§ 3.1 静电场的标势及其微分方程、边值关系

§ 3.1 静电场的标势及其微分方程、边值关系

一、静电场的标势

§ 3.1 静电场的标势及其微分方程、边值关系

一、静电场的标势

静电问题 $$\frac{\partial}{\partial t}=0,\quad \vec{j}=0$$

§3.1 静电场的标势及其微分方程、边值关系

一、静电场的标势

静电问题 $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \vec{\boldsymbol{j}} = 0$

故静电场满足方程 $\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = \rho_f, \quad \nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = 0$ 电场磁场退耦，可分别求解

§ 3.1 静电场的标势及其微分方程、边值关系

一、静电场的标势

静电问题 $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \vec{\boldsymbol{j}} = 0$

故静电场满足方程 $\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = \rho_f, \quad \nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = 0$ 电场磁场退耦，可分别求解

标势的引入 $\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$

§ 3.1 静电场的标势及其微分方程、边值关系

一、静电场的标势

静电问题 $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \vec{\boldsymbol{j}} = 0$

故静电场满足方程 $\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = \rho_f, \quad \nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = 0$ 电场磁场退耦，可分别求解

标势的引入 $\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$

若已知电荷分布 $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \dfrac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau', \quad \varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \dfrac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau'$

$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$

§ 3.1 静电场的标势及其微分方程、边值关系

一、静电场的标势

静电问题 $\dfrac{\partial}{\partial t}=0,\quad \vec{\boldsymbol{j}}=0$

故静电场满足方程 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}}=\rho_f,\quad \nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}=0$ 电场磁场退耦，可分别求解

标势的引入 $\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})=-\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$

若已知电荷分布 $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau',\quad \varphi(\vec{\boldsymbol{r}})=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau'$

$\vec{\boldsymbol{R}}=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'$

讨论：

§ 3.1 静电场的标势及其微分方程、边值关系

一、静电场的标势

静电问题 $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \vec{\boldsymbol{j}} = 0$

故静电场满足方程 $\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = \rho_f, \quad \nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = 0$ 电场磁场退耦，可分别求解

标势的引入 $\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$

若已知电荷分布 $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \dfrac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau', \quad \varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \dfrac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau'$

$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$

讨论：

1. 空间两点的电势差等于移动单位正电荷静电场所做的功

§ 3.1 静电场的标势及其微分方程、边值关系

一、静电场的标势

静电问题 $\frac{\partial}{\partial t}=0, \quad \vec{\boldsymbol{j}}=0$

故静电场满足方程 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}}=\rho_f, \quad \nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}=0$ 电场磁场退耦，可分别求解

标势的引入 $\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})=0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})=-\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$

若已知电荷分布 $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau', \quad \varphi(\vec{\boldsymbol{r}})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau'$

$\vec{\boldsymbol{R}}=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'$

讨论：

1. 空间两点的电势差等于移动单位正电荷静电场所做的功

$$\int_A^B\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}=-\int_A^B\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}=-\int_A^B\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial l}}_{\text{方向导数}}\,\mathrm{d}l=-[\varphi(B)-\varphi(A)]$$

2. 因为 $\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi$，电势差一常数不影响电场，可选择方便的电势参考点，下式已默认无穷远处电势参考点为 0

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{R}}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau'$$

2. 因为 $\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi$，电势差一常数不影响电场，可选择方便的电势参考点，下式已默认无穷远处电势参考点为 0

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{R}}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau'$$

3. 例：

点电偶极子的电势： $$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}, \qquad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_p$$ (§2-1 p9 例题2)

2. 因为 $\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi$，电势差一常数不影响电场，可选择方便的电势参考点，下式已默认无穷远处电势参考点为 0

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{R}}')}{R}\,\mathrm{d}\tau'$$

3. 例：

点电偶极子的电势：
$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}, \qquad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_p$$
(§2-1 p9 例题2)

点电偶极子的电场：
$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3(\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{p}})\vec{\boldsymbol{R}} - (\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}})\vec{\boldsymbol{p}}}{R^5} - \frac{\vec{\boldsymbol{p}}}{3\epsilon_0}\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_p)$$

(§2-1 p9 例题2)

2. 因为 $\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi$，电势差一常数不影响电场，可选择方便的电势参考点，下式已默认无穷远处电势参考点为 0

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{R}}')}{R}\,\mathrm{d}\tau'$$

3. 例：

点电偶极子的电势：
$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}, \qquad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_p$$

(§2-1 p9 例题2)

点电偶极子的电场：
$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3(\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{p}})\vec{\boldsymbol{R}} - (\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}})\vec{\boldsymbol{p}}}{R^5} - \frac{\vec{\boldsymbol{p}}}{3\epsilon_0}\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_p)$$

(§2-1 p9 例题2)

电偶层电势：
$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int D(\vec{\boldsymbol{r}}')\,\mathrm{d}\Omega$$

$D(\vec{\boldsymbol{r}}')$ 为电偶层强度

(§2-1 p12 例题3)

2. 因为 $\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi$，电势差一常数不影响电场，可选择方便的电势参考点，下式已默认无穷远处电势参考点为 0

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{R}}')}{R}\,\mathrm{d}\tau'$$

3. 例：

点电偶极子的电势： $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}$, $\quad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_p$ (§2-1 p9 例题2)

点电偶极子的电场： $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{3(\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{p}})\vec{\boldsymbol{R}} - (\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}})\vec{\boldsymbol{p}}}{R^5} - \dfrac{\vec{\boldsymbol{p}}}{3\epsilon_0}\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_p)$

(§2-1 p9 例题2)

电偶层电势： $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int D(\vec{\boldsymbol{r}}')\,\mathrm{d}\Omega$ $\quad D(\vec{\boldsymbol{r}}')$ 为电偶层强度

(§2-1 p12 例题3)

均匀电场 $\vec{\boldsymbol{E}}_0$ 的电势： $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{E}}_0\cdot\vec{\boldsymbol{r}} + C$ $\quad$ (易验证：$-\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{E}}_0$)

2. 因为 $\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi$，电势差一常数不影响电场，可选择方便的电势参考点，下式已默认无穷远处电势参考点为 0

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{R}}')}{R}\,\mathrm{d}\tau'$$

3. 例：

点电偶极子的电势： $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3},\qquad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_p$ (§2-1 p9 例题2)

点电偶极子的电场： $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3(\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{p}})\vec{\boldsymbol{R}} - (\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}})\vec{\boldsymbol{p}}}{R^5} - \frac{\vec{\boldsymbol{p}}}{3\epsilon_0}\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_p)$

(§2-1 p9 例题2)

电偶层电势： $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int D(\vec{\boldsymbol{r}}')\,\mathrm{d}\Omega$ $\quad D(\vec{\boldsymbol{r}}')$ 为电偶层强度

(§2-1 p12 例题3)

均匀电场 $\vec{\boldsymbol{E}}_0$ 的电势： $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{E}}_0\cdot\vec{\boldsymbol{r}} + C$ (易验证：$-\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{E}}_0$)

(C 为 $\vec{\boldsymbol{r}} = 0$ 处的电势)

4. 电势表达式

4. 电势表达式 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \dfrac{\rho(\vec{\boldsymbol{R}})}{R}\,\mathrm{d}\tau'$， $\rho = \rho_f + \rho_p$，$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$

4. 电势表达式 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \dfrac{\rho(\vec{\boldsymbol{R}})}{R}\,\mathrm{d}\tau'$， $\rho = \rho_f + \rho_p$，$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$

如其中 ρ_f 或 ρ_p 未知，能否求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ ？如何求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ ？

4. 电势表达式 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{R}})}{R}\mathrm{d}\tau'$， $\rho=\rho_f+\rho_p$，$\vec{\boldsymbol{R}}=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'$

如其中 ρ_f 或 ρ_p 未知，能否求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$？如何求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$？

问题： (a) 一般情况下，如何求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$?

4. 电势表达式 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \dfrac{\rho(\vec{\boldsymbol{R}})}{R}\,\mathrm{d}\tau'$， $\rho = \rho_f + \rho_p$， $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$

如其中 ρ_f 或 ρ_p 未知，能否求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ ？如何求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ ？

问题： (a) 一般情况下，如何求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$?

(b) 什么条件下，可唯一确定 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$?

