第七章：电磁波与带电粒子的相互作用
电磁波的散射和衍射

第七章：电磁波与带电粒子的相互作用
电磁波的散射和衍射

- §7.1 电磁质量　辐射阻尼

第七章：电磁波与带电粒子的相互作用
电磁波的散射和衍射

- §7.1 电磁质量　辐射阻尼
- §7.2 介质中的色散

第七章：电磁波与带电粒子的相互作用
电磁波的散射和衍射

- § 7.1 电磁质量　辐射阻尼
- § 7.2 介质中的色散
- § 7.3 电子对电磁波的散射

第七章：电磁波与带电粒子的相互作用 电磁波的散射和衍射

- § 7.1 电磁质量　辐射阻尼
- § 7.2 介质中的色散
- § 7.3 电子对电磁波的散射
- § 7.4 电磁波的衍射

§7.1 电磁质量　辐射阻尼

§ 7.1 电磁质量　辐射阻尼

运动带电粒子的场包括：固有场和辐射场

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \overbrace{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)}^{\text{固有场 } \vec{\boldsymbol{E}}_1} \\ \underbrace{+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}}_{\text{辐射场 } \vec{\boldsymbol{E}}_2}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\times\vec{\boldsymbol{E}}, \qquad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r), \quad R = |\vec{\boldsymbol{R}}|$$

§ 7.1 电磁质量　辐射阻尼

运动带电粒子的场包括：固有场和辐射场

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \overbrace{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)}^{\text{固有场 } \vec{\boldsymbol{E}}_1} \underbrace{+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}}_{\text{辐射场 } \vec{\boldsymbol{E}}_2}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\times\vec{\boldsymbol{E}}, \qquad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r), \quad R = |\vec{\boldsymbol{R}}|$$

固有场具有动量能量，与粒子如影相随，不可分割。

§ 7.1 电磁质量　辐射阻尼

运动带电粒子的场包括：固有场和辐射场

$$\vec{E} = \overbrace{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)}^{\text{固有场 } \vec{E}_1} \underbrace{+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}}_{\text{辐射场 } \vec{E}_2}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_q(t_r), \quad R = |\vec{R}|$$

固有场具有动量能量，与粒子如影相随，不可分割。

因此，固有场的动量能量应和粒子“本身的动量能量”（如机械能量动量）作为一个整体看待。

§7.1 电磁质量　辐射阻尼

运动带电粒子的场包括：固有场和辐射场

$$\vec{E} = \overbrace{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)}^{\text{固有场 } \vec{E}_1} \underbrace{+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}}_{\text{辐射场 } \vec{E}_2}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_q(t_r), \quad R = |\vec{R}|$$

固有场具有动量能量，与粒子如影相随，不可分割。

因此，固有场的动量能量应和粒子“本身的动量能量”（如机械能量动量）作为一个整体看待。

其物理效应相当于带电粒子具有一定的“额外”质量

§ 7.1 电磁质量　辐射阻尼

运动带电粒子的场包括：固有场和辐射场

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \overbrace{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)}^{\text{固有场 } \vec{\boldsymbol{E}}_1} \underbrace{+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}}_{\text{辐射场 } \vec{\boldsymbol{E}}_2}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\times\vec{\boldsymbol{E}}, \qquad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r), \quad R = |\vec{\boldsymbol{R}}|$$

固有场具有动量能量，与粒子如影相随，不可分割。

因此，固有场的动量能量应和粒子“本身的动量能量”（如机械能量动量）作为一个整体看待。

其物理效应相当于带电粒子具有一定的“额外”质量 —— 电磁质量

§7.1 电磁质量　辐射阻尼

运动带电粒子的场包括：固有场和辐射场

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \overbrace{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)}^{\text{固有场 } \vec{\boldsymbol{E}}_1} \underbrace{+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}}_{\text{辐射场 } \vec{\boldsymbol{E}}_2}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\times\vec{\boldsymbol{E}}, \qquad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r), \quad R = |\vec{\boldsymbol{R}}|$$

固有场具有动量能量，与粒子如影相随，不可分割。

因此，固有场的动量能量应和粒子“本身的动量能量”（如机械能量动量）作为一个整体看待。

其物理效应相当于带电粒子具有一定的“额外”质量 —— 电磁质量

辐射场辐射出能量，这些能量脱离粒子，使得粒子能量减少。

§7.1 电磁质量 辐射阻尼

运动带电粒子的场包括：固有场和辐射场

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \overbrace{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)}^{\text{固有场 } \vec{\boldsymbol{E}}_1} \underbrace{+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}}_{\text{辐射场 } \vec{\boldsymbol{E}}_2}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\times\vec{\boldsymbol{E}}, \qquad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r), \quad R = |\vec{\boldsymbol{R}}|$$

固有场具有动量能量，与粒子如影相随，不可分割。

因此，固有场的动量能量应和粒子“本身的动量能量”（如机械能量动量）作为一个整体看待。

其物理效应相当于带电粒子具有一定的“额外”质量 —— 电磁质量

辐射场辐射出能量，这些能量脱离粒子，使得粒子能量减少。

其物理效应相当于带电粒子受到一定的阻尼力

§ 7.1 电磁质量　辐射阻尼

运动带电粒子的场包括：固有场和辐射场

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \overbrace{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)}^{\text{固有场 } \vec{\boldsymbol{E}}_1} \underbrace{+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}}_{\text{辐射场 } \vec{\boldsymbol{E}}_2}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\times\vec{\boldsymbol{E}}, \qquad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r), \quad R = |\vec{\boldsymbol{R}}|$$

固有场具有动量能量，与粒子如影相随，不可分割。

因此，固有场的动量能量应和粒子“本身的动量能量”（如机械能量动量）作为一个整体看待。

其物理效应相当于带电粒子具有一定的“额外”质量 —— 电磁质量

辐射场辐射出能量，这些能量脱离粒子，使得粒子能量减少。

其物理效应相当于带电粒子受到一定的阻尼力 —— 辐射阻尼力

一、电磁质量

一、电磁质量

考虑固有场对能量、动量的贡献。

一、电磁质量

考虑固有场对能量、动量的贡献。

固有场：$\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\dfrac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\dfrac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)$

一、电磁质量

考虑固有场对能量、动量的贡献。

固有场：$\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1 - \dfrac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}} - \dfrac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\beta^2)(\vec{\boldsymbol{R}} - \vec{\boldsymbol{v}}R/c)}{s^3}$$

一、电磁质量

考虑固有场对能量、动量的贡献。

固有场：$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1 - \frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}} - \frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)$$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\beta^2)(\vec{\boldsymbol{R}} - \vec{\boldsymbol{v}}R/c)}{s^3}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{c}\left[\vec{\boldsymbol{\beta}} + (\vec{\boldsymbol{n}} - \vec{\boldsymbol{\beta}})\right] \times \vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{\beta}} \times \vec{\boldsymbol{E}}, \qquad (\vec{\boldsymbol{n}} - \vec{\boldsymbol{\beta}}) \,||\, \vec{\boldsymbol{E}}$$

一、电磁质量

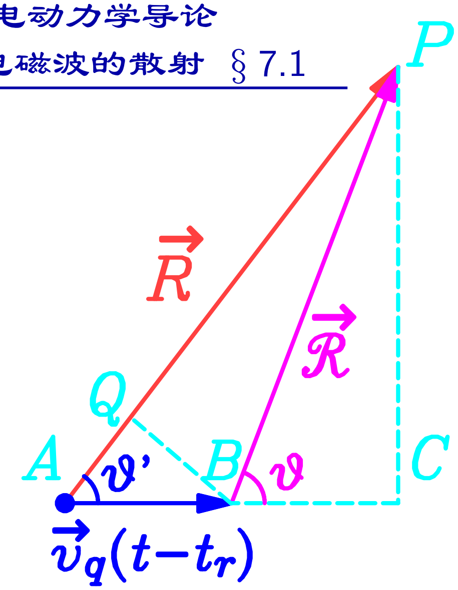
考虑固有场对能量、动量的贡献。

固有场：$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)$$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\beta^2)(\vec{\boldsymbol{R}}-\vec{\boldsymbol{v}}R/c)}{s^3}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{c}\left[\vec{\boldsymbol{\beta}}+(\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{\beta}})\right]\times\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{\beta}}\times\vec{\boldsymbol{E}}, \qquad (\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{\beta}})\,||\,\vec{\boldsymbol{E}}$$

式中：$s = R-\vec{\boldsymbol{\beta}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}}, \quad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r), \quad \vec{\boldsymbol{\beta}} = \vec{\boldsymbol{v}}/c, \quad \beta = v/c, \quad t_r = t-R/c$



一、电磁质量

考虑固有场对能量、动量的贡献。

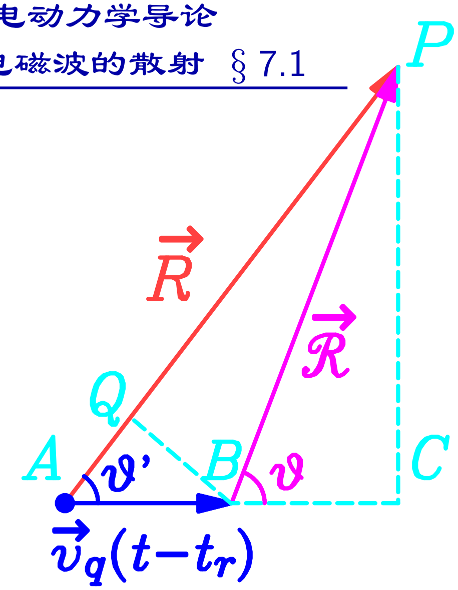
固有场：$\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\dfrac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\dfrac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\beta^2)(\vec{\boldsymbol{R}}-\vec{\boldsymbol{v}}R/c)}{s^3}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{c}\left[\vec{\boldsymbol{\beta}}+(\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{\beta}})\right]\times\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{\beta}}\times\vec{\boldsymbol{E}}, \qquad (\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{\beta}})\,||\,\vec{\boldsymbol{E}}$$

式中：$s = R-\vec{\boldsymbol{\beta}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}}$, $\quad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)$, $\quad \vec{\boldsymbol{\beta}} = \vec{\boldsymbol{v}}/c$, $\quad \beta = v/c$, $\quad t_r = t-R/c$

匀速运动粒子的场可表为“同时量”形式。 $\vec{\boldsymbol{\beta}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}} = R(v/c)\cos\theta' = \underbrace{v_q(t-t_r)}_{(AB)}\cos\theta'$



一、 电磁质量

考虑固有场对能量、动量的贡献。

固有场： $\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\dfrac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\dfrac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)$

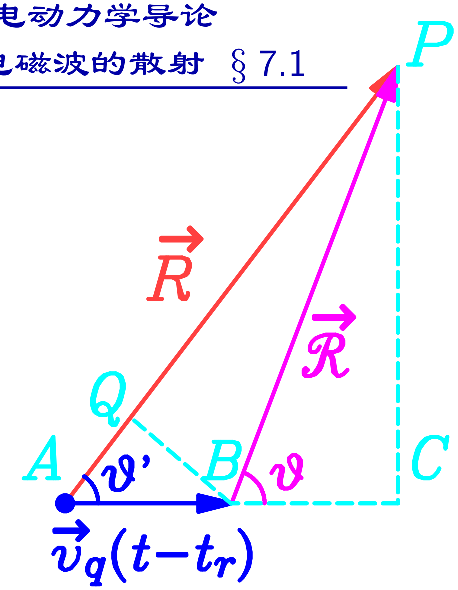
$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\beta^2)(\vec{\boldsymbol{R}}-\vec{\boldsymbol{v}}R/c)}{s^3}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{c}\left[\vec{\boldsymbol{\beta}}+(\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{\beta}})\right]\times\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{\beta}}\times\vec{\boldsymbol{E}}, \qquad (\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{\beta}})\,||\,\vec{\boldsymbol{E}}$$

式中： $s = R - \vec{\boldsymbol{\beta}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}}$, $\quad\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)$, $\quad\vec{\boldsymbol{\beta}} = \vec{\boldsymbol{v}}/c$, $\quad\beta = v/c$, $\quad t_r = t - R/c$

匀速运动粒子的场可表为“同时量”形式。 $\vec{\boldsymbol{\beta}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}} = R(v/c)\cos\theta' = \underbrace{v_q(t-t_r)}_{(AB)}\cos\theta'$

$s = (AP)-(AQ)$



一、电磁质量

考虑固有场对能量、动量的贡献。

固有场：$\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\dfrac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\dfrac{R}{c}\vec{v}_q\right)$

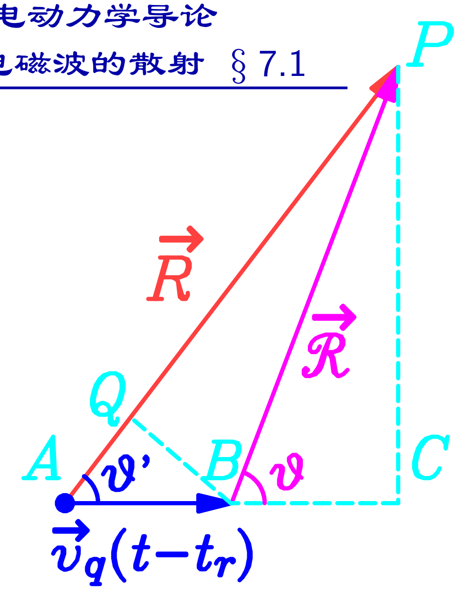
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(1-\beta^2)(\vec{R}-\vec{v}R/c)}{s^3}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E} = \frac{1}{c}\,[\vec{\beta}+(\vec{n}-\vec{\beta})]\times\vec{E} = \frac{1}{c}\,\vec{\beta}\times\vec{E}, \qquad (\vec{n}-\vec{\beta})\,||\,\vec{E}$$

式中：$s = R-\vec{\beta}\cdot\vec{R}$, $\quad \vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_q(t_r)$, $\quad \vec{\beta} = \vec{v}/c$, $\quad \beta = v/c$, $\quad t_r = t-R/c$

