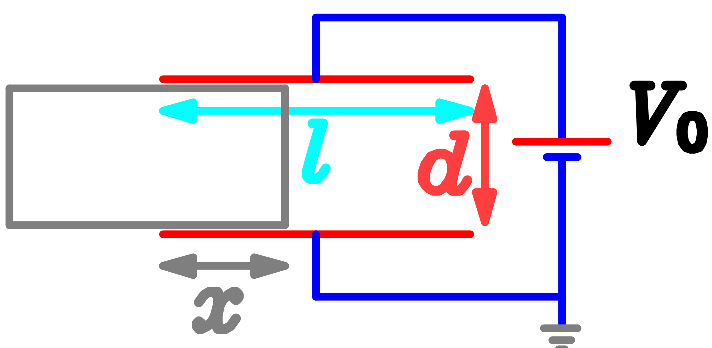
$$F_x = +\frac{\delta W}{\delta x} = \tfrac{1}{2}(V/d)^2(\epsilon - \epsilon_0)bd$$

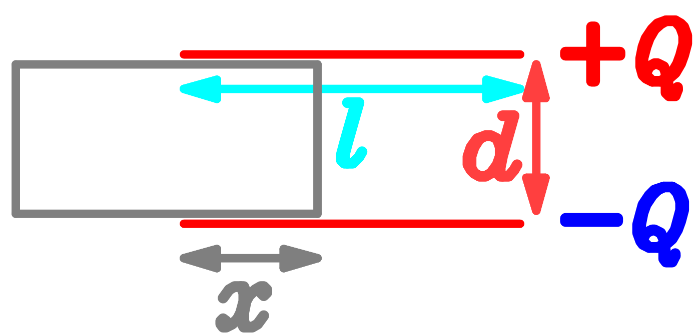
右图，平行电容器导体板电量保持不变

体系静电能 $W = \frac{1}{2}\int \epsilon \vec{E}^2 \,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\left[xbd\,\frac{\sigma_{q1}^2}{\epsilon} + (l-x)bd\,\frac{\sigma_{q2}^2}{\epsilon_0}\right]$

$$\begin{cases} \sigma_{q1}xb + \sigma_{q2}(l-x)b = Q \\ E_l = \sigma_{q1}/\epsilon = \sigma_{q2}/\epsilon_0 = E_r \end{cases}$$

解 σ_{q1}，σ_{q2} 得 $F_x = -\frac{\delta W}{\delta x} = \frac{1}{2}\frac{Q^2(\epsilon-\epsilon_0)d}{b[\epsilon x + (l-x)\epsilon_0]^2}$





例 5：求如图所示平行板电容器中的线性均匀各向同性介质的受力，忽略边缘效应和电致伸缩效应。

左图，平行电容器导体板电势保持不变，非孤立体系

体系静电能 $W = \frac{1}{2}\int \epsilon \vec{\boldsymbol{E}}^2\, \mathrm{d}\tau = \dfrac{1}{2}\left[xbd\epsilon(V/d)^2 + (l-x)bd\epsilon_0(V/d)^2\right]$

$$F_x = +\frac{\delta W}{\delta x} = \tfrac{1}{2}(V/d)^2(\epsilon-\epsilon_0)bd$$