4. 电势表达式 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \dfrac{\rho(\vec{\boldsymbol{R}})}{R}\mathrm{d}\tau'$， $\rho = \rho_f + \rho_p$， $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'$

如其中 ρ_f 或 ρ_p 未知，能否求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ ？如何求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ ？

问题： (a) 一般情况下，如何求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$？ $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ 的微分方程、边值关系

(b) 什么条件下，可唯一确定 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$？

4. 电势表达式 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{R}})}{R}\,\mathrm{d}\tau'$， $\rho = \rho_f + \rho_p$， $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$

如其中 ρ_f 或 ρ_p 未知，能否求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ ？如何求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ ？

问题： (a) 一般情况下，如何求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$? $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ 的微分方程、边值关系

(b) 什么条件下，可唯一确定 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$? 唯一性定理

4. 电势表达式 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\dfrac{\rho(\vec{\boldsymbol{R}})}{R}\,\mathrm{d}\tau'$，　$\rho=\rho_f+\rho_p$，$\vec{\boldsymbol{R}}=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'$

如其中 ρ_f 或 ρ_p 未知，能否求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$？如何求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$？

问题：　(a) 一般情况下，如何求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$？　　$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ 的微分方程、边值关系

(b) 什么条件下，可唯一确定 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$？　　唯一性定理

二、静电势的微分方程与边值关系

4. 电势表达式 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \dfrac{\rho(\vec{\boldsymbol{R}})}{R}\,\mathrm{d}\tau'$， $\rho = \rho_f + \rho_p$， $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$

如其中 ρ_f 或 ρ_p 未知，能否求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ ？如何求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ ？

问题： (a) 一般情况下，如何求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$？ $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ 的微分方程、边值关系

(b) 什么条件下，可唯一确定 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$？ 唯一性定理

二、静电势的微分方程与边值关系

出发点：

4. 电势表达式 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{R}})}{R}\,\mathrm{d}\tau'$，　$\rho=\rho_f+\rho_p$，$\vec{\boldsymbol{R}}=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'$

如其中 ρ_f 或 ρ_p 未知，能否求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ ？如何求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ ？

问题：　(a) 一般情况下，如何求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$？　　$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ 的微分方程、边值关系

(b) 什么条件下，可唯一确定 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$？　　唯一性定理

二、静电势的微分方程与边值关系

出发点：
$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}}=\rho_f\\[1ex]\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}=0\end{cases}$$

4. 电势表达式 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{R}})}{R}\,\mathrm{d}\tau'$， $\rho = \rho_f + \rho_p$， $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$

如其中 ρ_f 或 ρ_p 未知，能否求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ ？如何求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ ？

问题： (a) 一般情况下，如何求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$？ $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ 的微分方程、边值关系

(b) 什么条件下，可唯一确定 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$？ 唯一性定理

二、静电势的微分方程与边值关系

出发点：
$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}} = \rho_f \\ \nabla\times\vec{\boldsymbol{E}} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}_2 - \vec{\boldsymbol{D}}_1) = \sigma_f \\ \vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{E}}_2 - \vec{\boldsymbol{E}}_1) = 0 \end{cases}$$

4. 电势表达式 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{R}})}{R}\,\mathrm{d}\tau'$，　$\rho = \rho_f + \rho_p$，$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'$

如其中 ρ_f 或 ρ_p 未知，能否求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ ？如何求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ ？

问题：　(a) 一般情况下，如何求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$？　　$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ 的微分方程、边值关系

(b) 什么条件下，可唯一确定 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$？　　唯一性定理

二、静电势的微分方程与边值关系

出发点：
$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}} = \rho_f \\ \nabla\times\vec{\boldsymbol{E}} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}_2 - \vec{\boldsymbol{D}}_1) = \sigma_f \\ \vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{E}}_2 - \vec{\boldsymbol{E}}_1) = 0 \end{cases}$$

化为静电势满足的微分方程与边值关系

4. 电势表达式 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{R}})}{R}\mathrm{d}\tau'$， $\rho = \rho_f + \rho_p$， $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'$

如其中 ρ_f 或 ρ_p 未知，能否求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ ？如何求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ ？

问题： (a) 一般情况下，如何求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$？ $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ 的微分方程、边值关系

(b) 什么条件下，可唯一确定 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$？ 唯一性定理

二、静电势的微分方程与边值关系

出发点： $\begin{cases} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}} = \rho_f \\ \nabla\times\vec{\boldsymbol{E}} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}_2 - \vec{\boldsymbol{D}}_1) = \sigma_f \\ \vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{E}}_2 - \vec{\boldsymbol{E}}_1) = 0 \end{cases}$ 化为静电势满足的微分方程与边值关系

1. 静电势满足的微分方程

对线性各向同性分区均匀介质：

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}} = \rho_f \\ \vec{\boldsymbol{D}} = \epsilon\vec{\boldsymbol{E}} \\ \vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi \end{cases}$$

4. 电势表达式 $\varphi(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \dfrac{\rho(\vec{R})}{R}\mathrm{d}\tau'$， $\rho = \rho_f + \rho_p$， $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$

如其中 ρ_f 或 ρ_p 未知，能否求解 $\varphi(\vec{r})$ ？如何求解 $\varphi(\vec{r})$ ？

问题： (a) 一般情况下，如何求解 $\varphi(\vec{r})$？ $\varphi(\vec{r})$ 的微分方程、边值关系

(b) 什么条件下，可唯一确定 $\varphi(\vec{r})$？ 唯一性定理

二、静电势的微分方程与边值关系

出发点：

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D} = \rho_f \\ \nabla\times\vec{E} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{n}\cdot(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f \\ \vec{n}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \end{cases}$$

化为静电势满足的微分方程与边值关系

1. 静电势满足的微分方程

对线性各向同性分区均匀介质：

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D} = \rho_f \\ \vec{D} = \epsilon\vec{E} \\ \vec{E} = -\nabla\varphi \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \nabla\cdot(\underbrace{-\epsilon\nabla\varphi}_{\vec{D}}) = \rho_f$$

4. 电势表达式 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{R}})}{R}\,\mathrm{d}\tau'$，　$\rho = \rho_f + \rho_p$，$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'$

如其中 ρ_f 或 ρ_p 未知，能否求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ ？如何求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ ？

问题：(a) 一般情况下，如何求解 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$？　$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ 的微分方程、边值关系

(b) 什么条件下，可唯一确定 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$？　唯一性定理

二、静电势的微分方程与边值关系

出发点：$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}} = \rho_f \\ \nabla\times\vec{\boldsymbol{E}} = 0 \end{cases}$　$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}_2 - \vec{\boldsymbol{D}}_1) = \sigma_f \\ \vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{E}}_2 - \vec{\boldsymbol{E}}_1) = 0 \end{cases}$　化为静电势满足的微分方程与边值关系

1. 静电势满足的微分方程

对线性各向同性分区均匀介质：

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}} = \rho_f \\ \vec{\boldsymbol{D}} = \epsilon\vec{\boldsymbol{E}} \\ \vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi \end{cases} \Longrightarrow \nabla\cdot(\underbrace{-\epsilon\nabla\varphi}_{\vec{\boldsymbol{D}}}) = \rho_f \Longrightarrow \boxed{\nabla^2\varphi = -\rho_f/\epsilon}$$

4. 电势表达式 $\varphi(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \dfrac{\rho(\vec{R})}{R}\,\mathrm{d}\tau'$， $\rho = \rho_f + \rho_p$，$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$

如其中 ρ_f 或 ρ_p 未知，能否求解 $\varphi(\vec{r})$ ？如何求解 $\varphi(\vec{r})$ ？

问题：(a) 一般情况下，如何求解 $\varphi(\vec{r})$？ $\varphi(\vec{r})$ 的微分方程、边值关系

(b) 什么条件下，可唯一确定 $\varphi(\vec{r})$？ 唯一性定理

二、静电势的微分方程与边值关系

出发点：$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D} = \rho_f \\ \nabla\times\vec{E} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \vec{n}\cdot(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f \\ \vec{n}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \end{cases}$ 化为静电势满足的微分方程与边值关系

1. 静电势满足的微分方程

对线性各向同性分区均匀介质：

泊松方程 (Poisson'e equation)

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D} = \rho_f \\ \vec{D} = \epsilon\vec{E} \\ \vec{E} = -\nabla\varphi \end{cases} \Longrightarrow \nabla\cdot(\underbrace{-\epsilon\nabla\varphi}_{\vec{D}}) = \rho_f \Longrightarrow \boxed{\nabla^2\varphi = -\rho_f/\epsilon}$$

对线性各向同性分区均匀介质，静电势在各均匀区满足泊松方程

$$\nabla^2\varphi = -\rho_f/\epsilon \qquad \text{泊松方程 (Poisson's equation)}$$

对线性各向同性分区均匀介质，静电势在各均匀区满足泊松方程

$$\nabla^2\varphi = -\rho_f/\epsilon$$ 泊松方程 (Poisson's equation)

如果某均匀区域没有自由电荷密度 $\rho_f = 0$，则静电势满足

$$\nabla^2\varphi = 0$$ 拉普拉斯方程 (Laplace's equation)

对线性各向同性分区均匀介质，静电势在各均匀区满足泊松方程

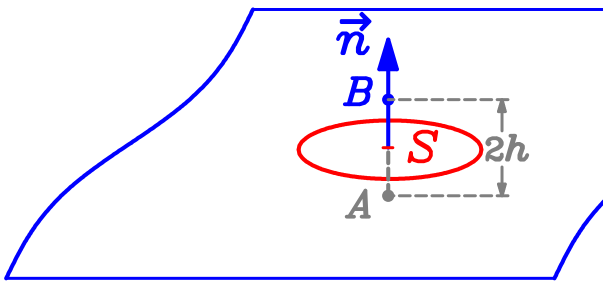
$$\nabla^2\varphi = -\rho_f/\epsilon \qquad \text{泊松方程 (Poisson's equation)}$$