匀速运动粒子的场可表为“同时量”形式。 $\quad \vec{\beta}\cdot\vec{R} = R(v/c)\cos\theta' = \underbrace{v_q(t-t_r)}_{(AB)}\cos\theta'$

$$s = (AP)-(AQ) = (PQ)$$



一、电磁质量

考虑固有场对能量、动量的贡献。

固有场：$\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\dfrac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\dfrac{R}{c}\vec{v}_q\right)$

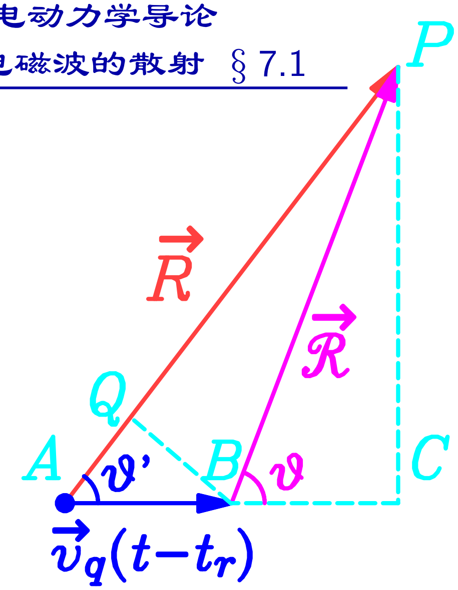
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\beta^2)(\vec{R}-\vec{v}R/c)}{s^3}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E} = \frac{1}{c}\left[\vec{\beta}+(\vec{n}-\vec{\beta})\right]\times\vec{E} = \frac{1}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}, \qquad (\vec{n}-\vec{\beta})\,||\,\vec{E}$$

式中：$s = R-\vec{\beta}\cdot\vec{R}$, $\vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_q(t_r)$, $\vec{\beta} = \vec{v}/c$, $\beta = v/c$, $t_r = t-R/c$

匀速运动粒子的场可表为“同时量”形式。 $\vec{\beta}\cdot\vec{R} = R(v/c)\cos\theta' = \underbrace{v_q(t-t_r)}_{(AB)}\cos\theta'$

$s = (AP)-(AQ) = (PQ) = \sqrt{\mathscr{R}^2-(BQ)^2}$



一、电磁质量

考虑固有场对能量、动量的贡献。

固有场：$\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\dfrac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\dfrac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(1-\beta^2)(\vec{\boldsymbol{R}}-\vec{\boldsymbol{v}}R/c)}{s^3}$$

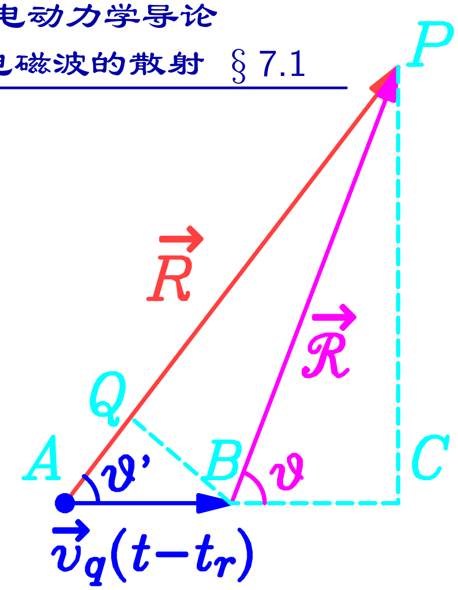
$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{c}\,[\vec{\boldsymbol{\beta}}+(\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{\beta}})]\times\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{c}\,\vec{\boldsymbol{\beta}}\times\vec{\boldsymbol{E}}, \qquad (\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{\beta}})\,||\,\vec{\boldsymbol{E}}$$

式中：$s = R-\vec{\boldsymbol{\beta}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}}, \quad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r), \quad \vec{\boldsymbol{\beta}} = \vec{\boldsymbol{v}}/c, \quad \beta = v/c, \quad t_r = t-R/c$

匀速运动粒子的场可表为“同时量”形式。 $\vec{\boldsymbol{\beta}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}} = R(v/c)\cos\theta' = \underbrace{v_q(t-t_r)}_{(AB)}\cos\theta'$

$$s = (AP)-(AQ) = (PQ) = \sqrt{\mathscr{R}^2-(BQ)^2}$$

$$(BQ) = (AB)\sin\theta'$$



一、电磁质量

考虑固有场对能量、动量的贡献。

固有场：$\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\dfrac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\dfrac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\beta^2)(\vec{\boldsymbol{R}}-\vec{\boldsymbol{v}}R/c)}{s^3}$$

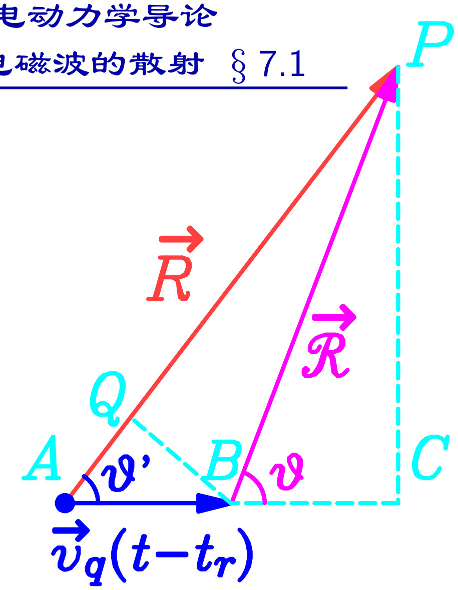
$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{c}[\vec{\boldsymbol{\beta}}+(\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{\beta}})]\times\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{\beta}}\times\vec{\boldsymbol{E}}, \qquad (\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{\beta}})\,||\,\vec{\boldsymbol{E}}$$

式中：$s = R-\vec{\boldsymbol{\beta}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}}$, $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)$, $\vec{\boldsymbol{\beta}} = \vec{\boldsymbol{v}}/c$, $\beta = v/c$, $t_r = t-R/c$

匀速运动粒子的场可表为“同时量”形式。 $\vec{\boldsymbol{\beta}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}} = R(v/c)\cos\theta' = \underbrace{v_q(t-t_r)}_{(AB)}\cos\theta'$

$s = (AP)-(AQ) = (PQ) = \sqrt{\mathscr{R}^2-(BQ)^2}$

$(BQ) = (AB)\sin\theta' = (v_q R/c)\sin\theta'$



一、电磁质量

考虑固有场对能量、动量的贡献。

固有场：$\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\dfrac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\dfrac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\beta^2)(\vec{\boldsymbol{R}}-\vec{\boldsymbol{v}}R/c)}{s^3}$$

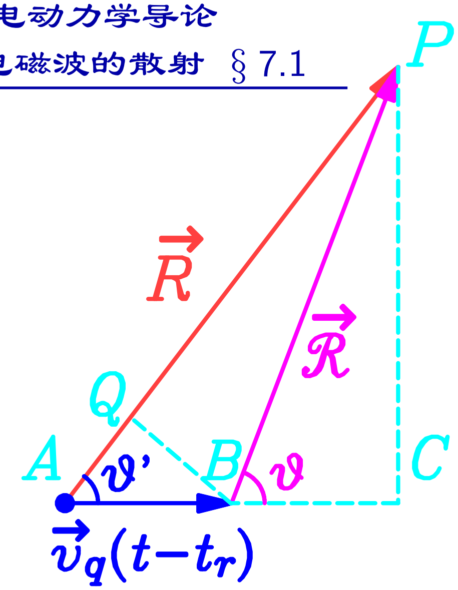
$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{c}\,[\vec{\boldsymbol{\beta}}+(\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{\beta}})]\times\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{c}\,\vec{\boldsymbol{\beta}}\times\vec{\boldsymbol{E}}, \qquad (\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{\beta}})\,||\,\vec{\boldsymbol{E}}$$

式中：$s = R-\vec{\boldsymbol{\beta}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}}$, $\quad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)$, $\quad \vec{\boldsymbol{\beta}} = \vec{\boldsymbol{v}}/c$, $\quad \beta = v/c$, $\quad t_r = t-R/c$

匀速运动粒子的场可表为“同时量”形式。 $\vec{\boldsymbol{\beta}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}} = R(v/c)\cos\theta' = \underbrace{v_q(t-t_r)}_{(AB)}\cos\theta'$

$$s = (AP)-(AQ) = (PQ) = \sqrt{\mathscr{R}^2-(BQ)^2}$$

$$(BQ) = (AB)\sin\theta' = (v_qR/c)\sin\theta' = (v_q/c)R\sin\theta'$$



一、电磁质量

考虑固有场对能量、动量的贡献。

固有场：$\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\dfrac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\dfrac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\beta^2)(\vec{\boldsymbol{R}}-\vec{\boldsymbol{v}}R/c)}{s^3}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{c}[\vec{\boldsymbol{\beta}}+(\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{\beta}})]\times\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{\beta}}\times\vec{\boldsymbol{E}}, \qquad (\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{\beta}})\,||\,\vec{\boldsymbol{E}}$$

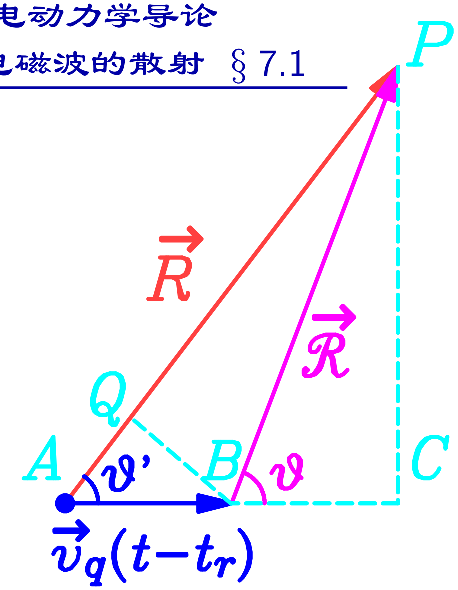
式中：$s = R-\vec{\boldsymbol{\beta}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}}$, $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)$, $\vec{\boldsymbol{\beta}} = \vec{\boldsymbol{v}}/c$, $\beta = v/c$, $t_r = t-R/c$

匀速运动粒子的场可表为“同时量”形式。 $\vec{\boldsymbol{\beta}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}} = R(v/c)\cos\theta' = \underbrace{v_q(t-t_r)}_{(AB)}\cos\theta'$

$$s = (AP)-(AQ) = (PQ) = \sqrt{\mathscr{R}^2-(BQ)^2}$$

$$(BQ) = (AB)\sin\theta' = (v_qR/c)\sin\theta' = (v_q/c)R\sin\theta' = (v_q/c)\mathscr{R}\sin\theta$$

一、电磁质量



考虑固有场对能量、动量的贡献。

固有场：$\boldsymbol{\vec{E}}=\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\dfrac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\boldsymbol{\vec{R}}-\dfrac{R}{c}\boldsymbol{\vec{v}}_q\right)$

$$\boldsymbol{\vec{E}}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\beta^2)(\boldsymbol{\vec{R}}-\boldsymbol{\vec{v}}R/c)}{s^3}$$

$$\boldsymbol{\vec{B}}=\frac{1}{c}\boldsymbol{\vec{n}}\times\boldsymbol{\vec{E}}=\frac{1}{c}[\boldsymbol{\vec{\beta}}+(\boldsymbol{\vec{n}}-\boldsymbol{\vec{\beta}})]\times\boldsymbol{\vec{E}}=\frac{1}{c}\boldsymbol{\vec{\beta}}\times\boldsymbol{\vec{E}},\qquad(\boldsymbol{\vec{n}}-\boldsymbol{\vec{\beta}})\,||\,\boldsymbol{\vec{E}}$$

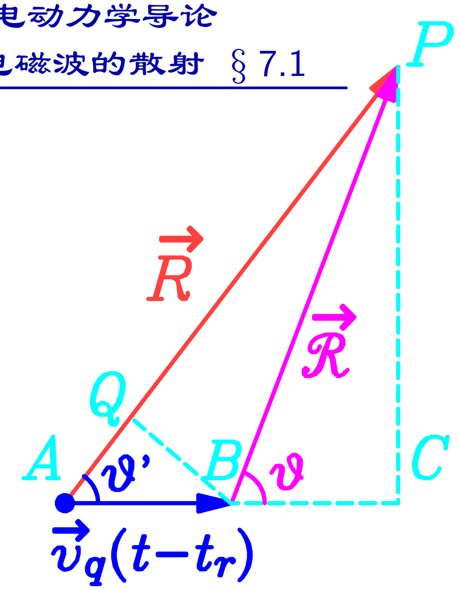
式中：$s=R-\boldsymbol{\vec{\beta}}\cdot\boldsymbol{\vec{R}},\quad \boldsymbol{\vec{R}}=\boldsymbol{\vec{r}}-\boldsymbol{\vec{r}}_q(t_r),\quad \boldsymbol{\vec{\beta}}=\boldsymbol{\vec{v}}/c,\quad \beta=v/c,\quad t_r=t-R/c$

匀速运动粒子的场可表为“同时量”形式。 $\boldsymbol{\vec{\beta}}\cdot\boldsymbol{\vec{R}}=R(v/c)\cos\theta'=\underbrace{v_q(t-t_r)}_{(AB)}\cos\theta'$

$$s=(AP)-(AQ)=(PQ)=\sqrt{\mathscr{R}^2-(BQ)^2}$$

$$(BQ)=(AB)\sin\theta'=(v_qR/c)\sin\theta'=(v_q/c)R\sin\theta'=(v_q/c)\mathscr{R}\sin\theta$$

$$\boxed{s=\mathscr{R}\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}},$$



一、电磁质量

考虑固有场对能量、动量的贡献。

固有场：$\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\dfrac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\dfrac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(1-\beta^2)(\vec{\boldsymbol{R}}-\vec{\boldsymbol{v}}R/c)}{s^3}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{c}\,[\vec{\boldsymbol{\beta}}+(\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{\beta}})]\times\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{c}\,\vec{\boldsymbol{\beta}}\times\vec{\boldsymbol{E}}, \qquad (\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{\beta}})\,||\,\vec{\boldsymbol{E}}$$

式中：$s = R-\vec{\boldsymbol{\beta}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}}$, $\quad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)$, $\quad \vec{\boldsymbol{\beta}} = \vec{\boldsymbol{v}}/c$, $\quad \beta = v/c$, $\quad t_r = t-R/c$