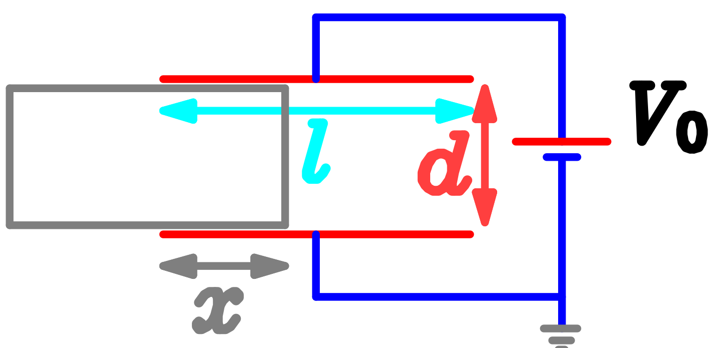
右图，平行电容器导体板电量保持不变

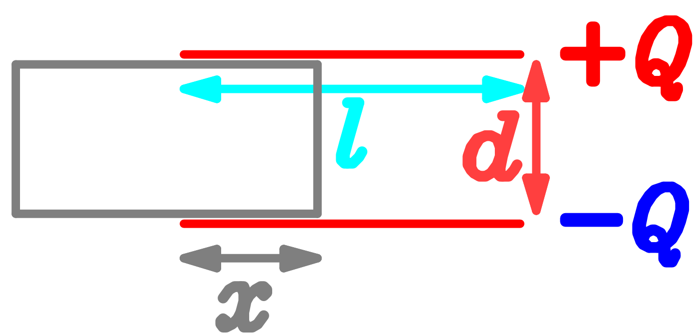
体系静电能 $W = \frac{1}{2}\int \epsilon \vec{\boldsymbol{E}}^2\, \mathrm{d}\tau = \dfrac{1}{2}\left[xbd\,\dfrac{\sigma_{q1}^2}{\epsilon} + (l-x)bd\,\dfrac{\sigma_{q2}^2}{\epsilon_0}\right]$

$$\begin{cases} \sigma_{q1}xb + \sigma_{q2}(l-x)b = Q \\ E_l = \sigma_{q1}/\epsilon = \sigma_{q2}/\epsilon_0 = E_r \end{cases}$$

解 σ_{q1}，σ_{q2} 得 $F_x = -\dfrac{\delta W}{\delta x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2(\epsilon-\epsilon_0)d}{b[\epsilon x + (l-x)\epsilon_0]^2}$

两种情况介质都是被吸进电容器





例 6：(1) 距半径为 R 带电 Q 的导体球
球心 a 处 $(a > R)$ 放置一点电荷 q，试用虚位移法求 q 的受
力。(2) 导体球保持电势 V_0 而不是带电 Q，求 q 的受力。

例 6：(1) 距半径为 R 带电 Q 的导体球球心 a 处 $(a > R)$ 放置一点电荷 q，试用虚位移法求 q 的受力。(2) 导体球保持电势 V_0 而不是带电 Q，求 q 的受力。

(1) 由镜像法知，要求球外电势，须放两个像电荷

例 6：(1) 距半径为 R 带电 Q 的导体球球心 a 处 $(a > R)$ 放置一点电荷 q，试用虚位移法求 q 的受力。(2) 导体球保持电势 V_0 而不是带电 Q，求 q 的受力。

(1) 由镜像法知，要求球外电势，须放两个像电荷

一放置于 $b = R^2/a$ 处，电量 $q' = -(R/a)q$，一放置于球心，电量 $q'' = Q - q'$

例 6：(1) 距半径为 R 带电 Q 的导体球球心 a 处 $(a > R)$ 放置一点电荷 q，试用虚位移法求 q 的受力。(2) 导体球保持电势 V_0 而不是带电 Q，求 q 的受力。

(1) 由镜像法知，要求球外电势，须放两个像电荷

一放置于 $b = R^2/a$ 处，电量 $q' = -(R/a)q$，一放置于球心，电量 $q'' = Q - q'$

由镜像法知 q 受力为 q 受这两个像电荷的作用力

例 6：(1) 距半径为 R 带电 Q 的导体球球心 a 处 $(a > R)$ 放置一点电荷 q，试用虚位移法求 q 的受力。(2) 导体球保持电势 V_0 而不是带电 Q，求 q 的受力。