如果某均匀区域没有自由电荷密度 $\rho_f = 0$，则静电势满足

$$\nabla^2\varphi = 0 \qquad \text{拉普拉斯方程 (Laplace's equation)}$$

2. 边值关系

   (a) 介质－介质界面



对线性各向同性分区均匀介质，静电势在各均匀区满足泊松方程

$$\nabla^2\varphi = -\rho_f/\epsilon$$ 泊松方程 (Poisson's equation)

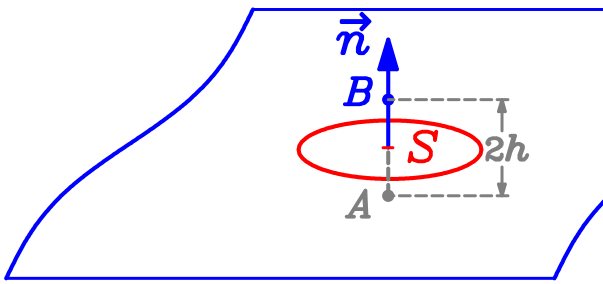
如果某均匀区域没有自由电荷密度 $\rho_f = 0$，则静电势满足

$$\nabla^2\varphi = 0$$ 拉普拉斯方程 (Laplace's equation)

2. 边值关系

(a) 介质 – 介质界面

如图 A 点在介质 1，B 点在介质 2，需要求 $h \to 0$ 时 A 和 B 两点电势之关系



对线性各向同性分区均匀介质，静电势在各均匀区满足泊松方程

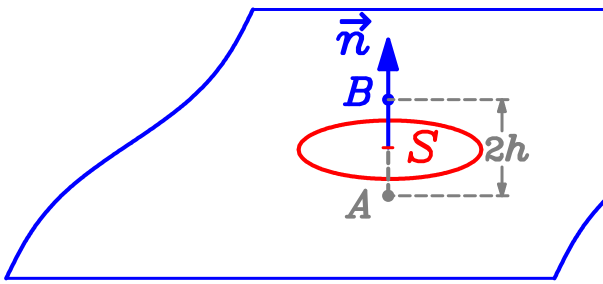
$$\nabla^2\varphi = -\rho_f/\epsilon \qquad \text{泊松方程 (Poisson's equation)}$$

如果某均匀区域没有自由电荷密度 $\rho_f = 0$，则静电势满足

$$\nabla^2\varphi = 0 \qquad \text{拉普拉斯方程 (Laplace's equation)}$$

2. 边值关系

(a) 介质–介质界面



如图 A 点在介质 1，B 点在介质 2，需要求 $h \to 0$ 时 A 和 B 两点电势之关系　　在界面上挖去一小片面积 S，

对线性各向同性分区均匀介质，静电势在各均匀区满足泊松方程

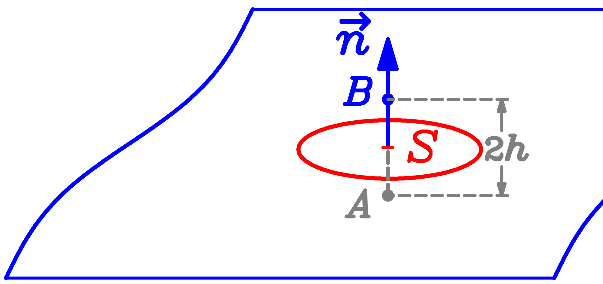
$$\nabla^2\varphi = -\rho_f/\epsilon \qquad \text{泊松方程 (Poisson's equation)}$$

如果某均匀区域没有自由电荷密度 $\rho_f = 0$，则静电势满足

$$\nabla^2\varphi = 0 \qquad \text{拉普拉斯方程 (Laplace's equation)}$$

2. 边值关系

(a) 介质 – 介质界面



如图 A 点在介质 1，B 点在介质 2，需要求 $h \to 0$ 时

A 和 B 两点电势之关系　　在界面上挖去一小片面积 S，

A 点的电势为 S 上的电荷之贡献 $\varphi_A^{(S)}$ 和其他部分的电荷贡献 $\varphi_A^{(\text{other})}$

$$\varphi_A = \varphi_A^{(S)} + \varphi_A^{(\text{other})}$$

对线性各向同性分区均匀介质，静电势在各均匀区满足泊松方程

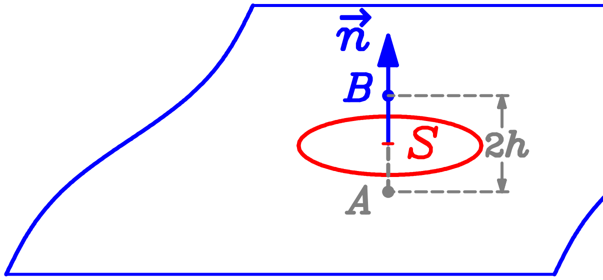
$$\nabla^2\varphi = -\rho_f/\epsilon$$ 泊松方程 (Poisson's equation)

如果某均匀区域没有自由电荷密度 $\rho_f = 0$，则静电势满足

$$\nabla^2\varphi = 0$$ 拉普拉斯方程 (Laplace's equation)

2. 边值关系

(a) 介质 – 介质界面



如图 A 点在介质 1，B 点在介质 2，需要求 $h \to 0$ 时 A 和 B 两点电势之关系　　在界面上挖去一小片面积 S，

A 点的电势为 S 上的电荷之贡献 $\varphi_A^{(S)}$ 和其他部分的电荷贡献 $\varphi_A^{(\text{other})}$

$\varphi_A = \varphi_A^{(S)} + \varphi_A^{(\text{other})}$　　同理　$\varphi_B = \varphi_B^{(S)} + \varphi_B^{(\text{other})}$

对线性各向同性分区均匀介质，静电势在各均匀区满足泊松方程

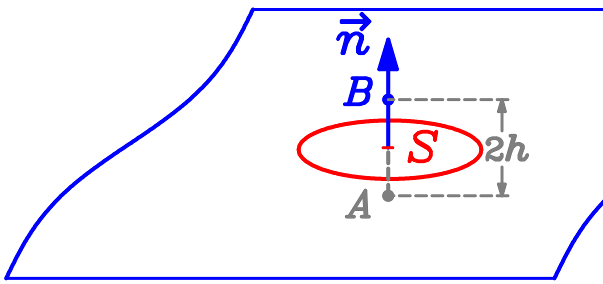
$$\nabla^2\varphi = -\rho_f/\epsilon \qquad \text{泊松方程 (Poisson's equation)}$$

如果某均匀区域没有自由电荷密度 $\rho_f = 0$，则静电势满足

$$\nabla^2\varphi = 0 \qquad \text{拉普拉斯方程 (Laplace's equation)}$$

2. 边值关系

(a) 介质 – 介质界面



如图A 点在介质 1，B 点在介质 2，需要求 $h \to 0$ 时

A 和B 两点电势之关系　　在界面上挖去一小片面积 S，

A 点的电势为 S 上的电荷之贡献 $\varphi_A^{(S)}$ 和其他部分的电荷贡献 $\varphi_A^{(\text{other})}$

$\varphi_A = \varphi_A^{(S)} + \varphi_A^{(\text{other})}$　　同理　$\varphi_B = \varphi_B^{(S)} + \varphi_B^{(\text{other})}$　　当 $h \to 0$ 时，有：$\varphi_A^{(\text{other})} = \varphi_B^{(\text{other})}$

对线性各向同性分区均匀介质，静电势在各均匀区满足泊松方程

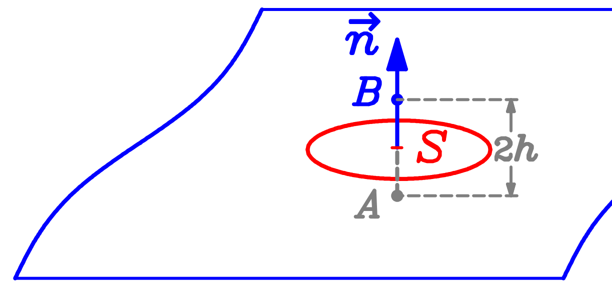
$$\nabla^2\varphi = -\rho_f/\epsilon \qquad \text{泊松方程 (Poisson's equation)}$$

如果某均匀区域没有自由电荷密度 $\rho_f = 0$，则静电势满足

$$\nabla^2\varphi = 0 \qquad \text{拉普拉斯方程 (Laplace's equation)}$$

2. 边值关系

(a) 介质–介质界面



如图 A 点在介质 1，B 点在介质 2，需要求 $h \to 0$ 时

A 和 B 两点电势之关系　　在界面上挖去一小片面积 S，

A 点的电势为 S 上的电荷之贡献 $\varphi_A^{(S)}$ 和其他部分的电荷贡献 $\varphi_A^{(\text{other})}$

$\varphi_A = \varphi_A^{(S)} + \varphi_A^{(\text{other})}$　　同理　$\varphi_B = \varphi_B^{(S)} + \varphi_B^{(\text{other})}$　　当 $h \to 0$ 时，有：$\varphi_A^{(\text{other})} = \varphi_B^{(\text{other})}$

而：$\varphi_A^{(S)} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int_S \frac{\sigma_q\, \mathrm{d}\sigma}{r_1}$，　r_1 为 A 到 S 上的小面元 $\mathrm{d}\sigma$ 的距离，σ_q 为 S 上的面电荷密度