匀速运动粒子的场可表为“同时量”形式。 $\vec{\boldsymbol{\beta}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}} = R(v/c)\cos\theta' = \underbrace{v_q(t-t_r)}_{(AB)}\cos\theta'$

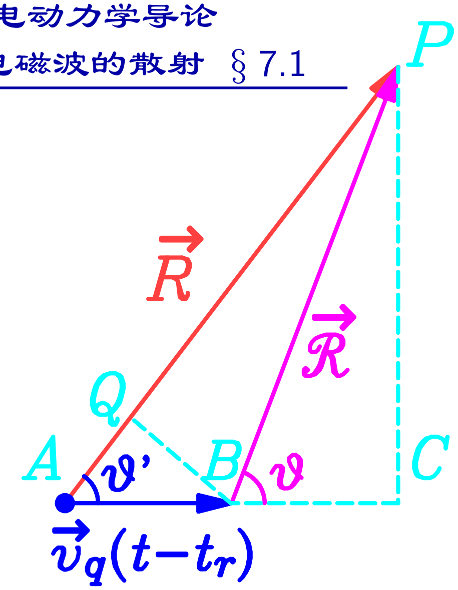
$$s = (AP)-(AQ) = (PQ) = \sqrt{\mathscr{R}^2-(BQ)^2}$$

$$(BQ) = (AB)\sin\theta' = (v_qR/c)\sin\theta' = (v_q/c)R\sin\theta' = (v_q/c)\mathscr{R}\sin\theta$$

$$\boxed{s = \mathscr{R}\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}},$$

从图中可看出：$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{v}}(t-t_r)+\vec{\mathscr{R}} = \vec{\boldsymbol{v}}(R/c)+\vec{\mathscr{R}}$

一、电磁质量



考虑固有场对能量、动量的贡献。

固有场：$\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\dfrac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}} - \dfrac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(1-\beta^2)(\vec{\boldsymbol{R}}-\vec{\boldsymbol{v}}R/c)}{s^3}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{c}\left[\vec{\boldsymbol{\beta}}+(\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{\beta}})\right]\times\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{c}\,\vec{\boldsymbol{\beta}}\times\vec{\boldsymbol{E}}, \qquad (\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{\beta}})\,||\,\vec{\boldsymbol{E}}$$

式中：$s = R - \vec{\boldsymbol{\beta}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}}$, $\quad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)$, $\quad \vec{\boldsymbol{\beta}} = \vec{\boldsymbol{v}}/c$, $\quad \beta = v/c$, $\quad t_r = t - R/c$

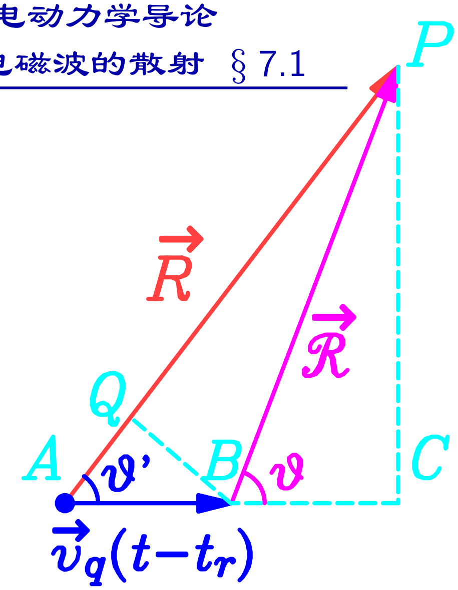
匀速运动粒子的场可表为“同时量”形式。 $\vec{\boldsymbol{\beta}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}} = R(v/c)\cos\theta' = \underbrace{v_q(t-t_r)}_{(AB)}\cos\theta'$

$$s = (AP)-(AQ) = (PQ) = \sqrt{\mathscr{R}^2-(BQ)^2}$$

$$(BQ) = (AB)\sin\theta' = (v_qR/c)\sin\theta' = (v_q/c)R\sin\theta' = (v_q/c)\mathscr{R}\sin\theta$$

$$\boxed{s = \mathscr{R}\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}},$$

从图中可看出：$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{v}}(t-t_r)+\vec{\mathscr{R}} = \vec{\boldsymbol{v}}(R/c)+\vec{\mathscr{R}} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\vec{\boldsymbol{R}} - \vec{\boldsymbol{v}}\,R/c = \vec{\mathscr{R}}}$



一、电磁质量

考虑固有场对能量、动量的贡献。

固有场：$\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\dfrac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\dfrac{R}{c}\vec{v}_q\right)$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\beta^2)(\vec{R}-\vec{v}R/c)}{s^3}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E} = \frac{1}{c}[\vec{\beta}+(\vec{n}-\vec{\beta})]\times\vec{E} = \frac{1}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}, \qquad (\vec{n}-\vec{\beta})\,||\,\vec{E}$$

式中：$s = R-\vec{\beta}\cdot\vec{R}$, $\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)$, $\vec{\beta}=\vec{v}/c$, $\beta = v/c$, $t_r = t-R/c$

匀速运动粒子的场可表为“同时量”形式。 $\vec{\beta}\cdot\vec{R} = R(v/c)\cos\theta' = \underbrace{v_q(t-t_r)}_{(AB)}\cos\theta'$

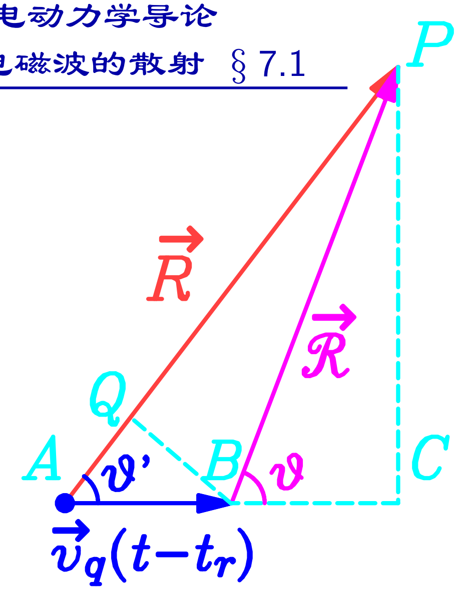
$$s = (AP)-(AQ) = (PQ) = \sqrt{\mathscr{R}^2-(BQ)^2}$$

$$(BQ) = (AB)\sin\theta' = (v_qR/c)\sin\theta' = (v_q/c)R\sin\theta' = (v_q/c)\mathscr{R}\sin\theta$$

$$\boxed{s = \mathscr{R}\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}},$$

从图中可看出：$\vec{R} = \vec{v}(t-t_r)+\vec{\mathscr{R}} = \vec{v}(R/c)+\vec{\mathscr{R}} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\vec{R}-\vec{v}\,R/c = \vec{\mathscr{R}}}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\beta^2)\vec{\mathscr{R}}}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}\mathscr{R}^3},$$



一、电磁质量

考虑固有场对能量、动量的贡献。

固有场：$\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\dfrac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\dfrac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(1-\beta^2)(\vec{\boldsymbol{R}}-\vec{\boldsymbol{v}}R/c)}{s^3}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{c}\,[\vec{\boldsymbol{\beta}}+(\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{\beta}})]\times\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{c}\,\vec{\boldsymbol{\beta}}\times\vec{\boldsymbol{E}}, \qquad (\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{\beta}})\,||\,\vec{\boldsymbol{E}}$$

式中：$s = R-\vec{\boldsymbol{\beta}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}},\quad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r),\quad \vec{\boldsymbol{\beta}} = \vec{\boldsymbol{v}}/c,\quad \beta = v/c,\quad t_r = t-R/c$

匀速运动粒子的场可表为“同时量”形式。 $\vec{\boldsymbol{\beta}}\cdot\vec{\boldsymbol{R}} = R(v/c)\cos\theta' = \underbrace{v_q(t-t_r)}_{(AB)}\cos\theta'$

$$s = (AP)-(AQ) = (PQ) = \sqrt{\mathscr{R}^2-(BQ)^2}$$

$$(BQ) = (AB)\sin\theta' = (v_q R/c)\sin\theta' = (v_q/c)R\sin\theta' = (v_q/c)\mathscr{R}\sin\theta$$

$$\boxed{s = \mathscr{R}\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}},$$

从图中可看出：$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{v}}(t-t_r)+\vec{\mathscr{R}} = \vec{\boldsymbol{v}}(R/c)+\vec{\mathscr{R}} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\vec{\boldsymbol{R}}-\vec{\boldsymbol{v}}\,R/c = \vec{\mathscr{R}}}$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(1-\beta^2)\vec{\mathscr{R}}}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}\mathscr{R}^3},$$

$\vec{\mathscr{R}}$ 为粒子当前位置到观察点的间距矢量

Let there be light

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(1-\beta^2)\vec{\mathscr{R}}}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}\mathscr{R}^3},$$

Let there be light

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(1-\beta^2)\vec{\mathscr{R}}}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}\mathscr{R}^3},$$

考虑粒子速度远小于光速：$\beta \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}_0(1+\frac{1}{2}\beta^2-\frac{3}{2}\beta^2\cos^2\theta), \\ \\ \end{array} \right.$

Let there be light

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(1-\beta^2)\vec{\mathscr{R}}}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}\mathscr{R}^3},$$

考虑粒子速度远小于光速：$\beta \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}_0(1+\frac{1}{2}\beta^2 - \frac{3}{2}\beta^2\cos^2\theta), \\ \vec{\boldsymbol{B}} = \dfrac{1}{c}\vec{\boldsymbol{\beta}}\times\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{1}{c}\vec{\boldsymbol{\beta}}\times\vec{\boldsymbol{E}}_0 \end{cases}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1-\beta^2)\vec{\mathscr{R}}}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}\mathscr{R}^3},$$

考虑粒子速度远小于光速：$\beta \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0(1+\tfrac{1}{2}\beta^2 - \tfrac{3}{2}\beta^2\cos^2\theta), \\ \vec{B} &= \frac{1}{c}\vec{\beta}\times\vec{E} = \frac{1}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}_0 \end{aligned} \right.$

$\vec{E}_0 = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$ 为库仑场。

Let there be light

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\beta^2)\vec{\mathscr{R}}}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}\mathscr{R}^3},$$

考虑粒子速度远小于光速：$\beta \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}_0(1+\frac{1}{2}\beta^2 - \frac{3}{2}\beta^2\cos^2\theta), \\ \vec{\boldsymbol{B}} = \dfrac{1}{c}\vec{\boldsymbol{\beta}}\times\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{1}{c}\vec{\boldsymbol{\beta}}\times\vec{\boldsymbol{E}}_0 \end{cases}$

$\vec{\boldsymbol{E}}_0 = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$ 为库仑场。

固有场动量：$\vec{\boldsymbol{G}}_s = \epsilon_0\int\vec{\boldsymbol{E}}\times\vec{\boldsymbol{B}}\,\mathrm{d}\tau = \dfrac{\epsilon_0}{c}\int\vec{\boldsymbol{E}}_0\times(\vec{\boldsymbol{\beta}}\times\vec{\boldsymbol{E}}_0)\,\mathrm{d}\tau$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\beta^2)\vec{\mathscr{R}}}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}\mathscr{R}^3},$$

考虑粒子速度远小于光速：$\beta \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0(1+\tfrac{1}{2}\beta^2-\tfrac{3}{2}\beta^2\cos^2\theta), \\ \vec{B} &= \frac{1}{c}\vec{\beta}\times\vec{E} = \frac{1}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}_0 \end{aligned} \right.$

$\vec{E}_0 = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$ 为库仑场。

固有场动量：$\vec{G}_s = \epsilon_0\displaystyle\int \vec{E}\times\vec{B}\,\mathrm{d}\tau = \frac{\epsilon_0}{c}\int \vec{E}_0\times(\vec{\beta}\times\vec{E}_0)\,\mathrm{d}\tau = \frac{4U_0}{3c}\vec{\beta}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\beta^2)\vec{\mathscr{R}}}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}\mathscr{R}^3},$$

考虑粒子速度远小于光速：$\beta \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0(1+\frac{1}{2}\beta^2 - \frac{3}{2}\beta^2\cos^2\theta), \\ \vec{B} = \frac{1}{c}\vec{\beta}\times\vec{E} = \frac{1}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}_0 \end{cases}$

$\vec{E}_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$ 为库仑场。

固有场动量：$\vec{G}_s = \epsilon_0\int \vec{E}\times\vec{B}\,\mathrm{d}\tau = \frac{\epsilon_0}{c}\int \vec{E}_0\times(\vec{\beta}\times\vec{E}_0)\,\mathrm{d}\tau = \frac{4U_0}{3c}\vec{\beta}$

利用了：$\vec{\beta} = \beta\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$， $\vec{E}_0\times(\vec{\beta}\times\vec{E}_0) = \vec{\beta}\,\vec{E}_0^2 - (\vec{\beta}\cdot\vec{E}_0)\vec{E}_0$

$$\int \mathrm{d}\tau\,(\vec{\beta}\cdot\vec{E}_0)\vec{E}_0 = \beta\left[\hat{\boldsymbol{e}}_x\underbrace{\int \mathrm{d}\tau\,E_{0x}E_{0z}}_{\text{球对称，积分为 0}} + \hat{\boldsymbol{e}}_y\underbrace{\int \mathrm{d}\tau\,E_{0y}E_{0z}}_{\text{球对称，积分为 0}} + \hat{\boldsymbol{e}}_z\underbrace{\int \mathrm{d}\tau\,E_{0z}E_{0z}}_{\text{球对称，}=\frac{1}{3}\int \mathrm{d}\tau\vec{E}_0^2}\right]$$

$$= \beta\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\int \mathrm{d}\tau\,E_{0z}E_{0z} = \frac{1}{3}\vec{\beta}\int \mathrm{d}\tau\,\vec{E}_0^2 = \frac{2}{3}\vec{\beta}U_0$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(1-\beta^2)\vec{\mathscr{R}}}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}\mathscr{R}^3},$$

考虑粒子速度远小于光速：$\beta \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0(1+\frac{1}{2}\beta^2-\frac{3}{2}\beta^2\cos^2\theta), \\ \vec{B} = \dfrac{1}{c}\vec{\beta}\times\vec{E} = \dfrac{1}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}_0 \end{cases}$