(1) 由镜像法知，要求球外电势，须放两个像电荷

一放置于 $b = R^2/a$ 处，电量 $q' = -(R/a)q$，一放置于球心，电量 $q'' = Q - q'$

由镜像法知 q 受力为 q 受这两个像电荷的作用力

$$F_{\text{image}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q'}{(a-b)^2} + \frac{(Q-q')}{a^2}\right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{a^2} - \frac{R^3 q(2a^2 - R^2)}{a^3(a^2 - R^2)^2}\right]$$

例 6：(1) 距半径为 R 带电 Q 的导体球球心 a 处 $(a > R)$ 放置一点电荷 q，试用虚位移法求 q 的受力。(2) 导体球保持电势 V_0 而不是带电 Q，求 q 的受力。

(1) 由镜像法知，要求球外电势，须放两个像电荷

一放置于 $b = R^2/a$ 处，电量 $q' = -(R/a)q$，一放置于球心，电量 $q'' = Q - q'$

由镜像法知 q 受力为 q 受这两个像电荷的作用力

$$F_{\text{image}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q'}{(a-b)^2} + \frac{(Q-q')}{a^2}\right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{a^2} - \frac{R^3 q(2a^2 - R^2)}{a^3(a^2-R^2)^2}\right]$$

体系静电能：$W = \dfrac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$

例 6：(1) 距半径为 R 带电 Q 的导体球球心 a 处 $(a > R)$ 放置一点电荷 q，试用虚位移法求 q 的受力。(2) 导体球保持电势 V_0 而不是带电 Q，求 q 的受力。

(1) 由镜像法知，要求球外电势，须放两个像电荷

一放置于 $b = R^2/a$ 处，电量 $q' = -(R/a)q$，一放置于球心，电量 $q'' = Q - q'$

由镜像法知 q 受力为 q 受这两个像电荷的作用力

$$F_{\text{image}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q'}{(a-b)^2} + \frac{(Q-q')}{a^2}\right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{a^2} - \frac{R^3 q(2a^2 - R^2)}{a^3(a^2-R^2)^2}\right]$$

体系静电能：$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i \varphi_i$

$$= \frac{1}{2}\Big[Q\underbrace{\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}\right)}_{\text{导体球上的电势}} + q\underbrace{\left(\frac{Q-q'}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 (a-b)} + \varphi_q\right)}_{\text{点电荷上的电势}}\Big]$$

例 6：(1) 距半径为 R 带电 Q 的导体球
球心 a 处 $(a > R)$ 放置一点电荷 q，试用虚位移法求 q 的受
力。(2) 导体球保持电势 V_0 而不是带电 Q，求 q 的受力。

(1) 由镜像法知，要求球外电势，须放两个像电荷

一放置于 $b = R^2/a$ 处，电量 $q' = -(R/a)q$，一放置于球心，电量 $q'' = Q - q'$

由镜像法知 q 受力为 q 受这两个像电荷的作用力

$$F_{\text{image}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q'}{(a-b)^2} + \frac{(Q-q')}{a^2}\right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{a^2} - \frac{R^3 q(2a^2 - R^2)}{a^3(a^2-R^2)^2}\right]$$

体系静电能：$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$　　φ_q 为点电荷 q 在自身上的电势

$$= \frac{1}{2}\Bigg[Q\underbrace{\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}\right)}_{\text{导体球上的电势}} + q\underbrace{\left(\frac{Q-q'}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0(a-b)} + \varphi_q\right)}_{\text{点电荷上的电势}}\Bigg]$$

例 6：(1) 距半径为 R 带电 Q 的导体球球心 a 处 $(a>R)$ 放置一点电荷 q，试用虚位移法求 q 的受力。(2) 导体球保持电势 V_0 而不是带电 Q，求 q 的受力。

(1) 由镜像法知，要求球外电势，须放两个像电荷

一放置于 $b=R^2/a$ 处，电量 $q'=-(R/a)q$，一放置于球心，电量 $q''=Q-q'$

由镜像法知 q 受力为 q 受这两个像电荷的作用力

$$F_{\text{image}}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q'}{(a-b)^2}+\frac{(Q-q')}{a^2}\right]=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{a^2}-\frac{R^3q(2a^2-R^2)}{a^3(a^2-R^2)^2}\right]$$