对线性各向同性分区均匀介质，静电势在各均匀区满足泊松方程

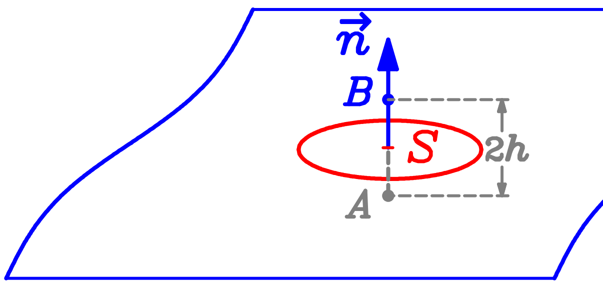
$$\nabla^2\varphi = -\rho_f/\epsilon \qquad \text{泊松方程 (Poisson's equation)}$$

如果某均匀区域没有自由电荷密度 $\rho_f = 0$，则静电势满足

$$\nabla^2\varphi = 0 \qquad \text{拉普拉斯方程 (Laplace's equation)}$$

2. 边值关系

(a) 介质 – 介质界面



如图 A 点在介质 1，B 点在介质 2，需要求 $h \to 0$ 时 A 和 B 两点电势之关系　　在界面上挖去一小片面积 S，

A 点的电势为 S 上的电荷之贡献 $\varphi_A^{(S)}$ 和其他部分的电荷贡献 $\varphi_A^{(\text{other})}$

$\varphi_A = \varphi_A^{(S)} + \varphi_A^{(\text{other})}$　　同理　$\varphi_B = \varphi_B^{(S)} + \varphi_B^{(\text{other})}$　　当 $h \to 0$ 时，有：$\varphi_A^{(\text{other})} = \varphi_B^{(\text{other})}$

而：$\varphi_A^{(S)} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int_S \dfrac{\sigma_q\,\mathrm{d}\sigma}{r_1}$，　r_1 为 A 到 S 上的小面元 $\mathrm{d}\sigma$ 的距离，σ_q 为 S 上的面电荷密度

S 很小，故：$\varphi_A^{(S)} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int_S \dfrac{\sigma_q\,\mathrm{d}\sigma}{r_1}$

对线性各向同性分区均匀介质，静电势在各均匀区满足泊松方程

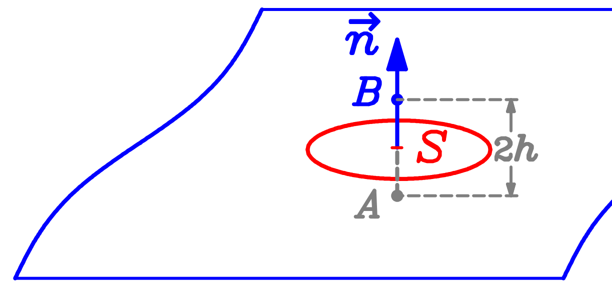
$$\nabla^2\varphi = -\rho_f/\epsilon$$ 泊松方程 (Poisson's equation)

如果某均匀区域没有自由电荷密度 $\rho_f = 0$，则静电势满足

$$\nabla^2\varphi = 0$$ 拉普拉斯方程 (Laplace's equation)

2. 边值关系

(a) 介质–介质界面



如图A 点在介质 1，B 点在介质 2，需要求 $h \to 0$ 时 A 和B 两点电势之关系　　在界面上挖去一小片面积 S，

A 点的电势为 S 上的电荷之贡献 $\varphi_A^{(S)}$ 和其他部分的电荷贡献 $\varphi_A^{(\text{other})}$

$\varphi_A = \varphi_A^{(S)} + \varphi_A^{(\text{other})}$　　同理　$\varphi_B = \varphi_B^{(S)} + \varphi_B^{(\text{other})}$　　当 $h \to 0$ 时，有：$\varphi_A^{(\text{other})} = \varphi_B^{(\text{other})}$

而：$\varphi_A^{(S)} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int_S \dfrac{\sigma_q\,\mathrm{d}\sigma}{r_1}$，　r_1 为 A 到 S上的小面元 $\mathrm{d}\sigma$ 的距离，σ_q 为 S 上的面电荷密度

S 很小，故：$\varphi_A^{(S)} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int_S \dfrac{\sigma_q\,\mathrm{d}\sigma}{r_1} \sim \dfrac{\sigma_q S}{h} \sim \sigma_q \dfrac{S}{h^2} h$

对线性各向同性分区均匀介质，静电势在各均匀区满足泊松方程

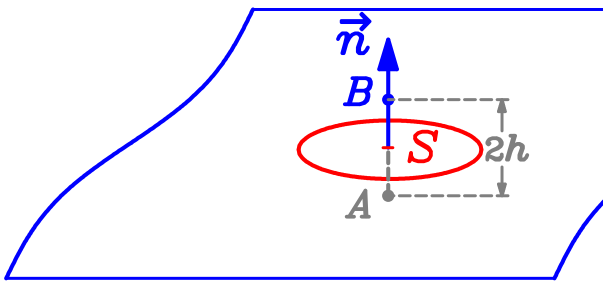
$$\nabla^2\varphi = -\rho_f/\epsilon \qquad \text{泊松方程 (Poisson's equation)}$$

如果某均匀区域没有自由电荷密度 $\rho_f = 0$，则静电势满足

$$\nabla^2\varphi = 0 \qquad \text{拉普拉斯方程 (Laplace's equation)}$$

2. 边值关系

(a) 介质 – 介质界面



如图A 点在介质 1，B 点在介质 2，需要求 $h \to 0$ 时

A 和B 两点电势之关系　　在界面上挖去一小片面积 S，

A 点的电势为 S 上的电荷之贡献 $\varphi_A^{(S)}$ 和其他部分的电荷贡献 $\varphi_A^{(\text{other})}$

$\varphi_A = \varphi_A^{(S)} + \varphi_A^{(\text{other})}$　　同理　$\varphi_B = \varphi_B^{(S)} + \varphi_B^{(\text{other})}$　　当 $h \to 0$ 时，有：$\varphi_A^{(\text{other})} = \varphi_B^{(\text{other})}$

而：$\varphi_A^{(S)} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int_S \dfrac{\sigma_q\,\mathrm{d}\sigma}{r_1}$，　r_1 为 A 到 S上的小面元 $\mathrm{d}\sigma$ 的距离，σ_q 为 S 上的面电荷密度

$$S \text{ 很小，故：} \varphi_A^{(S)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\sigma_q\,\mathrm{d}\sigma}{r_1} \sim \frac{\sigma_q S}{h} \sim \sigma_q \frac{S}{h^2} h \sim \sigma_q \lim_{h\to 0} h\,\Delta\Omega$$

对线性各向同性分区均匀介质，静电势在各均匀区满足泊松方程

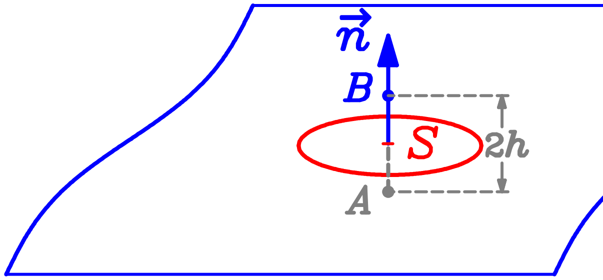
$$\nabla^2\varphi = -\rho_f/\epsilon \qquad \text{泊松方程 (Poisson's equation)}$$

如果某均匀区域没有自由电荷密度 $\rho_f = 0$，则静电势满足

$$\nabla^2\varphi = 0 \qquad \text{拉普拉斯方程 (Laplace's equation)}$$

2. 边值关系

(a) 介质–介质界面



如图A 点在介质 1，B 点在介质 2，需要求 $h \to 0$ 时

A 和B 两点电势之关系　　在界面上挖去一小片面积 S，

A 点的电势为 S 上的电荷之贡献 $\varphi_A^{(S)}$ 和其他部分的电荷贡献 $\varphi_A^{(\text{other})}$

$\varphi_A = \varphi_A^{(S)} + \varphi_A^{(\text{other})}$　　同理　$\varphi_B = \varphi_B^{(S)} + \varphi_B^{(\text{other})}$　　当 $h \to 0$ 时，有：$\varphi_A^{(\text{other})} = \varphi_B^{(\text{other})}$

而：$\varphi_A^{(S)} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int_S \dfrac{\sigma_q\,\mathrm{d}\sigma}{r_1}$，　r_1 为 A 到 S上的小面元 $\mathrm{d}\sigma$ 的距离，σ_q 为 S 上的面电荷密度

$$S \text{ 很小，故：} \varphi_A^{(S)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\sigma_q\,\mathrm{d}\sigma}{r_1} \sim \frac{\sigma_q S}{h} \sim \sigma_q \frac{S}{h^2} h \sim \sigma_q \lim_{h\to 0} h\,\Delta\Omega \sim \sigma_q \lim_{h\to 0} h\,2\pi = 0$$