$\vec{E}_0 = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$ 为库仑场。

固有场动量：$\vec{G}_s = \epsilon_0\displaystyle\int \vec{E}\times\vec{B}\,\mathrm{d}\tau = \frac{\epsilon_0}{c}\int \vec{E}_0\times(\vec{\beta}\times\vec{E}_0)\,\mathrm{d}\tau = \frac{4U_0}{3c}\vec{\beta}$

利用了：$\vec{\beta} = \beta\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$，$\vec{E}_0\times(\vec{\beta}\times\vec{E}_0) = \vec{\beta}\,\vec{E}_0^2 - (\vec{\beta}\cdot\vec{E}_0)\vec{E}_0$

$$\int \mathrm{d}\tau\,(\vec{\beta}\cdot\vec{E}_0)\vec{E}_0 = \beta\Big[\,\hat{\boldsymbol{e}}_x\underbrace{\int \mathrm{d}\tau\,E_{0x}E_{0z}}_{\text{球对称，积分为 0}} + \hat{\boldsymbol{e}}_y\underbrace{\int \mathrm{d}\tau\,E_{0y}E_{0z}}_{\text{球对称，积分为 0}} + \hat{\boldsymbol{e}}_z\underbrace{\int \mathrm{d}\tau\,E_{0z}E_{0z}}_{\text{球对称，}=\frac{1}{3}\int \mathrm{d}\tau\vec{E}_0^2}\,\Big]$$

$$= \beta\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\int \mathrm{d}\tau\,E_{0z}E_{0z} = \frac{1}{3}\vec{\beta}\int \mathrm{d}\tau\,\vec{E}_0^2 = \frac{2}{3}\vec{\beta}U_0$$

固有场能量：$U_s = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int (\epsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2)\,\mathrm{d}\tau$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\beta^2)\vec{\mathscr{R}}}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}\mathscr{R}^3},$$

考虑粒子速度远小于光速：$\beta \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}_0(1+\frac{1}{2}\beta^2 - \frac{3}{2}\beta^2\cos^2\theta), \\ \vec{\boldsymbol{B}} = \dfrac{1}{c}\vec{\boldsymbol{\beta}} \times \vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{1}{c}\vec{\boldsymbol{\beta}} \times \vec{\boldsymbol{E}}_0 \end{cases}$

$\vec{\boldsymbol{E}}_0 = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$ 为库仑场。

固有场动量：$\vec{\boldsymbol{G}}_s = \epsilon_0 \displaystyle\int \vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\,\mathrm{d}\tau = \frac{\epsilon_0}{c}\int \vec{\boldsymbol{E}}_0 \times (\vec{\boldsymbol{\beta}} \times \vec{\boldsymbol{E}}_0)\,\mathrm{d}\tau = \frac{4U_0}{3c}\vec{\boldsymbol{\beta}}$

利用了：$\vec{\boldsymbol{\beta}} = \beta\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$， $\vec{\boldsymbol{E}}_0 \times (\vec{\boldsymbol{\beta}} \times \vec{\boldsymbol{E}}_0) = \vec{\boldsymbol{\beta}}\,\vec{\boldsymbol{E}}_0^2 - (\vec{\boldsymbol{\beta}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_0)\vec{\boldsymbol{E}}_0$

$$\int \mathrm{d}\tau\,(\vec{\boldsymbol{\beta}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_0)\vec{\boldsymbol{E}}_0 = \beta\left[\hat{\boldsymbol{e}}_x \underbrace{\int \mathrm{d}\tau\, E_{0x}E_{0z}}_{\text{球对称，积分为 0}} + \hat{\boldsymbol{e}}_y \underbrace{\int \mathrm{d}\tau\, E_{0y}E_{0z}}_{\text{球对称，积分为 0}} + \hat{\boldsymbol{e}}_z \underbrace{\int \mathrm{d}\tau\, E_{0z}E_{0z}}_{\text{球对称，}=\frac{1}{3}\int \mathrm{d}\tau \vec{\boldsymbol{E}}_0^2}\right]$$

$$= \beta\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \int \mathrm{d}\tau\, E_{0z}E_{0z} = \frac{1}{3}\vec{\boldsymbol{\beta}}\int \mathrm{d}\tau\,\vec{\boldsymbol{E}}_0^2 = \frac{2}{3}\vec{\boldsymbol{\beta}}U_0$$

固有场能量：$U_s = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int (\epsilon_0\vec{\boldsymbol{E}}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{\boldsymbol{B}}^2)\,\mathrm{d}\tau = \left(1+\frac{2}{3}\beta^2\right)U_0$

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\beta^2)\vec{\mathscr{R}}}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}\mathscr{R}^3},$$

考虑粒子速度远小于光速：$\beta \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \vec{E}=\vec{E}_0(1+\frac{1}{2}\beta^2-\frac{3}{2}\beta^2\cos^2\theta), \\ \vec{B}=\frac{1}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}=\frac{1}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}_0 \end{cases}$

$\vec{E}_0=\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$ 为库仑场。

固有场动量：$\vec{G}_s=\epsilon_0\displaystyle\int\vec{E}\times\vec{B}\,\mathrm{d}\tau=\frac{\epsilon_0}{c}\int\vec{E}_0\times(\vec{\beta}\times\vec{E}_0)\,\mathrm{d}\tau=\frac{4U_0}{3c}\vec{\beta}$

利用了：$\vec{\beta}=\beta\,\hat{e}_z$，$\vec{E}_0\times(\vec{\beta}\times\vec{E}_0)=\vec{\beta}\,\vec{E}_0^2-(\vec{\beta}\cdot\vec{E}_0)\vec{E}_0$

$$\int\mathrm{d}\tau\,(\vec{\beta}\cdot\vec{E}_0)\vec{E}_0=\beta\Big[\hat{e}_x\underbrace{\int\mathrm{d}\tau E_{0x}E_{0z}}_{\text{球对称，积分为 0}}+\hat{e}_y\underbrace{\int\mathrm{d}\tau E_{0y}E_{0z}}_{\text{球对称，积分为 0}}+\hat{e}_z\underbrace{\int\mathrm{d}\tau E_{0z}E_{0z}}_{\text{球对称，}=\frac{1}{3}\int\mathrm{d}\tau\vec{E}_0^2}\Big]$$

$$=\beta\,\hat{e}_z\int\mathrm{d}\tau E_{0z}E_{0z}=\frac{1}{3}\vec{\beta}\int\mathrm{d}\tau\vec{E}_0^2=\frac{2}{3}\vec{\beta}U_0$$

固有场能量：$U_s=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int(\epsilon_0\vec{E}^2+\frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2)\,\mathrm{d}\tau=\left(1+\frac{2}{3}\beta^2\right)U_0$

其中：$U_0=\dfrac{\epsilon_0}{2}\displaystyle\int\vec{E}_0^2\,\mathrm{d}\tau$ 为静止点电荷的电场能量

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\beta^2)\vec{\mathscr{R}}}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}\mathscr{R}^3},$$

考虑粒子速度远小于光速：$\beta \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0(1+\frac{1}{2}\beta^2-\frac{3}{2}\beta^2\cos^2\theta), \\ \vec{B} = \dfrac{1}{c}\vec{\beta}\times\vec{E} = \dfrac{1}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}_0 \end{cases}$

$\vec{E}_0 = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$ 为库仑场。

固有场动量：$\vec{G}_s = \epsilon_0\displaystyle\int \vec{E}\times\vec{B}\,\mathrm{d}\tau = \frac{\epsilon_0}{c}\int \vec{E}_0\times(\vec{\beta}\times\vec{E}_0)\,\mathrm{d}\tau = \frac{4U_0}{3c}\vec{\beta}$

利用了：$\vec{\beta} = \beta\,\hat{e}_z$， $\vec{E}_0\times(\vec{\beta}\times\vec{E}_0) = \vec{\beta}\,\vec{E}_0^2 - (\vec{\beta}\cdot\vec{E}_0)\vec{E}_0$

$$\int \mathrm{d}\tau\,(\vec{\beta}\cdot\vec{E}_0)\vec{E}_0 = \beta\left[\hat{e}_x\underbrace{\int \mathrm{d}\tau E_{0x}E_{0z}}_{\text{球对称，积分为 0}} + \hat{e}_y\underbrace{\int \mathrm{d}\tau E_{0y}E_{0z}}_{\text{球对称，积分为 0}} + \hat{e}_z\underbrace{\int \mathrm{d}\tau E_{0z}E_{0z}}_{\text{球对称，}=\frac{1}{3}\int \mathrm{d}\tau \vec{E}_0^2}\right]$$

$$= \beta\,\hat{e}_z\int \mathrm{d}\tau E_{0z}E_{0z} = \frac{1}{3}\vec{\beta}\int \mathrm{d}\tau\vec{E}_0^2 = \frac{2}{3}\vec{\beta}U_0$$

固有场能量：$U_s = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int (\epsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2)\,\mathrm{d}\tau = \left(1+\frac{2}{3}\beta^2\right)U_0$

其中：$U_0 = \dfrac{\epsilon_0}{2}\displaystyle\int \vec{E}_0^2\,\mathrm{d}\tau$ 为静止点电荷的电场能量

粒子总动量、能量：$\begin{cases} \vec{G}_m + \vec{G}_s = \left(m_0 + \dfrac{4U_0}{3c^2}\right)\vec{v} \\ U_m + U_s = U_0 + \dfrac{1}{2}\left(m_0+\dfrac{4U_0}{3c^2}\right)v^2 \end{cases}$

$m = m_0 + m_{em}$

$m_{em} = \dfrac{4U_0}{3c^2}$ 称为电磁质量

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\beta^2)\vec{\mathscr{R}}}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}\mathscr{R}^3},$$

考虑粒子速度远小于光速：$\beta \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0(1+\frac{1}{2}\beta^2 - \frac{3}{2}\beta^2\cos^2\theta), \\ \vec{B} = \frac{1}{c}\vec{\beta}\times\vec{E} = \frac{1}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}_0 \end{cases}$

$\vec{E}_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$ 为库仑场。

固有场动量：$\vec{G}_s = \epsilon_0\int \vec{E}\times\vec{B}\,\mathrm{d}\tau = \frac{\epsilon_0}{c}\int \vec{E}_0\times(\vec{\beta}\times\vec{E}_0)\,\mathrm{d}\tau = \frac{4U_0}{3c}\vec{\beta}$

利用了：$\vec{\beta} = \beta\,\hat{e}_z$，$\vec{E}_0\times(\vec{\beta}\times\vec{E}_0) = \vec{\beta}\,\vec{E}_0^2 - (\vec{\beta}\cdot\vec{E}_0)\vec{E}_0$

$$\int \mathrm{d}\tau\,(\vec{\beta}\cdot\vec{E}_0)\vec{E}_0 = \beta\left[\hat{e}_x\underbrace{\int\mathrm{d}\tau\,E_{0x}E_{0z}}_{\text{球对称，积分为 0}} + \hat{e}_y\underbrace{\int\mathrm{d}\tau\,E_{0y}E_{0z}}_{\text{球对称，积分为 0}} + \hat{e}_z\underbrace{\int\mathrm{d}\tau\,E_{0z}E_{0z}}_{\text{球对称，}=\frac{1}{3}\int\mathrm{d}\tau\vec{E}_0^2}\right]$$

$$= \beta\,\hat{e}_z\int\mathrm{d}\tau\,E_{0z}E_{0z} = \frac{1}{3}\vec{\beta}\int\mathrm{d}\tau\,\vec{E}_0^2 = \frac{2}{3}\vec{\beta}U_0$$

固有场能量：$U_s = \frac{1}{2}\int(\epsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2)\,\mathrm{d}\tau = \left(1+\frac{2}{3}\beta^2\right)U_0$

其中：$U_0 = \frac{\epsilon_0}{2}\int\vec{E}_0^2\,\mathrm{d}\tau$ 为静止点电荷的电场能量

粒子总动量、能量：$\begin{cases} \vec{G}_m + \vec{G}_s = \left(m_0 + \frac{4U_0}{3c^2}\right)\vec{v} \\ U_m + U_s = U_0 + \frac{1}{2}\left(m_0+\frac{4U_0}{3c^2}\right)v^2 \end{cases}$ $\quad m = m_0 + m_{em}$，$m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2}$ 称为电磁质量

显然，m 才是实验所能测出的物理量

若将电子视为半径为 a 的球

Let there be light

若将电子视为半径为 a 的球

若电荷均匀分布于球面：$U_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$， $m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a c^2}\right)$

若将电子视为半径为 a 的球

若电荷均匀分布于球面：$U_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$，$\quad m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}\right)$

若电荷均匀分布于球体：$U_0 = \frac{3}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$，$\quad m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} = \frac{4}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}\right)$

若将电子视为半径为 a 的球

若电荷均匀分布于球面：$U_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$，$\quad m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}\right)$

若电荷均匀分布于球体：$U_0 = \frac{3}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$，$\quad m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} = \frac{4}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}\right)$

电磁质量数量级：$m_{em} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$

Let there be light

若将电子视为半径为 a 的球

若电荷均匀分布于球面：$U_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$， $m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}\right)$

若电荷均匀分布于球体：$U_0 = \frac{3}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$， $m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} = \frac{4}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}\right)$

电磁质量数量级：$m_{em} = \dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$ 若假定质量完全来自电磁质量：$m \approx m_{em} = \dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}$

若将电子视为半径为 a 的球

若电荷均匀分布于球面：$U_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$， $m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a c^2}\right)$

若电荷均匀分布于球体：$U_0 = \frac{3}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$， $m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} = \frac{4}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a c^2}\right)$

电磁质量数量级：$m_{em} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$ 若假定质量完全来自电磁质量：$m \approx m_{em} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a c^2}$

$\Longrightarrow$ 电子经典半径 $r_c = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} \sim 2.818 \times 10^{-13}\,\mathrm{cm}$

若将电子视为半径为 a 的球

若电荷均匀分布于球面：$U_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$， $m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}\right)$

若电荷均匀分布于球体：$U_0 = \frac{3}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$， $m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} = \frac{4}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}\right)$

电磁质量数量级：$m_{em} = \dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$　　若假定质量完全来自电磁质量：$m \approx m_{em} = \dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}$