体系静电能：$W=\dfrac{1}{2}\sum\limits_i q_i\varphi_i$ $\qquad$ φ_q 为点电荷 q 在自身上的电势

$$=\frac{1}{2}\left[Q\underbrace{\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}\right)}_{\text{导体球上的电势}}+q\underbrace{\left(\frac{Q-q'}{4\pi\epsilon_0 a}+\frac{q'}{4\pi\epsilon_0(a-b)}+\varphi_q\right)}_{\text{点电荷上的电势}}\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{2}\frac{Q^2}{R}+\frac{qQ}{a}-\frac{1}{2}\frac{qq'}{a}+\frac{1}{2}\frac{qq'}{(a-b)}+q\varphi_q\right]$$

例 6：(1) 距半径为 R 带电 Q 的导体球球心 a 处 ($a > R$) 放置一点电荷 q，试用虚位移法求 q 的受力。(2) 导体球保持电势 V_0 而不是带电 Q，求 q 的受力。

(1) 由镜像法知，要求球外电势，须放两个像电荷

一放置于 $b = R^2/a$ 处，电量 $q' = -(R/a)q$，一放置于球心，电量 $q'' = Q - q'$

由镜像法知 q 受力为 q 受这两个像电荷的作用力

$$F_{\text{image}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q'}{(a-b)^2} + \frac{(Q-q')}{a^2}\right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{a^2} - \frac{R^3 q(2a^2-R^2)}{a^3(a^2-R^2)^2}\right]$$

体系静电能：$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$ 　　φ_q 为点电荷 q 在自身上的电势

$$= \frac{1}{2}\left[Q\underbrace{\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}\right)}_{\text{导体球上的电势}} + q\underbrace{\left(\frac{Q-q'}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0(a-b)} + \varphi_q\right)}_{\text{点电荷上的电势}}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{2}\frac{Q^2}{R} + \frac{qQ}{a} - \frac{1}{2}\frac{qq'}{a} + \frac{1}{2}\frac{qq'}{(a-b)} + q\varphi_q\right]$$

导体和点电荷构成孤立体系，可求得 $F_w = -\frac{\delta W}{\delta a} = F_{\text{image}}$

(2) 由镜像法知，要求球外电势，须放两个像电荷

(2) 由镜像法知，要求球外电势，须放两个像电荷

一放置于 $b = R^2/a$ 处，电量 $q' = -(R/a)q$，一放置于球心，电量 $q'' = 4\pi\epsilon_0 V_0 R$

(2) 由镜像法知，要求球外电势，须放两个像电荷

一放置于 $b = R^2/a$ 处，电量 $q' = -(R/a)q$，一放置于球心，电量 $q'' = 4\pi\epsilon_0 V_0 R$

由镜像法知 q 受力为 q 受这两个像电荷的作用力

(2) 由镜像法知，要求球外电势，须放两个像电荷

一放置于 $b = R^2/a$ 处，电量 $q' = -(R/a)q$，一放置于球心，电量 $q'' = 4\pi\epsilon_0 V_0 R$

由镜像法知 q 受力为 q 受这两个像电荷的作用力

$$F_{\text{image}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q'}{(a-b)^2} + \frac{4\pi\epsilon_0 V_0 R}{a^2}\right] = \frac{qRV_0}{a^2} - \frac{aq^2 R}{4\pi\epsilon_0(a^2 - R^2)^2}$$

(2) 由镜像法知，要求球外电势，须放两个像电荷

一放置于 $b = R^2/a$ 处，电量 $q' = -(R/a)q$，一放置于球心，电量 $q'' = 4\pi\epsilon_0 V_0 R$

由镜像法知 q 受力为 q 受这两个像电荷的作用力

$$F_{\text{image}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q'}{(a-b)^2} + \frac{4\pi\epsilon_0 V_0 R}{a^2}\right] = \frac{qRV_0}{a^2} - \frac{aq^2 R}{4\pi\epsilon_0 (a^2 - R^2)^2}$$