对线性各向同性分区均匀介质，静电势在各均匀区满足泊松方程

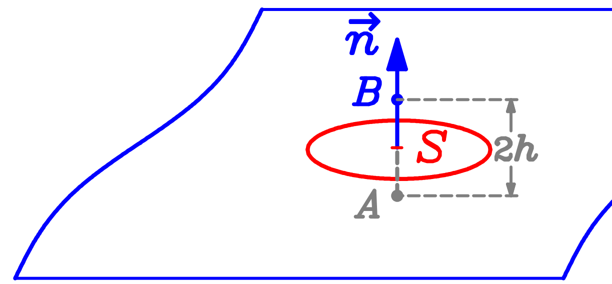
$$\nabla^2\varphi = -\rho_f/\epsilon$$ 泊松方程 (Poisson's equation)

如果某均匀区域没有自由电荷密度 $\rho_f = 0$，则静电势满足

$$\nabla^2\varphi = 0$$ 拉普拉斯方程 (Laplace's equation)

2. 边值关系

(a) 介质 – 介质界面



如图 A 点在介质 1，B 点在介质 2，需要求 $h \to 0$ 时 A 和 B 两点电势之关系　　在界面上挖去一小片面积 S，

A 点的电势为 S 上的电荷之贡献 $\varphi_A^{(S)}$ 和其他部分的电荷贡献 $\varphi_A^{(\text{other})}$

$\varphi_A = \varphi_A^{(S)} + \varphi_A^{(\text{other})}$　　同理　$\varphi_B = \varphi_B^{(S)} + \varphi_B^{(\text{other})}$　　当 $h \to 0$ 时，有：$\varphi_A^{(\text{other})} = \varphi_B^{(\text{other})}$

而：$\varphi_A^{(S)} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int_S \frac{\sigma_q\,\mathrm{d}\sigma}{r_1}$，　r_1 为 A 到 S上的小面元 $\mathrm{d}\sigma$ 的距离，σ_q 为 S 上的面电荷密度

S 很小，故：$$\varphi_A^{(S)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\sigma_q\,\mathrm{d}\sigma}{r_1} \sim \frac{\sigma_q S}{h} \sim \sigma_q \frac{S}{h^2} h \sim \sigma_q \lim_{h\to 0} h\,\Delta\Omega \sim \sigma_q \lim_{h\to 0} h\,2\pi = 0$$

$\Delta\Omega$ 为 S 对 A 点所张的立体角

对线性各向同性分区均匀介质，静电势在各均匀区满足泊松方程

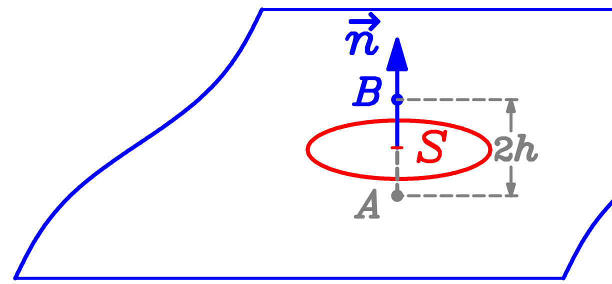
$$\nabla^2\varphi = -\rho_f/\epsilon$$ 泊松方程 (Poisson's equation)

如果某均匀区域没有自由电荷密度 $\rho_f = 0$，则静电势满足

$$\nabla^2\varphi = 0$$ 拉普拉斯方程 (Laplace's equation)

2. 边值关系

(a) 介质–介质界面



如图 A 点在介质 1，B 点在介质 2，需要求 $h \to 0$ 时 A 和 B 两点电势之关系　　在界面上挖去一小片面积 S，

A 点的电势为 S 上的电荷之贡献 $\varphi_A^{(S)}$ 和其他部分的电荷贡献 $\varphi_A^{(\text{other})}$

$\varphi_A = \varphi_A^{(S)} + \varphi_A^{(\text{other})}$　　同理　$\varphi_B = \varphi_B^{(S)} + \varphi_B^{(\text{other})}$　　当 $h \to 0$ 时，有：$\varphi_A^{(\text{other})} = \varphi_B^{(\text{other})}$

而：$\varphi_A^{(S)} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int_S \frac{\sigma_q\, \mathrm{d}\sigma}{r_1}$，　r_1 为 A 到 S 上的小面元 $\mathrm{d}\sigma$ 的距离，σ_q 为 S 上的面电荷密度

S 很小，故：$\varphi_A^{(S)} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int_S \frac{\sigma_q\, \mathrm{d}\sigma}{r_1} \sim \frac{\sigma_q S}{h} \sim \sigma_q \frac{S}{h^2} h \sim \sigma_q \lim_{h\to 0} h\, \Delta\Omega \sim \sigma_q \lim_{h\to 0} h\, 2\pi = 0$

$\Delta\Omega$ 为 S 对 A 点所张的立体角

同理：$\varphi_B^{(S)} = 0$，故：$\varphi_A^{(S)} = \varphi_B^{(S)} = 0$

所以，在不同介质界面上，静电势连续：$\varphi_1 = \varphi_2$。

所以，在不同介质界面上，静电势连续：$\varphi_1 = \varphi_2$。

讨论：

所以，在不同介质界面上，静电势连续：$\varphi_1 = \varphi_2$。

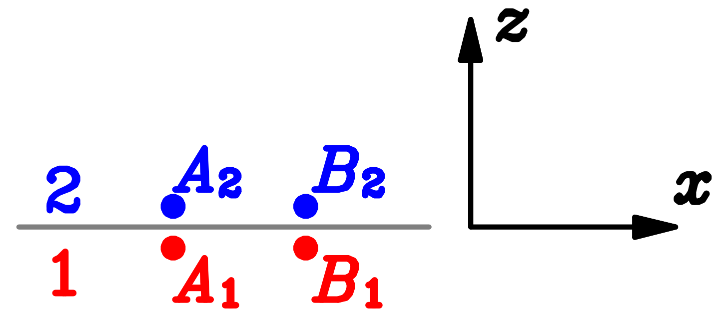
讨论：

(i) $\varphi_1 = \varphi_2$ 可以替代 $\vec{\boldsymbol{E}}_{1\tau} = \vec{\boldsymbol{E}}_{2\tau}$（界面上电场切向连续）

所以，在不同介质界面上，静电势连续：$\varphi_1 = \varphi_2$。

讨论：

(i) $\varphi_1 = \varphi_2$ 可以替代 $\vec{\boldsymbol{E}}_{1\tau} = \vec{\boldsymbol{E}}_{2\tau}$（界面上电场切|

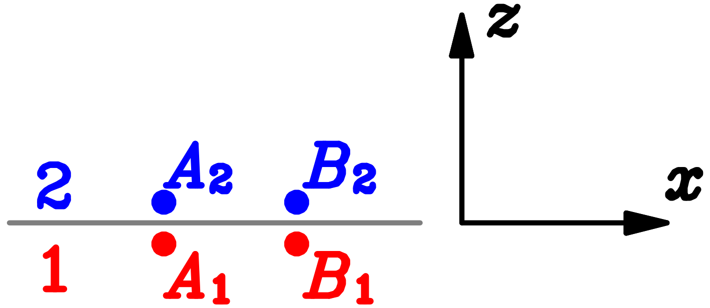


所以，在不同介质界面上，静电势连续：$\varphi_1 = \varphi_2$。

讨论：

(i) $\varphi_1 = \varphi_2$ 可以替代 $\vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{2\tau}$（界面上电场切|

如图: 由 $\varphi_{A1} = \varphi_{A2}$ 和$\varphi_{B1} = \varphi_{B2}$ 得



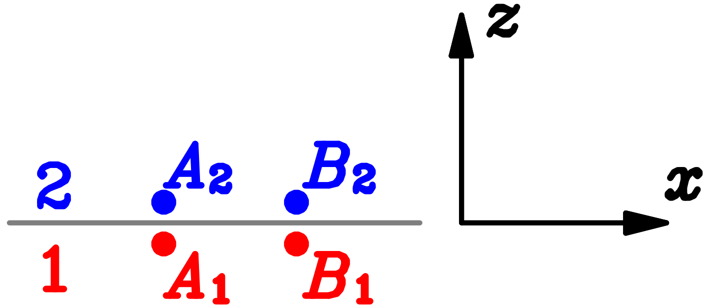
所以，在不同介质界面上，静电势连续：$\varphi_1 = \varphi_2$。

讨论：

(i) $\varphi_1 = \varphi_2$ 可以替代 $\vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{2\tau}$（界面上电场切|

如图: 由 $\varphi_{A1} = \varphi_{A2}$ 和$\varphi_{B1} = \varphi_{B2}$ 得

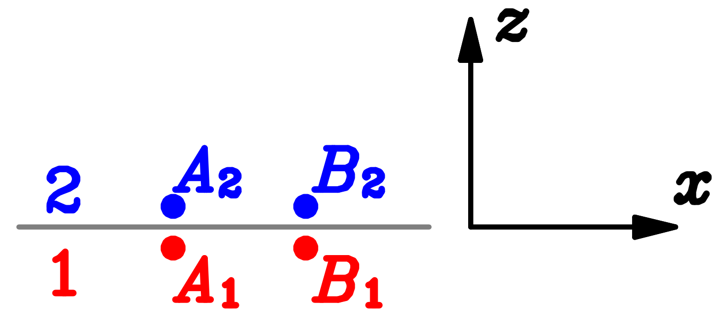
$\varphi_{B1} - \varphi_{A1} = \varphi_{B2} - \varphi_{A2}$，即