$\Longrightarrow$　电子经典半径　$r_c = \dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \sim 2.818 \times 10^{-13}$ cm

说明：

若将电子视为半径为 a 的球

若电荷均匀分布于球面：$U_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$，$\quad m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a c^2}\right)$

若电荷均匀分布于球体：$U_0 = \frac{3}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$，$\quad m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} = \frac{4}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a c^2}\right)$

电磁质量数量级：$m_{em} = \dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$ 若假定质量完全来自电磁质量：$m \approx m_{em} = \dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a c^2}$

$$\Longrightarrow \quad \text{电子经典半径} \quad r_c = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} \sim 2.818 \times 10^{-13}\ \text{cm}$$

说明：

实际上，从宏观尺度到 10^{-15} cm 范围内,电子均可视为一点粒子，因此 r_c 不是电子尺度。

若将电子视为半径为 a 的球

若电荷均匀分布于球面：$U_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$， $m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}\right)$

若电荷均匀分布于球体：$U_0 = \frac{3}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$， $m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} = \frac{4}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}\right)$

电磁质量数量级：$m_{em} = \dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$ 若假定质量完全来自电磁质量：$m \approx m_{em} = \dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}$

$\Longrightarrow$ 电子经典半径 $r_c = \dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \sim 2.818 \times 10^{-13}$ cm

说明：

实际上，从宏观尺度到 10^{-15} cm 范围内,电子均可视为一点粒子，因此 r_c 不是电子尺度。

电子尺寸应小于 10^{-15} cm。

若将电子视为半径为 a 的球

若电荷均匀分布于球面：$U_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$， $m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}\right)$

若电荷均匀分布于球体：$U_0 = \frac{3}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$， $m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} = \frac{4}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}\right)$

电磁质量数量级：$m_{em} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$　　若假定质量完全来自电磁质量：$m \approx m_{em} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}$

$\Longrightarrow$ 电子经典半径 $r_c = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \sim 2.818 \times 10^{-13}$ cm

说明：

实际上，从宏观尺度到 10^{-15} cm 范围内,电子均可视为一点粒子，因此 r_c 不是电子尺度。

电子尺寸应小于 10^{-15} cm。另外电子质量也非完全来自电磁质量

若将电子视为半径为 a 的球

若电荷均匀分布于球面：$U_0 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$， $m_{em} = \dfrac{4U_0}{3c^2} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}\right)$

若电荷均匀分布于球体：$U_0 = \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$， $m_{em} = \dfrac{4U_0}{3c^2} = \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}\right)$

电磁质量数量级：$m_{em} = \dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$ 若假定质量完全来自电磁质量：$m \approx m_{em} = \dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}$

$$\Longrightarrow \quad \text{电子经典半径} \quad r_c = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \sim 2.818 \times 10^{-13}\ \text{cm}$$

说明：

实际上，从宏观尺度到 10^{-15} cm 范围内,电子均可视为一点粒子，因此 r_c 不是电子尺度。

电子尺寸应小于 10^{-15} cm。另外电子质量也非完全来自电磁质量

电子经典半径决定经典电动力学适用范围。仅在体系尺度远大于 r_c，经典电动力学才是正确的。

若将电子视为半径为 a 的球

若电荷均匀分布于球面：$U_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$， $m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}\right)$

若电荷均匀分布于球体：$U_0 = \frac{3}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$， $m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} = \frac{4}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}\right)$

电磁质量数量级：$m_{em} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$　　若假定质量完全来自电磁质量：$m \approx m_{em} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}$

$$\Longrightarrow \quad \text{电子经典半径} \quad r_c = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \sim 2.818 \times 10^{-13}\ \text{cm}$$

说明：

实际上，从宏观尺度到 10^{-15} cm 范围内,电子均可视为一点粒子，因此 r_c 不是电子尺度。

电子尺寸应小于 10^{-15} cm。另外电子质量也非完全来自电磁质量

电子经典半径决定经典电动力学适用范围。仅在体系尺度远大于 r_c，经典电动力学才是正确的。

二、辐射阻尼

若将电子视为半径为 a 的球

若电荷均匀分布于球面：$U_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$， $m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}\right)$

若电荷均匀分布于球体：$U_0 = \frac{3}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$， $m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} = \frac{4}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}\right)$

电磁质量数量级：$m_{em} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$ 　　若假定质量完全来自电磁质量：$m \approx m_{em} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}$

$$\Longrightarrow \quad \text{电子经典半径} \quad r_c = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \sim 2.818 \times 10^{-13}\ \text{cm}$$

说明：

实际上，从宏观尺度到 10^{-15} cm 范围内,电子均可视为一点粒子，因此 r_c 不是电子尺度。

电子尺寸应小于 10^{-15} cm。另外电子质量也非完全来自电磁质量

电子经典半径决定经典电动力学适用范围。仅在体系尺度远大于 r_c，经典电动力学才是正确的。

二、辐射阻尼

辐射导致粒子能量损失，物理上等效于（表现为）粒子受到一个辐射阻尼力

若将电子视为半径为 a 的球

若电荷均匀分布于球面：$U_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$，$\quad m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}\right)$

若电荷均匀分布于球体：$U_0 = \frac{3}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$，$\quad m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} = \frac{4}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}\right)$

电磁质量数量级：$m_{em} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$ 若假定质量完全来自电磁质量：$m \approx m_{em} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}$

$$\Longrightarrow \quad \text{电子经典半径} \quad r_c = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \sim 2.818 \times 10^{-13}\ \text{cm}$$

说明：

实际上，从宏观尺度到 10^{-15} cm 范围内,电子均可视为一点粒子，因此 r_c 不是电子尺度。

电子尺寸应小于 10^{-15} cm。另外电子质量也非完全来自电磁质量

电子经典半径决定经典电动力学适用范围。仅在体系尺度远大于 r_c，经典电动力学才是正确的。

二、辐射阻尼

辐射导致粒子能量损失，物理上等效于（表现为）粒子受到一个辐射阻尼力

—— 物理本质是粒子激发的场对粒子本身的反作用力

若将电子视为半径为 a 的球

若电荷均匀分布于球面：$U_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$， $m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}\right)$

若电荷均匀分布于球体：$U_0 = \frac{3}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$， $m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} = \frac{4}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}\right)$

电磁质量数量级：$m_{em} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$　　若假定质量完全来自电磁质量：$m \approx m_{em} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}$

$$\Longrightarrow \quad \text{电子经典半径} \quad r_c = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \sim 2.818 \times 10^{-13}\ \text{cm}$$

说明：

实际上，从宏观尺度到 10^{-15} cm 范围内,电子均可视为一点粒子，因此 r_c 不是电子尺度。

电子尺寸应小于 10^{-15} cm。另外电子质量也非完全来自电磁质量

电子经典半径决定经典电动力学适用范围。仅在体系尺度远大于 r_c，经典电动力学才是正确的。

二、辐射阻尼

辐射导致粒子能量损失，物理上等效于（表现为）粒子受到一个辐射阻尼力

—— 物理本质是粒子激发的场对粒子本身的反作用力

粒子运动方程：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = \vec{F}_e + \vec{F}_r$，　　$\vec{F}_e$，$\vec{F}_r$ 分别为外力和辐射阻尼力

若将电子视为半径为 a 的球

若电荷均匀分布于球面：$U_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$， $m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}\right)$

若电荷均匀分布于球体：$U_0 = \frac{3}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)$， $m_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} = \frac{4}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}\right)$

电磁质量数量级：$m_{em} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$ 若假定质量完全来自电磁质量：$m \approx m_{em} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ac^2}$

$\Longrightarrow$ 电子经典半径 $r_c = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \sim 2.818 \times 10^{-13}$ cm

说明：

实际上，从宏观尺度到 10^{-15} cm 范围内,电子均可视为一点粒子，因此 r_c 不是电子尺度。

电子尺寸应小于 10^{-15} cm。另外电子质量也非完全来自电磁质量

电子经典半径决定经典电动力学适用范围。仅在体系尺度远大于 r_c，经典电动力学才是正确的。

二、辐射阻尼

辐射导致粒子能量损失，物理上等效于（表现为）粒子受到一个辐射阻尼力

—— 物理本质是粒子激发的场对粒子本身的反作用力

粒子运动方程：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = \vec{F}_e + \vec{F}_r$， $\vec{F}_e$，$\vec{F}_r$ 分别为外力和辐射阻尼力

在运动速度远小于光速时，粒子辐射功率又 Larmor 公式给出：$P = \frac{q^2a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$

在运动速度远小于光速时，粒子辐射功率又 Larmor 公式给出：$P = \dfrac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$

在运动速度远小于光速时，粒子辐射功率又 Larmor 公式给出：$P = \dfrac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$

能量守恒：辐射功率应等于粒子克服辐射阻尼力所做的功 $\vec{\boldsymbol{F}}_r \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = -P$

在运动速度远小于光速时，粒子辐射功率又 Larmor 公式给出：$P = \dfrac{q^2a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$

能量守恒：辐射功率应等于粒子克服辐射阻尼力所做的功 $\vec{\boldsymbol{F}}_r \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = -P$

平均效应：

在运动速度远小于光速时，粒子辐射功率又 Larmor 公式给出：$P = \dfrac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$

能量守恒：辐射功率应等于粒子克服辐射阻尼力所做的功 $\vec{\boldsymbol{F}}_r \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = -P$

平均效应： 显然，上式只是一种平均效应，不可能每一瞬时都成立。

在运动速度远小于光速时，粒子辐射功率又 Larmor 公式给出：$P = \dfrac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$

能量守恒：辐射功率应等于粒子克服辐射阻尼力所做的功 $\vec{\boldsymbol{F}}_r \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = -P$

平均效应：显然，上式只是一种平均效应，不可能每一瞬时都成立。

因为粒子加速时，其固有场也发生变化，上式没有考虑固有场能量的变化。

在运动速度远小于光速时，粒子辐射功率又 Larmor 公式给出：$P = \dfrac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$

能量守恒：辐射功率应等于粒子克服辐射阻尼力所做的功　$\vec{\boldsymbol{F}}_r \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = -P$

平均效应：　显然，上式只是一种平均效应，不可能每一瞬时都成立。

因为粒子加速时，其固有场也发生变化，上式没有考虑固有场能量的变化。

对某一段时间作平均：$-\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \vec{\boldsymbol{F}}_r \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\, \mathrm{d}t = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \int_{t_1}^{t_2} \vec{\boldsymbol{a}}^2\, \mathrm{d}t$

在运动速度远小于光速时，粒子辐射功率又 Larmor 公式给出：$P=\dfrac{q^2a^2}{6\pi\epsilon_0c^3}$

能量守恒：辐射功率应等于粒子克服辐射阻尼力所做的功 $\vec{\boldsymbol{F}}_r\cdot\vec{\boldsymbol{v}}=-P$

平均效应： 显然，上式只是一种平均效应，不可能每一瞬时都成立。

因为粒子加速时，其固有场也发生变化，上式没有考虑固有场能量的变化。

对某一段时间作平均： $-\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\vec{\boldsymbol{F}}_r\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}t=\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0c^3}\int_{t_1}^{t_2}\vec{\boldsymbol{a}}^2\,\mathrm{d}t=\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0c^3}\int_{t_1}^{t_2}\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}$

在运动速度远小于光速时，粒子辐射功率又 Larmor 公式给出：$P = \dfrac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$

能量守恒：辐射功率应等于粒子克服辐射阻尼力所做的功 $\vec{\boldsymbol{F}}_r \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = -P$

平均效应： 显然，上式只是一种平均效应，不可能每一瞬时都成立。

因为粒子加速时，其固有场也发生变化，上式没有考虑固有场能量的变化。

对某一段时间作平均：$-\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \vec{\boldsymbol{F}}_r \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}t = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\int_{t_1}^{t_2} \vec{\boldsymbol{a}}^2\,\mathrm{d}t = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\int_{t_1}^{t_2} \vec{\boldsymbol{a}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}$

分部积分：$-\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \vec{\boldsymbol{F}}_r \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\left(\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\vec{\boldsymbol{v}}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}t \right)$

在运动速度远小于光速时，粒子辐射功率又 Larmor 公式给出：$P=\dfrac{q^2a^2}{6\pi\epsilon_0c^3}$

能量守恒：辐射功率应等于粒子克服辐射阻尼力所做的功 $\vec{\boldsymbol{F}}_r\cdot\vec{\boldsymbol{v}}=-P$

平均效应： 显然，上式只是一种平均效应，不可能每一瞬时都成立。

因为粒子加速时，其固有场也发生变化，上式没有考虑固有场能量的变化。

对某一段时间作平均：$-\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\vec{\boldsymbol{F}}_r\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}t=\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0c^3}\int_{t_1}^{t_2}\vec{\boldsymbol{a}}^2\,\mathrm{d}t=\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0c^3}\int_{t_1}^{t_2}\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}$

分部积分：$-\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\vec{\boldsymbol{F}}_r\cdot\vec{\boldsymbol{v}}=\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0c^3}\left(\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\ddot{\vec{\boldsymbol{v}}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}t\right)$

假定 t_1 和 t_2 时刻粒子速度加速度相同：$\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{\boldsymbol{F}}_r-\frac{\mu_0q^2\ddot{\vec{\boldsymbol{v}}}}{6\pi c}\right)\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}t=0$

在运动速度远小于光速时，粒子辐射功率又 Larmor 公式给出：$P=\dfrac{q^2a^2}{6\pi\epsilon_0c^3}$

能量守恒：辐射功率应等于粒子克服辐射阻尼力所做的功 $\vec{\boldsymbol{F}}_r\cdot\vec{\boldsymbol{v}}=-P$

平均效应： 显然，上式只是一种平均效应，不可能每一瞬时都成立。

因为粒子加速时，其固有场也发生变化，上式没有考虑固有场能量的变化。

对某一段时间作平均：$-\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\vec{\boldsymbol{F}}_r\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}t=\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0c^3}\int_{t_1}^{t_2}\vec{\boldsymbol{a}}^2\,\mathrm{d}t=\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0c^3}\int_{t_1}^{t_2}\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}$

分部积分：$-\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\vec{\boldsymbol{F}}_r\cdot\vec{\boldsymbol{v}}=\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0c^3}\left(\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\ddot{\vec{\boldsymbol{v}}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}t\right)$