体系静电能：$W = \dfrac{1}{2}\sum_i q_i \varphi_i$

(2) 由镜像法知，要求球外电势，须放两个像电荷

一放置于 $b = R^2/a$ 处，电量 $q' = -(R/a)q$，一放置于球心，电量 $q'' = 4\pi\epsilon_0 V_0 R$

由镜像法知 q 受力为 q 受这两个像电荷的作用力

$$F_{\text{image}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q'}{(a-b)^2} + \frac{4\pi\epsilon_0 V_0 R}{a^2}\right] = \frac{qRV_0}{a^2} - \frac{aq^2R}{4\pi\epsilon_0(a^2-R^2)^2}$$

体系静电能：$W = \dfrac{1}{2}\sum\limits_i q_i\varphi_i$

$$= \frac{1}{2}\left[V_0\underbrace{\left(\overbrace{-\frac{R}{a}q}^{q'} + \overbrace{4\pi\epsilon_0 V_0 R}^{q''}\right)}_{\text{导体球上的电量}} + q\underbrace{\left(\frac{q''}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0(a-b)} + \varphi_q\right)}_{\text{点电荷上的电势}}\right]$$

(2) 由镜像法知，要求球外电势，须放两个像电荷

一放置于 $b = R^2/a$ 处，电量 $q' = -(R/a)q$，一放置于球心，电量 $q'' = 4\pi\epsilon_0 V_0 R$

由镜像法知 q 受力为 q 受这两个像电荷的作用力

$$F_{\text{image}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q'}{(a-b)^2} + \frac{4\pi\epsilon_0 V_0 R}{a^2}\right] = \frac{qRV_0}{a^2} - \frac{aq^2R}{4\pi\epsilon_0(a^2-R^2)^2}$$

体系静电能：$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$ φ_q 为点电荷 q 在自身上的电势

$$= \frac{1}{2}\Big[V_0\underbrace{\Big(\overbrace{-\frac{R}{a}q}^{q'} + \overbrace{4\pi\epsilon_0 V_0 R}^{q''}\Big)}_{\text{导体球上的电量}} + q\underbrace{\left(\frac{q''}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0(a-b)} + \varphi_q\right)}_{\text{点电荷上的电势}}\Big]$$

固定电势：$F_w = +\frac{\delta W}{\delta a} = \frac{aq^2R}{4\pi\epsilon_0(a^2-R^2)^2} \neq F_{\text{image}}$

(2) 由镜像法知，要求球外电势，须放两个像电荷

一放置于 $b = R^2/a$ 处，电量 $q' = -(R/a)q$，一放置于球心，电量 $q'' = 4\pi\epsilon_0 V_0 R$

由镜像法知 q 受力为 q 受这两个像电荷的作用力

$$F_{\text{image}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q'}{(a-b)^2} + \frac{4\pi\epsilon_0 V_0 R}{a^2}\right] = \frac{qRV_0}{a^2} - \frac{aq^2R}{4\pi\epsilon_0(a^2-R^2)^2}$$

体系静电能：$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$ $\qquad$ φ_q 为点电荷 q 在自身上的电势

$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{V_0\Big(\overbrace{-\frac{R}{a}q}^{q'} + \overbrace{4\pi\epsilon_0 V_0 R}^{q''}\Big)}_{\text{导体球上的电量}} + q\underbrace{\left(\frac{q''}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0(a-b)} + \varphi_q\right)}_{\text{点电荷上的电势}}\Big]$$

固定电势：$F_w = +\frac{\delta W}{\delta a} = \frac{aq^2R}{4\pi\epsilon_0(a^2-R^2)^2} \neq F_{\text{image}}$ $\qquad$ 错在哪里？