所以，在不同介质界面上，静电势连续：$\varphi_1 = \varphi_2$。

讨论：

(i) $\varphi_1 = \varphi_2$ 可以替代 $\vec{\boldsymbol{E}}_{1\tau} = \vec{\boldsymbol{E}}_{2\tau}$（界面上电场切



如图: 由 $\varphi_{A1} = \varphi_{A2}$ 和$\varphi_{B1} = \varphi_{B2}$ 得

$\varphi_{B1} - \varphi_{A1} = \varphi_{B2} - \varphi_{A2}$，即

$\vec{\boldsymbol{E}}_1 \cdot l\,\hat{\boldsymbol{e}}_x = \vec{\boldsymbol{E}}_2 \cdot l\,\hat{\boldsymbol{e}}_x \quad \Longrightarrow \quad E_{1x} = E_{2x}$，类似可得，$E_{1y} = E_{2y}$

所以，在不同介质界面上，静电势连续：$\varphi_1 = \varphi_2$。

讨论：

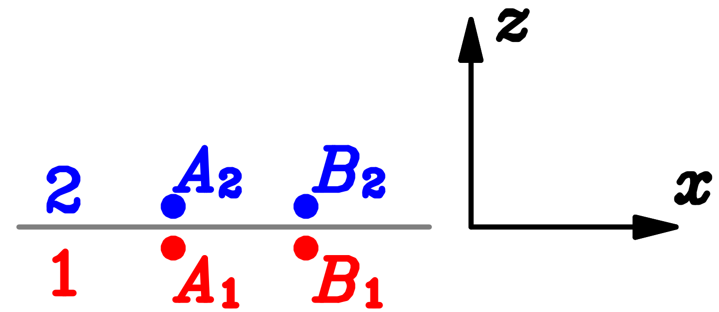
(i) $\varphi_1 = \varphi_2$ 可以替代 $\vec{\boldsymbol{E}}_{1\tau} = \vec{\boldsymbol{E}}_{2\tau}$（界面上电场切|

如图: 由 $\varphi_{A1} = \varphi_{A2}$ 和$\varphi_{B1} = \varphi_{B2}$ 得

$\varphi_{B1} - \varphi_{A1} = \varphi_{B2} - \varphi_{A2}$，即

$\vec{\boldsymbol{E}}_1 \cdot l\,\hat{\boldsymbol{e}}_x = \vec{\boldsymbol{E}}_2 \cdot l\,\hat{\boldsymbol{e}}_x \quad \Longrightarrow \quad E_{1x} = E_{2x}$，类似可得，$E_{1y} = E_{2y}$

也即：$\vec{\boldsymbol{E}}_{1\tau} = \vec{\boldsymbol{E}}_{2\tau}$

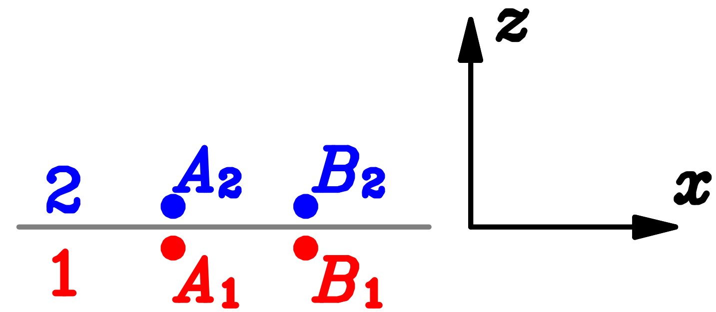


所以，在不同介质界面上，静电势连续：$\varphi_1 = \varphi_2$。

讨论：

(i) $\varphi_1 = \varphi_2$ 可以替代 $\vec{\boldsymbol{E}}_{1\tau} = \vec{\boldsymbol{E}}_{2\tau}$（界面上电场切|

如图: 由 $\varphi_{A1} = \varphi_{A2}$ 和$\varphi_{B1} = \varphi_{B2}$ 得



$\varphi_{B1} - \varphi_{A1} = \varphi_{B2} - \varphi_{A2}$，即

$\vec{\boldsymbol{E}}_1 \cdot l\,\hat{\boldsymbol{e}}_x = \vec{\boldsymbol{E}}_2 \cdot l\,\hat{\boldsymbol{e}}_x \quad \Longrightarrow \quad E_{1x} = E_{2x}$，类似可得，$E_{1y} = E_{2y}$

也即：$\vec{\boldsymbol{E}}_{1\tau} = \vec{\boldsymbol{E}}_{2\tau}$

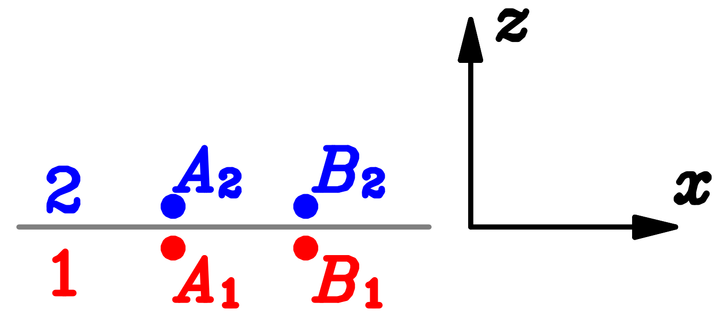
(ii) 在电偶层两边，电势不连续，这时有

所以，在不同介质界面上，静电势连续：$\varphi_1 = \varphi_2$。

讨论：

(i) $\varphi_1 = \varphi_2$ 可以替代 $\vec{\boldsymbol{E}}_{1\tau} = \vec{\boldsymbol{E}}_{2\tau}$（界面上电场切|

如图: 由 $\varphi_{A1} = \varphi_{A2}$ 和$\varphi_{B1} = \varphi_{B2}$ 得



$\varphi_{B1} - \varphi_{A1} = \varphi_{B2} - \varphi_{A2}$，即

$\vec{\boldsymbol{E}}_1 \cdot l\,\hat{\boldsymbol{e}}_x = \vec{\boldsymbol{E}}_2 \cdot l\,\hat{\boldsymbol{e}}_x \quad \Longrightarrow \quad E_{1x} = E_{2x}$，类似可得，$E_{1y} = E_{2y}$

也即：$\vec{\boldsymbol{E}}_{1\tau} = \vec{\boldsymbol{E}}_{2\tau}$

(ii) 在电偶层两边，电势不连续，这时有

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{D_e}{\epsilon_0}$$

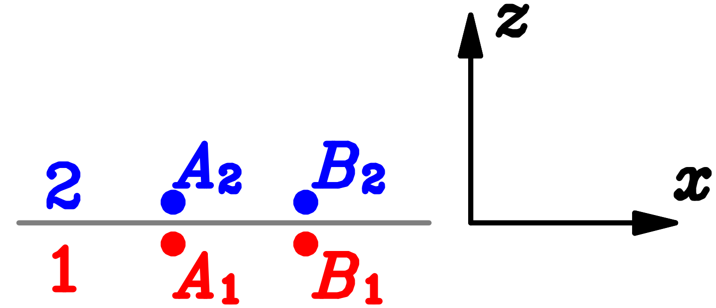
D_e 为电偶层强度 (见: §2-1 p13 例题 4)

所以，在不同介质界面上，静电势连续：$\varphi_1 = \varphi_2$。

讨论：

(i) $\varphi_1 = \varphi_2$ 可以替代 $\vec{\boldsymbol{E}}_{1\tau} = \vec{\boldsymbol{E}}_{2\tau}$（界面上电场切

如图: 由 $\varphi_{A1} = \varphi_{A2}$ 和$\varphi_{B1} = \varphi_{B2}$ 得



$\varphi_{B1} - \varphi_{A1} = \varphi_{B2} - \varphi_{A2}$，即

$\vec{\boldsymbol{E}}_1 \cdot l\,\hat{\boldsymbol{e}}_x = \vec{\boldsymbol{E}}_2 \cdot l\,\hat{\boldsymbol{e}}_x \quad\Longrightarrow\quad E_{1x} = E_{2x}$，类似可得，$E_{1y} = E_{2y}$

也即：$\vec{\boldsymbol{E}}_{1\tau} = \vec{\boldsymbol{E}}_{2\tau}$

(ii) 在电偶层两边，电势不连续，这时有

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{D_e}{\epsilon_0}$$

D_e 为电偶层强度 (见: §2-1 p13 例题 4)

另外，从 $\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}_2 - \vec{\boldsymbol{D}}_1) = \sigma_f$ 和 $\vec{\boldsymbol{D}} = -\epsilon\nabla\varphi$ 易得

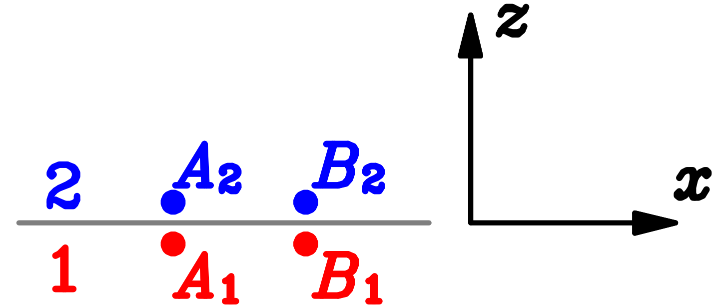
$$\epsilon_2 \underbrace{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla\varphi_2}_{\text{方向导数}} - \epsilon_1 \underbrace{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla\varphi_1}_{\text{方向导数}} = -\sigma_f$$