假定 t_1 和 t_2 时刻粒子速度加速度相同：$\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{\boldsymbol{F}}_r-\frac{\mu_0q^2\ddot{\vec{\boldsymbol{v}}}}{6\pi c}\right)\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}t=0$

$$\Longrightarrow\quad\boxed{\vec{\boldsymbol{F}}_r=\frac{\mu_0q^2\ddot{\vec{\boldsymbol{v}}}}{6\pi c}\quad\text{—— Abraham-Lorentz 辐射阻尼力公式}}$$

在运动速度远小于光速时，粒子辐射功率又 Larmor 公式给出：$P = \dfrac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$

能量守恒：辐射功率应等于粒子克服辐射阻尼力所做的功 $\vec{\boldsymbol{F}}_r \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = -P$

平均效应： 显然，上式只是一种平均效应，不可能每一瞬时都成立。

因为粒子加速时，其固有场也发生变化，上式没有考虑固有场能量的变化。

对某一段时间作平均：$-\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \vec{\boldsymbol{F}}_r \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}t = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\int_{t_1}^{t_2} \vec{\boldsymbol{a}}^2\,\mathrm{d}t = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\int_{t_1}^{t_2} \vec{\boldsymbol{a}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}$

分部积分：$-\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \vec{\boldsymbol{F}}_r \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\left(\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\vec{\boldsymbol{v}}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}t \right)$

假定 t_1 和 t_2 时刻粒子速度加速度相同：$\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{\boldsymbol{F}}_r - \frac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{\boldsymbol{v}}}}{6\pi c} \right) \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}t = 0$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\vec{\boldsymbol{F}}_r = \dfrac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{\boldsymbol{v}}}}{6\pi c} \quad \text{—— Abraham-Lorentz 辐射阻尼力公式}}$

平均效应
并非每个瞬时成立

在运动速度远小于光速时，粒子辐射功率又 Larmor 公式给出：$P = \dfrac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$

能量守恒：辐射功率应等于粒子克服辐射阻尼力所做的功 $\vec{\boldsymbol{F}}_r \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = -P$

平均效应： 显然，上式只是一种平均效应，不可能每一瞬时都成立。

因为粒子加速时，其固有场也发生变化，上式没有考虑固有场能量的变化。

对某一段时间作平均：$-\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \vec{\boldsymbol{F}}_r \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}t = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\int_{t_1}^{t_2} \vec{\boldsymbol{a}}^2\,\mathrm{d}t = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\int_{t_1}^{t_2} \vec{\boldsymbol{a}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}$

分部积分：$-\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \vec{\boldsymbol{F}}_r \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\left(\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\vec{\boldsymbol{v}}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}t\right)$

假定 t_1 和 t_2 时刻粒子速度加速度相同：$\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{\boldsymbol{F}}_r - \frac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{\boldsymbol{v}}}}{6\pi c}\right) \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}t = 0$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\vec{\boldsymbol{F}}_r = \frac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{\boldsymbol{v}}}}{6\pi c} \quad \text{—— Abraham-Lorentz 辐射阻尼力公式}}$$

平均效应
并非每个瞬时成立

上述推导并不严格，实际上它仅给出某特殊时间间隔内平行于速度方向的平均辐射阻尼力分量

在运动速度远小于光速时，粒子辐射功率又 Larmor 公式给出：$P = \dfrac{q^2a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$

能量守恒：辐射功率应等于粒子克服辐射阻尼力所做的功 $\vec{F}_r \cdot \vec{v} = -P$

平均效应： 显然，上式只是一种平均效应，不可能每一瞬时都成立。

因为粒子加速时，其固有场也发生变化，上式没有考虑固有场能量的变化。

对某一段时间作平均： $-\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_r \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}t = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\int_{t_1}^{t_2} \vec{a}^2\,\mathrm{d}t = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\int_{t_1}^{t_2} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\vec{v}$

分部积分： $-\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_r \cdot \vec{v} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\left(\vec{a}\cdot\vec{v}\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\vec{v}}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t\right)$

假定 t_1 和 t_2 时刻粒子速度加速度相同： $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{F}_r - \frac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{v}}}{6\pi c}\right)\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t = 0$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\vec{F}_r = \dfrac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{v}}}{6\pi c}}$ —— Abraham-Lorentz 辐射阻尼力公式

平均效应
并非每个瞬时成立

上述推导并不严格，实际上它仅给出某特殊时间间隔内平行于速度方向的平均辐射阻尼力分量

若没有外力，有：$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_r = \dfrac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{v}}}{6\pi c}$

在运动速度远小于光速时，粒子辐射功率又 Larmor 公式给出：$P = \dfrac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$

能量守恒：辐射功率应等于粒子克服辐射阻尼力所做的功 $\vec{\boldsymbol{F}}_r \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = -P$

平均效应：显然，上式只是一种平均效应，不可能每一瞬时都成立。

因为粒子加速时，其固有场也发生变化，上式没有考虑固有场能量的变化。

对某一段时间作平均：$-\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \vec{\boldsymbol{F}}_r \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\, \mathrm{d}t = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\int_{t_1}^{t_2} \vec{\boldsymbol{a}}^2\, \mathrm{d}t = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\int_{t_1}^{t_2} \vec{\boldsymbol{a}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}$

分部积分：$-\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \vec{\boldsymbol{F}}_r \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\left(\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\vec{\boldsymbol{v}}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\, \mathrm{d}t \right)$

假定 t_1 和 t_2 时刻粒子速度加速度相同：$\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{\boldsymbol{F}}_r - \frac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{\boldsymbol{v}}}}{6\pi c} \right) \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\, \mathrm{d}t = 0$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{\boldsymbol{F}}_r = \frac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{\boldsymbol{v}}}}{6\pi c} \quad \text{—— Abraham-Lorentz 辐射阻尼力公式}}$$

平均效应
并非每个瞬时成立

上述推导并不严格，实际上它仅给出某特殊时间间隔内平行于速度方向的平均辐射阻尼力分量

若没有外力，有：$m\dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \vec{\boldsymbol{F}}_r = \dfrac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{\boldsymbol{v}}}}{6\pi c} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = 0 \\ \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_0\, e^{t/\tau}, \qquad \tau = \dfrac{\mu_0 q^2}{6\pi m c} \end{cases}$

若没有外力，有：$m\dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \vec{\boldsymbol{F}}_r = \dfrac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{\boldsymbol{v}}}}{6\pi c}$

Let there be light

若没有外力，有：$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_r = \dfrac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{v}}}{6\pi c} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\vec{v}} = 0 \\ \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_0\, e^{t/\tau}, \end{cases}$ 对电子 $\tau = 6 \times 10^{-24}$ s

若没有外力，有：$m\dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \vec{\boldsymbol{F}}_r = \dfrac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{\boldsymbol{v}}}}{6\pi c} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = 0 \\ \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_0\, e^{t/\tau}, \end{cases}$ 对电子 $\tau = 6\times 10^{-24}$ s

第二个解表明若撤去外力，粒子将自动加速 —— 显然不符合物理。

若没有外力，有：$m\dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \vec{\boldsymbol{F}}_r = \dfrac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{\boldsymbol{v}}}}{6\pi c} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = 0 \\ \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_0 \, e^{t/\tau}, \end{cases}$ 对电子 $\tau = 6 \times 10^{-24}$ s

第二个解表明若撤去外力，粒子将自动加速 —— 显然不符合物理。

第一个解表明辐射阻尼力 $\vec{\boldsymbol{F}}_r$ 引起的加速度可略，

若没有外力，有：$m\dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \vec{\boldsymbol{F}}_r = \dfrac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{\boldsymbol{v}}}}{6\pi c} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = 0 \\ \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_0\, e^{t/\tau}, \end{cases}$ 对电子 $\tau = 6 \times 10^{-24}$ s

第二个解表明若撤去外力，粒子将自动加速 —— 显然不符合物理。

第一个解表明辐射阻尼力 $\vec{\boldsymbol{F}}_r$ 引起的加速度可略，即 $\vec{\boldsymbol{F}}_r$ 引起的加速度远小于外力引起的加速度。

若没有外力，有：$m\dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \vec{\boldsymbol{F}}_r = \dfrac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{\boldsymbol{v}}}}{6\pi c} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = 0 \\ \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_0\, e^{t/\tau}, \end{cases}$　　对电子 $\tau = 6 \times 10^{-24}$ s

第二个解表明若撤去外力，粒子将自动加速 —— 显然不符合物理。

第一个解表明辐射阻尼力 $\vec{\boldsymbol{F}}_r$ 引起的加速度可略，即 $\vec{\boldsymbol{F}}_r$ 引起的加速度远小于外力引起的加速度。

—— 只有在辐射阻尼力远小于外力（其它的力），Abraham-Lorentz 辐射阻尼力公式才适用。

若没有外力，有：$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_r = \dfrac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{v}}}{6\pi c} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\vec{v}} = 0 \\ \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_0\, e^{t/\tau}, \end{cases}$ 对电子 $\tau = 6 \times 10^{-24}$ s

第二个解表明若撤去外力，粒子将自动加速 —— 显然不符合物理。

第一个解表明辐射阻尼力 $\vec{F}_r$ 引起的加速度可略，即 $\vec{F}_r$ 引起的加速度远小于外力引起的加速度。

—— 只有在辐射阻尼力远小于外力（其它的力），Abraham-Lorentz 辐射阻尼力公式才适用。

—— 辐射阻尼力可视为微扰时，才可用 Abraham-Lorentz 公式。

若没有外力，有：$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_r = \dfrac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{v}}}{6\pi c} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\vec{v}} = 0 \\ \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_0\, e^{t/\tau}, \end{cases}$ 对电子 $\tau = 6 \times 10^{-24}$ s

第二个解表明若撤去外力，粒子将自动加速 —— 显然不符合物理。

第一个解表明辐射阻尼力 $\vec{F}_r$ 引起的加速度可略，即 $\vec{F}_r$ 引起的加速度远小于外力引起的加速度。

—— 只有在辐射阻尼力远小于外力（其它的力），Abraham-Lorentz 辐射阻尼力公式才适用。

—— 辐射阻尼力可视为微扰时，才可用 Abraham-Lorentz 公式。

对辐射、辐射反作用 (radiation reaction) 的严格求解需要量子电动力学。

若没有外力，有：$m\dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \vec{\boldsymbol{F}}_r = \dfrac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{\boldsymbol{v}}}}{6\pi c} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = 0 \\ \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_0\, e^{t/\tau}, \end{cases}$ 对电子 $\tau = 6 \times 10^{-24}$ s

第二个解表明若撤去外力，粒子将自动加速 —— 显然不符合物理。

第一个解表明辐射阻尼力 $\vec{\boldsymbol{F}}_r$ 引起的加速度可略，即 $\vec{\boldsymbol{F}}_r$ 引起的加速度远小于外力引起的加速度。

—— 只有在辐射阻尼力远小于外力（其它的力），Abraham-Lorentz 辐射阻尼力公式才适用。

—— 辐射阻尼力可视为微扰时，才可用 Abraham-Lorentz 公式。

对辐射、辐射反作用 (radiation reaction) 的严格求解需要量子电动力学。

三、辐射谱线的自然宽度

若没有外力，有：$m\dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \vec{\boldsymbol{F}}_r = \dfrac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{\boldsymbol{v}}}}{6\pi c} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = 0 \\ \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_0 \, e^{t/\tau}, \end{cases}$ 对电子 $\tau = 6 \times 10^{-24}$ s

第二个解表明若撤去外力，粒子将自动加速 —— 显然不符合物理。

第一个解表明辐射阻尼力 $\vec{\boldsymbol{F}}_r$ 引起的加速度可略，即 $\vec{\boldsymbol{F}}_r$ 引起的加速度远小于外力引起的加速度。

—— 只有在辐射阻尼力远小于外力（其它的力），Abraham-Lorentz 辐射阻尼力公式才适用。

—— 辐射阻尼力可视为微扰时，才可用 Abraham-Lorentz 公式。

对辐射、辐射反作用 (radiation reaction) 的严格求解需要量子电动力学。

三、辐射谱线的自然宽度

原子中的电子从高能级跃迁到低能级会辐射出一定频率的光子 —— 光谱中的谱线

若没有外力，有：$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_r = \dfrac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{v}}}{6\pi c} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\vec{v}} = 0 \\ \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_0\, e^{t/\tau}, \end{cases}$ 对电子 $\tau = 6 \times 10^{-24}$ s

第二个解表明若撤去外力，粒子将自动加速 —— 显然不符合物理。

第一个解表明辐射阻尼力 $\vec{F}_r$ 引起的加速度可略，即 $\vec{F}_r$ 引起的加速度远小于外力引起的加速度。

—— 只有在辐射阻尼力远小于外力（其它的力），Abraham-Lorentz 辐射阻尼力公式才适用。

—— 辐射阻尼力可视为微扰时，才可用 Abraham-Lorentz 公式。

对辐射、辐射反作用 (radiation reaction) 的严格求解需要量子电动力学。

三、辐射谱线的自然宽度

原子中的电子从高能级跃迁到低能级会辐射出一定频率的光子 —— 光谱中的谱线

实验发现：谱线谱线不是单色的，有一定频率分布，呈现一定的宽度 —— 谱线的自然宽度

若没有外力，有：$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_r = \dfrac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{v}}}{6\pi c} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\vec{v}} = 0 \\ \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_0\, e^{t/\tau}, \end{cases}$ 对电子 $\tau = 6 \times 10^{-24}$ s

第二个解表明若撤去外力，粒子将自动加速 —— 显然不符合物理。

第一个解表明辐射阻尼力 $\vec{F}_r$ 引起的加速度可略，即 $\vec{F}_r$ 引起的加速度远小于外力引起的加速度。

—— 只有在辐射阻尼力远小于外力（其它的力），Abraham-Lorentz 辐射阻尼力公式才适用。

—— 辐射阻尼力可视为微扰时，才可用 Abraham-Lorentz 公式。

对辐射、辐射反作用 (radiation reaction) 的严格求解需要量子电动力学。

三、辐射谱线的自然宽度

原子中的电子从高能级跃迁到低能级会辐射出一定频率的光子 —— 光谱中的谱线

实验发现：谱线谱线不是单色的，有一定频率分布，呈现一定的宽度 —— 谱线的自然宽度

经典电动力学模型：电子简谐振动，若无辐射阻尼，辐射频率等于其谐振频率

若没有外力，有：$m\dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \vec{\boldsymbol{F}}_r = \dfrac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{\boldsymbol{v}}}}{6\pi c} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = 0 \\ \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_0\, e^{t/\tau}, \end{cases}$ 对电子 $\tau = 6 \times 10^{-24}$ s