(2) 由镜像法知，要求球外电势，须放两个像电荷

一放置于 $b=R^2/a$ 处，电量 $q'=-(R/a)q$，一放置于球心，电量 $q''=4\pi\epsilon_0V_0R$

由镜像法知 q 受力为 q 受这两个像电荷的作用力

$$F_{\text{image}}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q'}{(a-b)^2}+\frac{4\pi\epsilon_0V_0R}{a^2}\right]=\frac{qRV_0}{a^2}-\frac{aq^2R}{4\pi\epsilon_0(a^2-R^2)^2}$$

体系静电能：$W=\dfrac{1}{2}\sum\limits_i q_i\varphi_i$ $\qquad$ φ_q 为点电荷 q 在自身上的电势

$$=\frac{1}{2}\left[V_0\underbrace{\left(\overbrace{-\frac{R}{a}q}^{q'}+\overbrace{4\pi\epsilon_0V_0R}^{q''}\right)}_{\text{导体球上的电量}}+q\underbrace{\left(\frac{q''}{4\pi\epsilon_0a}+\frac{q'}{4\pi\epsilon_0(a-b)}+\varphi_q\right)}_{\text{点电荷上的电势}}\right]$$

固定电势：$F_w=+\dfrac{\delta W}{\delta a}=\dfrac{aq^2R}{4\pi\epsilon_0(a^2-R^2)^2}\neq F_{\text{image}}$ $\qquad$ 错在哪里？

体系由导体球和点电荷组成，当点电荷作虚位移时，导体球电势不变，电量 $Q_{\text{导体}}$ 改变
点电荷电量不变，但电势改变，体系既非孤立体系，也非固定电势不变的体系

(2) 由镜像法知，要求球外电势，须放两个像电荷

一放置于 $b = R^2/a$ 处，电量 $q' = -(R/a)q$，一放置于球心，电量 $q'' = 4\pi\epsilon_0 V_0 R$

由镜像法知 q 受力为 q 受这两个像电荷的作用力

$$F_{\text{image}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q'}{(a-b)^2} + \frac{4\pi\epsilon_0 V_0 R}{a^2}\right] = \frac{qRV_0}{a^2} - \frac{aq^2R}{4\pi\epsilon_0(a^2-R^2)^2}$$

体系静电能：$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$ $\qquad$ φ_q 为点电荷 q 在自身上的电势

$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{V_0\left(\overbrace{-\frac{R}{a}q}^{q'} + \overbrace{4\pi\epsilon_0 V_0 R}^{q''}\right)}_{\text{导体球上的电量}} + \underbrace{q\left(\frac{q''}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0(a-b)} + \varphi_q\right)}_{\text{点电荷上的电势}}\right]$$

固定电势：$F_w = +\frac{\delta W}{\delta a} = \frac{aq^2R}{4\pi\epsilon_0(a^2-R^2)^2} \neq F_{\text{image}}$ $\qquad$ 错在哪里？

体系由导体球和点电荷组成，当点电荷作虚位移时，导体球电势不变，电量 $Q_{\text{导体}}$ 改变

点电荷电量不变，但电势改变，体系既非孤立体系，也非固定电势不变的体系

$$F \neq \pm\frac{\delta W}{\delta a}, \quad F = \frac{\delta A}{\delta a} = \frac{\delta W_0 - \delta W}{\delta a},$$

(2) 由镜像法知，要求球外电势，须放两个像电荷

一放置于 $b=R^2/a$ 处，电量 $q'=-(R/a)q$，一放置于球心，电量 $q''=4\pi\epsilon_0 V_0 R$

由镜像法知 q 受力为 q 受这两个像电荷的作用力

$$F_{\text{image}}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q'}{(a-b)^2}+\frac{4\pi\epsilon_0 V_0 R}{a^2}\right]=\frac{qRV_0}{a^2}-\frac{aq^2R}{4\pi\epsilon_0(a^2-R^2)^2}$$