所以，在不同介质界面上，静电势连续：$\varphi_1 = \varphi_2$。

讨论：

(i) $\varphi_1 = \varphi_2$ 可以替代 $\vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{2\tau}$（界面上电场切

如图: 由 $\varphi_{A1} = \varphi_{A2}$ 和$\varphi_{B1} = \varphi_{B2}$ 得



$\varphi_{B1} - \varphi_{A1} = \varphi_{B2} - \varphi_{A2}$，即

$\vec{E}_1 \cdot l\,\hat{e}_x = \vec{E}_2 \cdot l\,\hat{e}_x \quad \Longrightarrow \quad E_{1x} = E_{2x}$，类似可得，$E_{1y} = E_{2y}$

也即：$\vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{2\tau}$

(ii) 在电偶层两边，电势不连续，这时有

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{D_e}{\epsilon_0}$$

D_e 为电偶层强度 (见: §2-1 p13 例题 4)

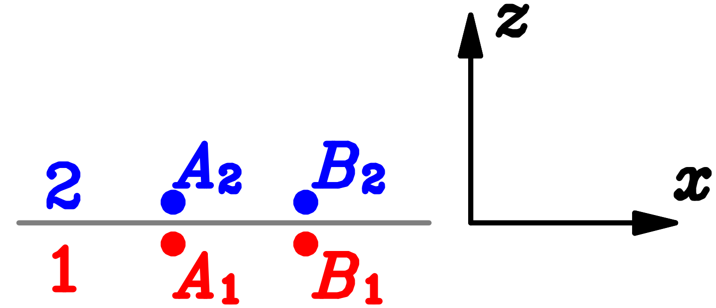
另外，从 $\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f$ 和 $\vec{D} = -\epsilon \nabla \varphi$ 易得

$$\epsilon_2 \underbrace{\vec{n} \cdot \nabla \varphi_2}_{\text{方向导数}} - \epsilon_1 \underbrace{\vec{n} \cdot \nabla \varphi_1}_{\text{方向导数}} = -\sigma_f \quad \Longrightarrow$$

所以，在不同介质界面上，静电势连续：$\varphi_1 = \varphi_2$。

讨论：

(i) $\varphi_1 = \varphi_2$ 可以替代 $\vec{\boldsymbol{E}}_{1\tau} = \vec{\boldsymbol{E}}_{2\tau}$（界面上电场切



如图: 由 $\varphi_{A1} = \varphi_{A2}$ 和$\varphi_{B1} = \varphi_{B2}$ 得

$\varphi_{B1} - \varphi_{A1} = \varphi_{B2} - \varphi_{A2}$，即

$\vec{\boldsymbol{E}}_1 \cdot l\,\hat{\boldsymbol{e}}_x = \vec{\boldsymbol{E}}_2 \cdot l\,\hat{\boldsymbol{e}}_x \quad \Longrightarrow \quad E_{1x} = E_{2x}$，类似可得，$E_{1y} = E_{2y}$

也即：$\vec{\boldsymbol{E}}_{1\tau} = \vec{\boldsymbol{E}}_{2\tau}$

(ii) 在电偶层两边，电势不连续，这时有

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{D_e}{\epsilon_0}$$

D_e 为电偶层强度 (见: §2-1 p13 例题 4)

另外，从 $\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}_2 - \vec{\boldsymbol{D}}_1) = \sigma_f$ 和 $\vec{\boldsymbol{D}} = -\epsilon \nabla \varphi$ 易得

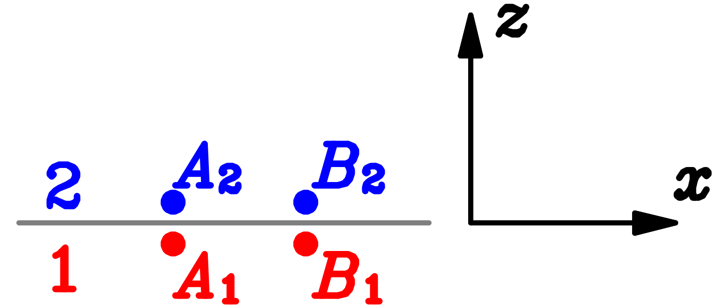
$$\epsilon_2 \underbrace{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla \varphi_2}_{\text{方向导数}} - \epsilon_1 \underbrace{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla \varphi_1}_{\text{方向导数}} = -\sigma_f \quad \Longrightarrow \quad \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\sigma_f$$

所以，在不同介质界面上，静电势连续：$\varphi_1 = \varphi_2$。

讨论：

(i) $\varphi_1 = \varphi_2$ 可以替代 $\vec{\boldsymbol{E}}_{1\tau} = \vec{\boldsymbol{E}}_{2\tau}$（界面上电场切|

如图：由 $\varphi_{A1} = \varphi_{A2}$ 和$\varphi_{B1} = \varphi_{B2}$ 得



$\varphi_{B1} - \varphi_{A1} = \varphi_{B2} - \varphi_{A2}$，即

$\vec{\boldsymbol{E}}_1 \cdot l\,\hat{\boldsymbol{e}}_x = \vec{\boldsymbol{E}}_2 \cdot l\,\hat{\boldsymbol{e}}_x \quad \Longrightarrow \quad E_{1x} = E_{2x}$，类似可得，$E_{1y} = E_{2y}$

也即：$\vec{\boldsymbol{E}}_{1\tau} = \vec{\boldsymbol{E}}_{2\tau}$

(ii) 在电偶层两边，电势不连续，这时有

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{D_e}{\epsilon_0}$$

D_e 为电偶层强度 (见: §2-1 p13 例题 4)

另外，从 $\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}_2 - \vec{\boldsymbol{D}}_1) = \sigma_f$ 和 $\vec{\boldsymbol{D}} = -\epsilon\nabla\varphi$ 易得

$$\epsilon_2 \underbrace{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla\varphi_2}_{\text{方向导数}} - \epsilon_1 \underbrace{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla\varphi_1}_{\text{方向导数}} = -\sigma_f \quad \Longrightarrow \quad \epsilon_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = -\sigma_f$$

对电偶层两边，$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$，$\sigma_f = 0$，故有：$\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n} - \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} = 0$

(b) 介质 – 导体界面

(b) 介质 – 导体界面

静电问题中导体的特殊性：

(*b*) 介质 – 导体界面

静电问题中导体的特殊性：

(i) 导体内部无电场，$\vec{\boldsymbol{E}} = 0$，$\vec{\boldsymbol{D}} = \epsilon\vec{\boldsymbol{E}} = 0$

(b) 介质 – 导体界面

静电问题中导体的特殊性：

(i) 导体内部无电场，$\vec{\boldsymbol{E}} = 0$，$\vec{\boldsymbol{D}} = \epsilon \vec{\boldsymbol{E}} = 0$

否则，$\vec{\boldsymbol{j}} = \sigma \vec{\boldsymbol{E}} \neq 0$，不是静电问题

(b) 介质 – 导体界面

静电问题中导体的特殊性：

(i) 导体内部无电场，$\vec{\boldsymbol{E}} = 0$，$\vec{\boldsymbol{D}} = \epsilon \vec{\boldsymbol{E}} = 0$

否则，$\vec{\boldsymbol{j}} = \sigma \vec{\boldsymbol{E}} \neq 0$，不是静电问题

(ii) 导体外表面电场垂直于导体面

(b) 介质 – 导体界面

静电问题中导体的特殊性：

(i) 导体内部无电场，$\vec{\boldsymbol{E}} = 0$，$\vec{\boldsymbol{D}} = \epsilon\vec{\boldsymbol{E}} = 0$

否则，$\vec{\boldsymbol{j}} = \sigma\vec{\boldsymbol{E}} \neq 0$，不是静电问题

(ii) 导体外表面电场垂直于导体面

否则，由电场切向连续可得导体内部有切向电场

(b) 介质 – 导体界面

静电问题中导体的特殊性：

(i) 导体内部无电场，$\vec{\boldsymbol{E}} = 0$，$\vec{\boldsymbol{D}} = \epsilon\vec{\boldsymbol{E}} = 0$

否则，$\vec{\boldsymbol{j}} = \sigma\vec{\boldsymbol{E}} \neq 0$，不是静电问题

(ii) 导体外表面电场垂直于导体面

否则，由电场切向连续可得导体内部有切向电场

(iii) 导体为等势体

(b) 介质 – 导体界面

静电问题中导体的特殊性：

(i) 导体内部无电场，$\vec{\boldsymbol{E}} = 0$，$\vec{\boldsymbol{D}} = \epsilon\vec{\boldsymbol{E}} = 0$