第二个解表明若撤去外力，粒子将自动加速 —— 显然不符合物理。

第一个解表明辐射阻尼力 $\vec{\boldsymbol{F}}_r$ 引起的加速度可略，即 $\vec{\boldsymbol{F}}_r$ 引起的加速度远小于外力引起的加速度。

—— 只有在辐射阻尼力远小于外力（其它的力），Abraham-Lorentz 辐射阻尼力公式才适用。

—— 辐射阻尼力可视为微扰时，才可用 Abraham-Lorentz 公式。

对辐射、辐射反作用 (radiation reaction) 的严格求解需要量子电动力学。

三、辐射谱线的自然宽度

原子中的电子从高能级跃迁到低能级会辐射出一定频率的光子 —— 光谱中的谱线

实验发现：谱线谱线不是单色的，有一定频率分布，呈现一定的宽度 —— 谱线的自然宽度

经典电动力学模型：电子简谐振动，若无辐射阻尼，辐射频率等于其谐振频率 —— 单色谱线

若没有外力，有：$m\dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \vec{\boldsymbol{F}}_r = \dfrac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{\boldsymbol{v}}}}{6\pi c} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = 0 \\ \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_0\, e^{t/\tau}, \end{cases}$ 对电子 $\tau = 6 \times 10^{-24}$ s

第二个解表明若撤去外力，粒子将自动加速 —— 显然不符合物理。

第一个解表明辐射阻尼力 $\vec{\boldsymbol{F}}_r$ 引起的加速度可略，即 $\vec{\boldsymbol{F}}_r$ 引起的加速度远小于外力引起的加速度。

—— 只有在辐射阻尼力远小于外力（其它的力），Abraham-Lorentz 辐射阻尼力公式才适用。

—— 辐射阻尼力可视为微扰时，才可用 Abraham-Lorentz 公式。

对辐射、辐射反作用 (radiation reaction) 的严格求解需要量子电动力学。

三、辐射谱线的自然宽度

原子中的电子从高能级跃迁到低能级会辐射出一定频率的光子 —— 光谱中的谱线

实验发现：谱线谱线不是单色的，有一定频率分布，呈现一定的宽度 —— 谱线的自然宽度

经典电动力学模型：电子简谐振动，若无辐射阻尼，辐射频率等于其谐振频率 —— 单色谱线

若存在辐射阻尼，电子做阻尼简谐振动，辐射场呈现频谱分布，导致出现辐射谱线的自然宽度

若没有外力，有：$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_r = \dfrac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{v}}}{6\pi c} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\vec{v}} = 0 \\ \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_0\, e^{t/\tau}, \end{cases}$ 对电子 $\tau = 6 \times 10^{-24}$ s

第二个解表明若撤去外力，粒子将自动加速 —— 显然不符合物理。

第一个解表明辐射阻尼力 $\vec{F}_r$ 引起的加速度可略，即 $\vec{F}_r$ 引起的加速度远小于外力引起的加速度。

—— 只有在辐射阻尼力远小于外力（其它的力），Abraham-Lorentz 辐射阻尼力公式才适用。

—— 辐射阻尼力可视为微扰时，才可用 Abraham-Lorentz 公式。

对辐射、辐射反作用 (radiation reaction) 的严格求解需要量子电动力学。

三、辐射谱线的自然宽度

原子中的电子从高能级跃迁到低能级会辐射出一定频率的光子 —— 光谱中的谱线

实验发现：谱线谱线不是单色的，有一定频率分布，呈现一定的宽度 —— 谱线的自然宽度

经典电动力学模型：电子简谐振动，若无辐射阻尼，辐射频率等于其谐振频率 —— 单色谱线

若存在辐射阻尼，电子做阻尼简谐振动，辐射场呈现频谱分布，导致出现辐射谱线的自然宽度

运动方程：$m\dot{v} = -kx + \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{2e^2}{3c^3}\ddot{v}, \qquad k = m\omega_0^2$

若没有外力，有：$m\dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \vec{\boldsymbol{F}}_r = \dfrac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{\boldsymbol{v}}}}{6\pi c} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = 0 \\ \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_0\, e^{t/\tau}, \end{cases}$ 对电子 $\tau = 6 \times 10^{-24}$ s

第二个解表明若撤去外力，粒子将自动加速 —— 显然不符合物理。

第一个解表明辐射阻尼力 $\vec{\boldsymbol{F}}_r$ 引起的加速度可略，即 $\vec{\boldsymbol{F}}_r$ 引起的加速度远小于外力引起的加速度。

—— 只有在辐射阻尼力远小于外力（其它的力），Abraham-Lorentz 辐射阻尼力公式才适用。

—— 辐射阻尼力可视为微扰时，才可用 Abraham-Lorentz 公式。

对辐射、辐射反作用 (radiation reaction) 的严格求解需要量子电动力学。

三、辐射谱线的自然宽度

原子中的电子从高能级跃迁到低能级会辐射出一定频率的光子 —— 光谱中的谱线

实验发现：谱线谱线不是单色的，有一定频率分布，呈现一定的宽度 —— 谱线的自然宽度

经典电动力学模型：电子简谐振动，若无辐射阻尼，辐射频率等于其谐振频率 —— 单色谱线

若存在辐射阻尼，电子做阻尼简谐振动，辐射场呈现频谱分布，导致出现辐射谱线的自然宽度

运动方程：$m\dot{v} = -kx + \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{2e^2}{3c^3}\ddot{v}, \qquad k = m\omega_0^2 \quad\Longrightarrow\quad \ddot{x} = -\omega_0^2 x + \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{2e^2}{3mc^3}\ddot{v}$

若没有外力，有：$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_r = \dfrac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{v}}}{6\pi c} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\vec{v}} = 0 \\ \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_0\, e^{t/\tau}, \end{cases}$ 对电子 $\tau = 6 \times 10^{-24}$ s

第二个解表明若撤去外力，粒子将自动加速 —— 显然不符合物理。

第一个解表明辐射阻尼力 $\vec{F}_r$ 引起的加速度可略，即 $\vec{F}_r$ 引起的加速度远小于外力引起的加速度。

—— 只有在辐射阻尼力远小于外力（其它的力），Abraham-Lorentz 辐射阻尼力公式才适用。

—— 辐射阻尼力可视为微扰时，才可用 Abraham-Lorentz 公式。

对辐射、辐射反作用 (radiation reaction) 的严格求解需要量子电动力学。

三、辐射谱线的自然宽度

原子中的电子从高能级跃迁到低能级会辐射出一定频率的光子 —— 光谱中的谱线

实验发现：谱线谱线不是单色的，有一定频率分布，呈现一定的宽度 —— 谱线的自然宽度

经典电动力学模型：电子简谐振动，若无辐射阻尼，辐射频率等于其谐振频率 —— 单色谱线

若存在辐射阻尼，电子做阻尼简谐振动，辐射场呈现频谱分布，导致出现辐射谱线的自然宽度

运动方程：$m\dot{v} = -kx + \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{2e^2}{3c^3}\ddot{v}, \qquad k = m\omega_0^2 \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x} = -\omega_0^2 x + \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{2e^2}{3mc^3}\ddot{v}$

辐射阻尼力很小，略去辐射阻尼力得方程零级近似解：$x = x_0 e^{-i\omega_0 t}$

若没有外力，有：$m\dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \vec{\boldsymbol{F}}_r = \dfrac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{\boldsymbol{v}}}}{6\pi c} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = 0 \\ \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_0\, e^{t/\tau}, \end{cases}$ 对电子 $\tau = 6 \times 10^{-24}$ s

第二个解表明若撤去外力，粒子将自动加速 —— 显然不符合物理。

第一个解表明辐射阻尼力 $\vec{\boldsymbol{F}}_r$ 引起的加速度可略，即 $\vec{\boldsymbol{F}}_r$ 引起的加速度远小于外力引起的加速度。

—— 只有在辐射阻尼力远小于外力（其它的力），Abraham-Lorentz 辐射阻尼力公式才适用。

—— 辐射阻尼力可视为微扰时，才可用 Abraham-Lorentz 公式。

对辐射、辐射反作用 (radiation reaction) 的严格求解需要量子电动力学。

三、辐射谱线的自然宽度

原子中的电子从高能级跃迁到低能级会辐射出一定频率的光子 —— 光谱中的谱线

实验发现：谱线谱线不是单色的，有一定频率分布，呈现一定的宽度 —— 谱线的自然宽度

经典电动力学模型：电子简谐振动，若无辐射阻尼，辐射频率等于其谐振频率 —— 单色谱线

若存在辐射阻尼，电子做阻尼简谐振动，辐射场呈现频谱分布，导致出现辐射谱线的自然宽度

运动方程：$m\dot{v} = -kx + \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{2e^2}{3c^3}\ddot{v}, \qquad k = m\omega_0^2 \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x} = -\omega_0^2 x + \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{2e^2}{3mc^3}\ddot{v}$

辐射阻尼力很小，略去辐射阻尼力得方程零级近似解：$x = x_0 e^{-i\omega_0 t} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{v} = i\omega_0^3 x$

若没有外力，有：$m\dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \vec{\boldsymbol{F}}_r = \dfrac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{\boldsymbol{v}}}}{6\pi c} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = 0 \\ \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_0 \, e^{t/\tau}, \end{cases}$ 对电子 $\tau = 6 \times 10^{-24}$ s

第二个解表明若撤去外力，粒子将自动加速 —— 显然不符合物理。

第一个解表明辐射阻尼力 $\vec{\boldsymbol{F}}_r$ 引起的加速度可略，即 $\vec{\boldsymbol{F}}_r$ 引起的加速度远小于外力引起的加速度。

—— 只有在辐射阻尼力远小于外力（其它的力），Abraham-Lorentz 辐射阻尼力公式才适用。

—— 辐射阻尼力可视为微扰时，才可用 Abraham-Lorentz 公式。

对辐射、辐射反作用 (radiation reaction) 的严格求解需要量子电动力学。

三、辐射谱线的自然宽度

原子中的电子从高能级跃迁到低能级会辐射出一定频率的光子 —— 光谱中的谱线

实验发现：谱线谱线不是单色的，有一定频率分布，呈现一定的宽度 —— 谱线的自然宽度

经典电动力学模型：电子简谐振动，若无辐射阻尼，辐射频率等于其谐振频率 —— 单色谱线

若存在辐射阻尼，电子做阻尼简谐振动，辐射场呈现频谱分布，导致出现辐射谱线的自然宽度

运动方程：$m\dot{v} = -kx + \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{2e^2}{3c^3}\,\ddot{v}, \qquad k = m\omega_0^2 \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x} = -\omega_0^2 x + \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{2e^2}{3mc^3}\ddot{v}$

辐射阻尼力很小，略去辐射阻尼力得方程零级近似解：$x = x_0 e^{-i\omega_0 t} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{v} = i\omega_0^3 x$

一级近似方程：$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \dfrac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\dfrac{\omega_0^3}{mc^3}\,x$

若没有外力，有：$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_r = \dfrac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{v}}}{6\pi c} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\vec{v}} = 0 \\ \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_0\, e^{t/\tau}, \end{cases}$ 对电子 $\tau = 6 \times 10^{-24}$ s

第二个解表明若撤去外力，粒子将自动加速 —— 显然不符合物理。

第一个解表明辐射阻尼力 $\vec{F}_r$ 引起的加速度可略，即 $\vec{F}_r$ 引起的加速度远小于外力引起的加速度。

—— 只有在辐射阻尼力远小于外力（其它的力），Abraham-Lorentz 辐射阻尼力公式才适用。

—— 辐射阻尼力可视为微扰时，才可用 Abraham-Lorentz 公式。

对辐射、辐射反作用 (radiation reaction) 的严格求解需要量子电动力学。

三、辐射谱线的自然宽度

原子中的电子从高能级跃迁到低能级会辐射出一定频率的光子 —— 光谱中的谱线

实验发现：谱线谱线不是单色的，有一定频率分布，呈现一定的宽度 —— 谱线的自然宽度

经典电动力学模型：电子简谐振动，若无辐射阻尼，辐射频率等于其谐振频率 —— 单色谱线

若存在辐射阻尼，电子做阻尼简谐振动，辐射场呈现频谱分布，导致出现辐射谱线的自然宽度

运动方程：$m\dot{v} = -kx + \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{2e^2}{3c^3}\ddot{v}, \qquad k = m\omega_0^2 \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x} = -\omega_0^2 x + \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{2e^2}{3mc^3}\ddot{v}$

辐射阻尼力很小，略去辐射阻尼力得方程零级近似解：$x = x_0 e^{-i\omega_0 t} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{v} = i\omega_0^3 x$

一级近似方程：$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \dfrac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\dfrac{\omega_0^3}{mc^3}\,x \quad \Longrightarrow \quad x = x_0 e^{-i\omega t},$

若没有外力，有：$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_r = \dfrac{\mu_0 q^2 \ddot{\vec{v}}}{6\pi c} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\vec{v}} = 0 \\ \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_0\, e^{t/\tau}, \end{cases}$ 对电子 $\tau = 6 \times 10^{-24}$ s

第二个解表明若撤去外力，粒子将自动加速 —— 显然不符合物理。

第一个解表明辐射阻尼力 $\vec{F}_r$ 引起的加速度可略，即 $\vec{F}_r$ 引起的加速度远小于外力引起的加速度。

—— 只有在辐射阻尼力远小于外力（其它的力），Abraham-Lorentz 辐射阻尼力公式才适用。

—— 辐射阻尼力可视为微扰时，才可用 Abraham-Lorentz 公式。

对辐射、辐射反作用 (radiation reaction) 的严格求解需要量子电动力学。

三、辐射谱线的自然宽度

原子中的电子从高能级跃迁到低能级会辐射出一定频率的光子 —— 光谱中的谱线

实验发现：谱线谱线不是单色的，有一定频率分布，呈现一定的宽度 —— 谱线的自然宽度

经典电动力学模型：电子简谐振动，若无辐射阻尼，辐射频率等于其谐振频率 —— 单色谱线

若存在辐射阻尼，电子做阻尼简谐振动，辐射场呈现频谱分布，导致出现辐射谱线的自然宽度

运动方程：$m\dot{v} = -kx + \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{2e^2}{3c^3}\ddot{v}, \qquad k = m\omega_0^2 \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x} = -\omega_0^2 x + \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{2e^2}{3mc^3}\ddot{v}$