体系静电能：$W=\dfrac{1}{2}\sum\limits_i q_i\varphi_i$ $\qquad\varphi_q$ 为点电荷 q 在自身上的电势

$$=\frac{1}{2}\left[V_0\underbrace{\left(\overbrace{-\frac{R}{a}q}^{q'}+\overbrace{4\pi\epsilon_0 V_0 R}^{q''}\right)}_{\text{导体球上的电量}}+q\underbrace{\left(\frac{q''}{4\pi\epsilon_0 a}+\frac{q'}{4\pi\epsilon_0(a-b)}+\varphi_q\right)}_{\text{点电荷上的电势}}\right]$$

固定电势：$F_w=+\dfrac{\delta W}{\delta a}=\dfrac{aq^2R}{4\pi\epsilon_0(a^2-R^2)^2}\neq F_{\text{image}}$ 错在哪里？

体系由导体球和点电荷组成，当点电荷作虚位移时，导体球电势不变，电量 $Q_{\text{导体}}$ 改变

点电荷电量不变，但电势改变，体系既非孤立体系，也非固定电势不变的体系

$F\neq\pm\dfrac{\delta W}{\delta a}$, $\quad F=\dfrac{\delta A}{\delta a}=\dfrac{\delta W_0-\delta W}{\delta a}$, $\quad\delta W_0$ 为外界做的功，δW 为体系静电能的改变

(2) 由镜像法知，要求球外电势，须放两个像电荷

一放置于 $b=R^2/a$ 处，电量 $q'=-(R/a)q$，一放置于球心，电量 $q''=4\pi\epsilon_0V_0R$

由镜像法知 q 受力为 q 受这两个像电荷的作用力

$$F_{\text{image}}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q'}{(a-b)^2}+\frac{4\pi\epsilon_0V_0R}{a^2}\right]=\frac{qRV_0}{a^2}-\frac{aq^2R}{4\pi\epsilon_0(a^2-R^2)^2}$$

体系静电能：$W=\dfrac{1}{2}\sum\limits_i q_i\varphi_i$ φ_q 为点电荷 q 在自身上的电势

$$=\frac{1}{2}\Bigg[\underbrace{V_0\Big(\overbrace{-\frac{R}{a}q}^{q'}+\overbrace{4\pi\epsilon_0V_0R}^{q''}\Big)}_{\text{导体球上的电量}}+\underbrace{q\Big(\frac{q''}{4\pi\epsilon_0a}+\frac{q'}{4\pi\epsilon_0(a-b)}+\varphi_q\Big)}_{\text{点电荷上的电势}}\Bigg]$$

固定电势：$F_w=+\dfrac{\delta W}{\delta a}=\dfrac{aq^2R}{4\pi\epsilon_0(a^2-R^2)^2}\neq F_{\text{image}}$ 错在哪里?

体系由导体球和点电荷组成，当点电荷作虚位移时，导体球电势不变，电量 $Q_{\text{导体}}$ 改变
点电荷电量不变，但电势改变，体系既非孤立体系，也非固定电势不变的体系

$F\neq\pm\dfrac{\delta W}{\delta a}$, $F=\dfrac{\delta A}{\delta a}=\dfrac{\delta W_0-\delta W}{\delta a}$, δW_0 为外界做的功，δW 为体系静电能的改变

$\delta W_0=V_0\delta Q_{\text{导体}}$ 电源将 $\delta Q_{\text{导体}}$ 电量移到导体球，

(2) 由镜像法知，要求球外电势，须放两个像电荷

一放置于 $b = R^2/a$ 处，电量 $q' = -(R/a)q$，一放置于球心，电量 $q'' = 4\pi\epsilon_0 V_0 R$

由镜像法知 q 受力为 q 受这两个像电荷的作用力

$$F_{\text{image}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q'}{(a-b)^2} + \frac{4\pi\epsilon_0 V_0 R}{a^2}\right] = \frac{qRV_0}{a^2} - \frac{aq^2R}{4\pi\epsilon_0(a^2-R^2)^2}$$