否则，$\vec{\boldsymbol{j}} = \sigma\vec{\boldsymbol{E}} \neq 0$，不是静电问题

(ii) 导体外表面电场垂直于导体面

否则，由电场切向连续可得导体内部有切向电场

(iii) 导体为等势体

从导体一点经导体内部移动电荷到另一点，电场为 0 不做功，两点电势相等

(b) 介质 – 导体界面

静电问题中导体的特殊性：

(i) 导体内部无电场，$\vec{\boldsymbol{E}} = 0$，$\vec{\boldsymbol{D}} = \epsilon\vec{\boldsymbol{E}} = 0$

否则，$\vec{\boldsymbol{j}} = \sigma\vec{\boldsymbol{E}} \neq 0$，不是静电问题

(ii) 导体外表面电场垂直于导体面

否则，由电场切向连续可得导体内部有切向电场

(iii) 导体为等势体

从导体一点经导体内部移动电荷到另一点，电场为 0 不做功，两点电势相等

(iv) 导体内部无电荷，电荷只能分布于导体表面

因为导体内电场 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 为 0，故 $\rho_f = \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}} = \nabla\cdot\epsilon\vec{\boldsymbol{E}} = 0$

(b) 介质 – 导体界面

静电问题中导体的特殊性：

(i) 导体内部无电场，$\vec{\boldsymbol{E}}=0$，$\vec{\boldsymbol{D}}=\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}=0$

否则，$\vec{\boldsymbol{j}}=\sigma\vec{\boldsymbol{E}}\neq 0$，不是静电问题

(ii) 导体外表面电场垂直于导体面

否则，由电场切向连续可得导体内部有切向电场

(iii) 导体为等势体

从导体一点经导体内部移动电荷到另一点，电场为 0 不做功，两点电势相等

(iv) 导体内部无电荷，电荷只能分布于导体表面

因为导体内电场 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 为 0，故 $\rho_f=\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}}=\nabla\cdot\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}=0$

从而导体上的边界条件为：

(b) 介质 – 导体界面

静电问题中导体的特殊性：

(i) 导体内部无电场，$\vec{E}=0$，$\vec{D}=\epsilon\vec{E}=0$

否则，$\vec{j}=\sigma\vec{E}\neq 0$，不是静电问题

(ii) 导体外表面电场垂直于导体面

否则，由电场切向连续可得导体内部有切向电场

(iii) 导体为等势体

从导体一点经导体内部移动电荷到另一点，电场为 0 不做功，两点电势相等

(iv) 导体内部无电荷，电荷只能分布于导体表面

因为导体内电场 $\vec{E}$ 为 0，故 $\rho_f=\nabla\cdot\vec{D}=\nabla\cdot\epsilon\vec{E}=0$

从而导体上的边界条件为：

$$\varphi\Big|_{\text{导体}}=\text{const.},$$

(b) 介质 – 导体界面

静电问题中导体的特殊性：

(i) 导体内部无电场，$\vec{\boldsymbol{E}}=0$，$\vec{\boldsymbol{D}}=\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}=0$

否则，$\vec{\boldsymbol{j}}=\sigma\vec{\boldsymbol{E}}\neq 0$，不是静电问题

(ii) 导体外表面电场垂直于导体面

否则，由电场切向连续可得导体内部有切向电场

(iii) 导体为等势体

从导体一点经导体内部移动电荷到另一点，电场为 0 不做功，两点电势相等

(iv) 导体内部无电荷，电荷只能分布于导体表面

因为导体内电场 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 为 0，故 $\rho_f=\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}}=\nabla\cdot\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}=0$

从而导体上的边界条件为：

$$\varphi\Big|_{\text{导体}}=\text{const.},\qquad \vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}_2-\vec{\boldsymbol{D}}_1)=\sigma_f \quad\Longrightarrow\quad \left\{\begin{aligned}&\epsilon_2\frac{\partial\varphi}{\partial n}=-\sigma_f \quad \text{或}\\ &Q=-\epsilon_2\oint\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma\end{aligned}\right.$$

1 表示导体，2 表介质

三、用静电势表示静电场的能量

三、用静电势表示静电场的能量

静电场，线性介质

电磁能量密度：$$u_{em} = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}}$$

三、用静电势表示静电场的能量

静电场，线性介质

电磁能量密度： $$u_{em} = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}}$$

静电能量： $$W = \int u_{em}\, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}}\, \mathrm{d}\tau$$

三、用静电势表示静电场的能量

静电场，线性介质

电磁能量密度： $u_{em} = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}}$

静电能量： $W = \int u_{em}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}}\,\mathrm{d}\tau$

$$\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = -(\nabla\varphi) \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = -\nabla \cdot (\varphi\vec{\boldsymbol{D}}) + \varphi\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}}$$

三、用静电势表示静电场的能量

静电场，线性介质

电磁能量密度： $$u_{em} = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}}$$

静电能量： $$W = \int u_{em}\,\mathsf{d}\tau = \frac{1}{2}\int \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}}\,\mathsf{d}\tau$$

$$\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = -(\nabla\varphi) \cdot \vec{\boldsymbol{D}} \quad = -\nabla \cdot (\varphi\vec{\boldsymbol{D}}) + \varphi\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = -\nabla \cdot (\varphi\vec{\boldsymbol{D}}) + \varphi\rho_f$$

三、用静电势表示静电场的能量

静电场，线性介质

电磁能量密度： $u_{em}=\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\vec{\boldsymbol{D}}$

静电能量： $W=\int u_{em}\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\int\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\vec{\boldsymbol{D}}\,\mathrm{d}\tau$

$$\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\vec{\boldsymbol{D}}=-(\nabla\varphi)\cdot\vec{\boldsymbol{D}}=-\nabla\cdot(\varphi\vec{\boldsymbol{D}})+\varphi\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}}=-\nabla\cdot(\varphi\vec{\boldsymbol{D}})+\varphi\rho_f$$

故静电能量： $W=-\frac{1}{2}\oint\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\varphi\vec{\boldsymbol{D}})\mathrm{d}\sigma+\frac{1}{2}\int\varphi\rho_f\,\mathrm{d}\tau$

三、用静电势表示静电场的能量

静电场，线性介质

电磁能量密度： $u_{em} = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}}$

静电能量： $W = \int u_{em}\, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}}\, \mathrm{d}\tau$

$$\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = -(\nabla\varphi) \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = -\nabla \cdot (\varphi\vec{\boldsymbol{D}}) + \varphi\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = -\nabla \cdot (\varphi\vec{\boldsymbol{D}}) + \varphi\rho_f$$

故静电能量： $W = -\frac{1}{2}\oint \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\varphi\vec{\boldsymbol{D}})\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{2}\int \varphi\rho_f\, \mathrm{d}\tau$

体积分对整个空间积分进行，面积分对无穷大面进行，对静电场 $r \to \infty$ 时，$\vec{\boldsymbol{D}} \sim 1/r^2, \varphi \sim 1/r, \mathrm{d}\sigma \sim r^2$，第一项面积分为 0

三、用静电势表示静电场的能量

静电场，线性介质

电磁能量密度：$$u_{em} = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}}$$

静电能量：$$W = \int u_{em}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}}\,\mathrm{d}\tau$$

$$\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = -(\nabla\varphi) \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = -\nabla \cdot (\varphi\vec{\boldsymbol{D}}) + \varphi\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = -\nabla \cdot (\varphi\vec{\boldsymbol{D}}) + \varphi\rho_f$$

故静电能量：$$W = -\frac{1}{2}\oint \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\varphi\vec{\boldsymbol{D}})\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{2}\int \varphi\rho_f\,\mathrm{d}\tau$$

体积分对整个空间积分进行，面积分对无穷大面进行，对静电场 $r \to \infty$ 时，$\vec{\boldsymbol{D}} \sim 1/r^2, \varphi \sim 1/r, \mathrm{d}\sigma \sim r^2$，第一项面积分为 0

静电场能量为：$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int \varphi\rho_f\,\mathrm{d}\tau}$$

三、用静电势表示静电场的能量

静电场，线性介质

电磁能量密度： $u_{em} = \dfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}}$

静电能量： $W = \displaystyle\int u_{em}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}}\,\mathrm{d}\tau$

$$\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = -(\nabla\varphi) \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = -\nabla \cdot (\varphi\vec{\boldsymbol{D}}) + \varphi\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = -\nabla \cdot (\varphi\vec{\boldsymbol{D}}) + \varphi\rho_f$$

故静电能量： $W = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\oint \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\varphi\vec{\boldsymbol{D}})\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{2}\int \varphi\rho_f\,\mathrm{d}\tau$

体积分对整个空间积分进行，面积分对无穷大面进行，对静电场 $r \to \infty$ 时，$\vec{\boldsymbol{D}} \sim 1/r^2, \varphi \sim 1/r, \mathrm{d}\sigma \sim r^2$，第一项面积分为 0

静电场能量为：
$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int \varphi\rho_f\,\mathrm{d}\tau}$$

尽管电磁能量表为 $\varphi\rho_f$ 的积分，但人们并不认为 $\varphi\rho_f$ 是能量密度。

只有对整个空间的积分，才有 $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int \varphi\rho_f\,\mathrm{d}\tau$

求某区域的静电能量，必须用 $W = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_V \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}}\,\mathrm{d}\tau \neq \frac{1}{2}\int_V \varphi\rho_f\,\mathrm{d}\tau$