体系静电能：$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$ φ_q 为点电荷 q 在自身上的电势

$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{V_0\Big(\overbrace{-\frac{R}{a}q}^{q'} + \overbrace{4\pi\epsilon_0 V_0 R}^{q''}\Big)}_{\text{导体球上的电量}} + \underbrace{q\left(\frac{q''}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0(a-b)} + \varphi_q\right)}_{\text{点电荷上的电势}}\right]$$

固定电势：$F_w = +\dfrac{\delta W}{\delta a} = \dfrac{aq^2R}{4\pi\epsilon_0(a^2-R^2)^2} \neq F_{\text{image}}$ 错在哪里？

体系由导体球和点电荷组成，当点电荷作虚位移时，导体球电势不变，电量 $Q_{\text{导体}}$ 改变

点电荷电量不变，但电势改变，体系既非孤立体系，也非固定电势不变的体系

$F \neq \pm\dfrac{\delta W}{\delta a}$，$F = \dfrac{\delta A}{\delta a} = \dfrac{\delta W_0 - \delta W}{\delta a}$， δW_0 为外界做的功，δW 为体系静电能的改变

$\delta W_0 = V_0 \delta Q_{\text{导体}}$ 电源将 $\delta Q_{\text{导体}}$ 电量移到导体球， $Q_{\text{导体}} = q' + q''$， $\delta Q_{\text{导体}} = \delta q'$

(2) 由镜像法知，要求球外电势，须放两个像电荷

一放置于 $b=R^2/a$ 处，电量 $q'=-(R/a)q$，一放置于球心，电量 $q''=4\pi\epsilon_0 V_0 R$

由镜像法知 q 受力为 q 受这两个像电荷的作用力

$$F_{\text{image}}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q'}{(a-b)^2}+\frac{4\pi\epsilon_0 V_0 R}{a^2}\right]=\frac{qRV_0}{a^2}-\frac{aq^2R}{4\pi\epsilon_0(a^2-R^2)^2}$$

体系静电能：$W=\dfrac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$ $\qquad$ φ_q 为点电荷 q 在自身上的电势

$$=\frac{1}{2}\left[\underbrace{V_0\Big(\overbrace{-\frac{R}{a}q}^{q'}+\overbrace{4\pi\epsilon_0 V_0 R}^{q''}\Big)}_{\text{导体球上的电量}}+q\underbrace{\left(\frac{q''}{4\pi\epsilon_0 a}+\frac{q'}{4\pi\epsilon_0(a-b)}+\varphi_q\right)}_{\text{点电荷上的电势}}\right]$$

固定电势：$F_w=+\dfrac{\delta W}{\delta a}=\dfrac{aq^2R}{4\pi\epsilon_0(a^2-R^2)^2}\neq F_{\text{image}}$ $\qquad$ 错在哪里?

体系由导体球和点电荷组成，当点电荷作虚位移时，导体球电势不变，电量 $Q_{\text{导体}}$ 改变点电荷电量不变，但电势改变，体系既非孤立体系，也非固定电势不变的体系

$F\neq\pm\dfrac{\delta W}{\delta a}$, $\quad F=\dfrac{\delta A}{\delta a}=\dfrac{\delta W_0-\delta W}{\delta a}$, $\quad \delta W_0$ 为外界做的功，δW 为体系静电能的改变

$\delta W_0=V_0\delta Q_{\text{导体}}$ $\qquad$ 电源将 $\delta Q_{\text{导体}}$ 电量移到导体球，$\quad Q_{\text{导体}}=q'+q''$, $\quad \delta Q_{\text{导体}}=\delta q'$

从而：$F=-\dfrac{\delta W}{\delta a}+V_0\dfrac{\delta q'}{\delta a}=F_{\text{image}}$