辐射阻尼力很小，略去辐射阻尼力得方程零级近似解：$x = x_0 e^{-i\omega_0 t} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{v} = i\omega_0^3 x$

一级近似方程：$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \dfrac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\dfrac{\omega_0^3}{mc^3}x \quad \Longrightarrow \quad x = x_0 e^{-i\omega t}, \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \dfrac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\dfrac{\omega_0^3}{mc^3}$

一级近似运动方程：$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \dfrac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\dfrac{\omega_0^3}{mc^3}\, x$

一级近似运动方程： $\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \dfrac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\dfrac{\omega_0^3}{mc^3}\,x$

$x = x_0 e^{-i\omega t}$,

一级近似运动方程：$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \dfrac{ie^2}{6\pi\epsilon_0} \dfrac{\omega_0^3}{mc^3}\, x$

$$x = x_0 e^{-i\omega t}, \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{ie^2}{6\pi\epsilon_0} \frac{\omega_0^3}{mc^3}$$

一级近似运动方程：$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \dfrac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\dfrac{\omega_0^3}{mc^3}\, x$

$$x = x_0 e^{-i\omega t}, \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\frac{\omega_0^3}{mc^3} \quad \Longrightarrow \quad \omega = \omega_0 - i\frac{\gamma}{2}, \qquad \gamma = \frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$$

一级近似运动方程：$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \dfrac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\dfrac{\omega_0^3}{mc^3}\, x$

$$x = x_0 e^{-i\omega t}, \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\frac{\omega_0^3}{mc^3} \quad \Longrightarrow \quad \omega = \omega_0 - i\frac{\gamma}{2}, \qquad \gamma = \frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$$

一级近似适用条件：$\left|\dfrac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\dfrac{\omega_0^3}{mc^3}x\right| \ll |\omega_0^2 x|$

一级近似运动方程：$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \dfrac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\dfrac{\omega_0^3}{mc^3}\,x$

$$x = x_0 e^{-i\omega t}, \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\frac{\omega_0^3}{mc^3} \quad\Longrightarrow\quad \omega = \omega_0 - i\frac{\gamma}{2}, \qquad \gamma = \frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$$

一级近似适用条件：$\left|\dfrac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\dfrac{\omega_0^3}{mc^3}x\right| \ll |\omega_0^2 x| \quad\Longrightarrow\quad \gamma \ll \omega_0$

一级近似运动方程：$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \frac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\frac{\omega_0^3}{mc^3}\, x$

$$x = x_0 e^{-i\omega t}, \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\frac{\omega_0^3}{mc^3} \quad \Longrightarrow \quad \omega = \omega_0 - i\frac{\gamma}{2}, \qquad \gamma = \frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$$

一级近似适用条件：$\left|\frac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\frac{\omega_0^3}{mc^3}x\right| \ll |\omega_0^2 x| \quad \Longrightarrow \quad \gamma \ll \omega_0 \quad \Longrightarrow \quad r_c \ll \frac{\lambda_0}{2\pi}$

一级近似运动方程：$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \frac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\frac{\omega_0^3}{mc^3}\,x$

$$x = x_0 e^{-i\omega t}, \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\frac{\omega_0^3}{mc^3} \quad\Longrightarrow\quad \omega = \omega_0 - i\frac{\gamma}{2}, \qquad \gamma = \frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$$

一级近似适用条件：$\left|\frac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\frac{\omega_0^3}{mc^3}x\right| \ll |\omega_0^2 x| \quad\Longrightarrow\quad \gamma \ll \omega_0 \quad\Longrightarrow\quad r_c \ll \frac{\lambda_0}{2\pi}$

$$x = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega_0 t}$$

一级近似运动方程：$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \dfrac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\dfrac{\omega_0^3}{mc^3}\,x$

$x = x_0 e^{-i\omega t}, \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \dfrac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\dfrac{\omega_0^3}{mc^3} \quad\Longrightarrow\quad \omega = \omega_0 - i\dfrac{\gamma}{2}, \qquad \gamma = \dfrac{e^2\omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$

一级近似适用条件：$\left|\dfrac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\dfrac{\omega_0^3}{mc^3}x\right| \ll |\omega_0^2 x| \quad\Longrightarrow\quad \gamma \ll \omega_0 \quad\Longrightarrow\quad r_c \ll \dfrac{\lambda_0}{2\pi}$

$x = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega_0 t}$ 低速辐射场 (§6.4 p15)：$\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{q|\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q|}{4\pi\epsilon_0 Rc^2}\,\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$

一级近似运动方程：$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \frac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\frac{\omega_0^3}{mc^3}\,x$

$$x = x_0 e^{-i\omega t}, \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\frac{\omega_0^3}{mc^3} \quad \Longrightarrow \quad \omega = \omega_0 - i\frac{\gamma}{2}, \qquad \gamma = \frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$$

一级近似适用条件：$\left|\frac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\frac{\omega_0^3}{mc^3}x\right| \ll |\omega_0^2 x| \quad \Longrightarrow \quad \gamma \ll \omega_0 \quad \Longrightarrow \quad r_c \ll \frac{\lambda_0}{2\pi}$

$x = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{-i\omega_0 t}$ 低速辐射场 (§6.4 p15)：$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q|\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q|}{4\pi\epsilon_0 Rc^2}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$

故：$\vec{\boldsymbol{E}}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \vec{\boldsymbol{E}}_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{-i\omega_0 t} & t > 0 \end{cases}$

一级近似运动方程：$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \dfrac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\dfrac{\omega_0^3}{mc^3}\,x$

$$x = x_0 e^{-i\omega t}, \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\frac{\omega_0^3}{mc^3} \quad\Longrightarrow\quad \omega = \omega_0 - i\frac{\gamma}{2}, \qquad \gamma = \frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$$

一级近似适用条件：$\left|\dfrac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\dfrac{\omega_0^3}{mc^3}x\right| \ll |\omega_0^2 x| \quad\Longrightarrow\quad \gamma \ll \omega_0 \quad\Longrightarrow\quad r_c \ll \dfrac{\lambda_0}{2\pi}$

$x = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{-i\omega_0 t}$ 低速辐射场 (§6.4 p15)：$\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{q|\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q|}{4\pi\epsilon_0 Rc^2}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$

故：$\vec{\boldsymbol{E}}(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \vec{\boldsymbol{E}}_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{-i\omega_0 t} & t>0 \end{cases}$ （假设振动从 $t=0$ 开始。）

一级近似运动方程：$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \dfrac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\dfrac{\omega_0^3}{mc^3}\, x$

$x = x_0 e^{-i\omega t}, \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \dfrac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\dfrac{\omega_0^3}{mc^3} \quad \Longrightarrow \quad \omega = \omega_0 - i\dfrac{\gamma}{2}, \qquad \gamma = \dfrac{e^2\omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$

一级近似适用条件：$\left|\dfrac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\dfrac{\omega_0^3}{mc^3}x\right| \ll |\omega_0^2 x| \quad \Longrightarrow \quad \gamma \ll \omega_0 \quad \Longrightarrow \quad r_c \ll \dfrac{\lambda_0}{2\pi}$

$x = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega_0 t}$ 低速辐射场 (§6.4 p15)：$\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{q|\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q|}{4\pi\epsilon_0 Rc^2}\sin\theta\, \hat{\boldsymbol{e}}_\theta$

故：$\vec{\boldsymbol{E}}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \vec{\boldsymbol{E}}_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega_0 t} & t > 0 \end{cases}$ （假设振动从 $t = 0$ 开始。）

频谱分析：$\vec{\boldsymbol{E}}(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^\infty \vec{\boldsymbol{E}}(t) e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\vec{\boldsymbol{E}}_0}{2\pi}\dfrac{1}{\frac{\gamma}{2} - i(\omega - \omega_0)}$

一级近似运动方程：$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \frac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\frac{\omega_0^3}{mc^3}\,x$

$$x = x_0 e^{-i\omega t}, \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\frac{\omega_0^3}{mc^3} \implies \omega = \omega_0 - i\frac{\gamma}{2}, \qquad \gamma = \frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$$

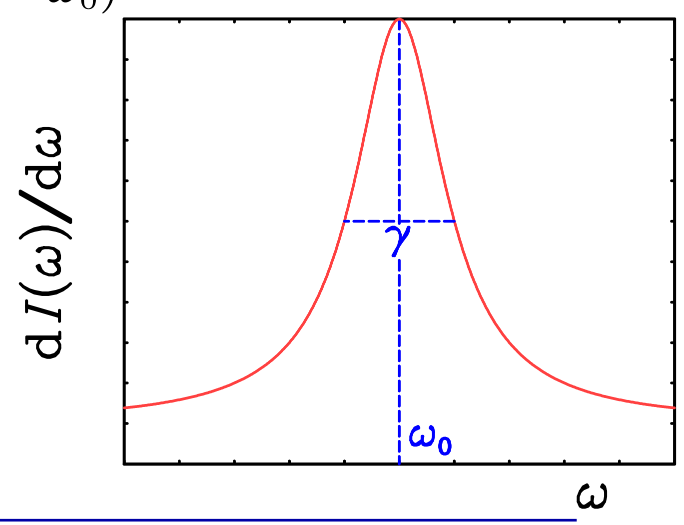
一级近似适用条件：$\left|\frac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\frac{\omega_0^3}{mc^3}x\right| \ll |\omega_0^2 x| \implies \gamma \ll \omega_0 \implies r_c \ll \frac{\lambda_0}{2\pi}$

$x = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega_0 t}$ 低速辐射场 (§6.4 p15)：$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q|\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q|}{4\pi\epsilon_0 Rc^2}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$

故：$\vec{\boldsymbol{E}}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \vec{\boldsymbol{E}}_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega_0 t} & t > 0 \end{cases}$ （假设振动从 $t = 0$ 开始。）

频谱分析：$\vec{\boldsymbol{E}}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \vec{\boldsymbol{E}}(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{\vec{\boldsymbol{E}}_0}{2\pi}\frac{1}{\frac{\gamma}{2} - i(\omega - \omega_0)}$

辐射频谱：$\frac{\mathrm{d}I(\omega)}{\mathrm{d}\omega} \sim |\vec{\boldsymbol{E}}(\omega)|^2 \sim \frac{I_0}{\frac{\gamma^2}{4} + (\omega - \omega_0)^2}$



一级近似运动方程：$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \frac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\frac{\omega_0^3}{mc^3}\,x$

$$x = x_0 e^{-i\omega t}, \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\frac{\omega_0^3}{mc^3} \implies \omega = \omega_0 - i\frac{\gamma}{2}, \qquad \gamma = \frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$$

一级近似适用条件：$\left|\frac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\frac{\omega_0^3}{mc^3}x\right| \ll |\omega_0^2 x| \implies \gamma \ll \omega_0 \implies r_c \ll \frac{\lambda_0}{2\pi}$

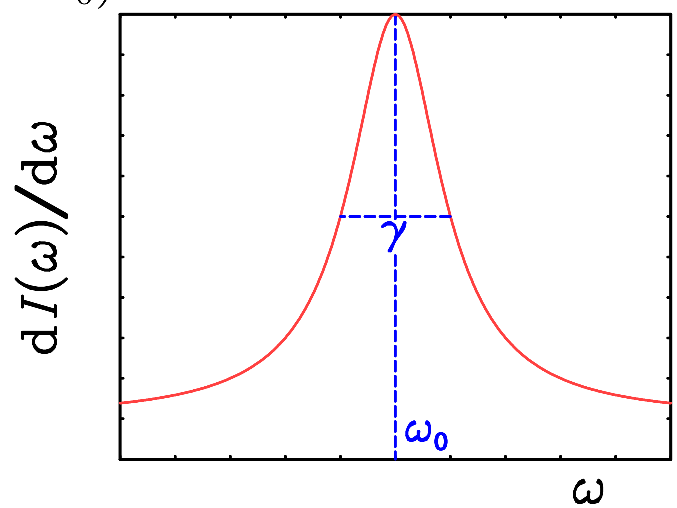
$x = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{-i\omega_0 t}$ 低速辐射场 (§6.4 p15)：$\vec{E} = \frac{q|\dot{\vec{v}}_q|}{4\pi\epsilon_0 Rc^2}\sin\theta\,\hat{e}_\theta$

故：$\vec{E}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \vec{E}_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{-i\omega_0 t} & t > 0 \end{cases}$ （假设振动从 $t = 0$ 开始。）

频谱分析：$\vec{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \vec{E}(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{\vec{E}_0}{2\pi}\frac{1}{\frac{\gamma}{2} - i(\omega - \omega_0)}$

辐射频谱：$\frac{\mathrm{d}I(\omega)}{\mathrm{d}\omega} \sim |\vec{E}(\omega)|^2 \sim \frac{I_0}{\frac{\gamma^2}{4} + (\omega - \omega_0)^2}$

在 $\omega = \omega_0 \pm \gamma/2$ 处，$\mathrm{d}I(\omega)/\mathrm{d}\omega$ 将为峰值的一半。



一级近似运动方程：$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \dfrac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\dfrac{\omega_0^3}{mc^3}\,x$

$$x = x_0 e^{-i\omega t}, \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\frac{\omega_0^3}{mc^3} \implies \omega = \omega_0 - i\frac{\gamma}{2}, \qquad \gamma = \frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$$

一级近似适用条件：$\left|\dfrac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\dfrac{\omega_0^3}{mc^3}x\right| \ll |\omega_0^2 x| \implies \gamma \ll \omega_0 \implies r_c \ll \dfrac{\lambda_0}{2\pi}$

$x = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega_0 t}$ 　　低速辐射场 (§6.4 p15)：$\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{q|\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q|}{4\pi\epsilon_0 Rc^2}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$

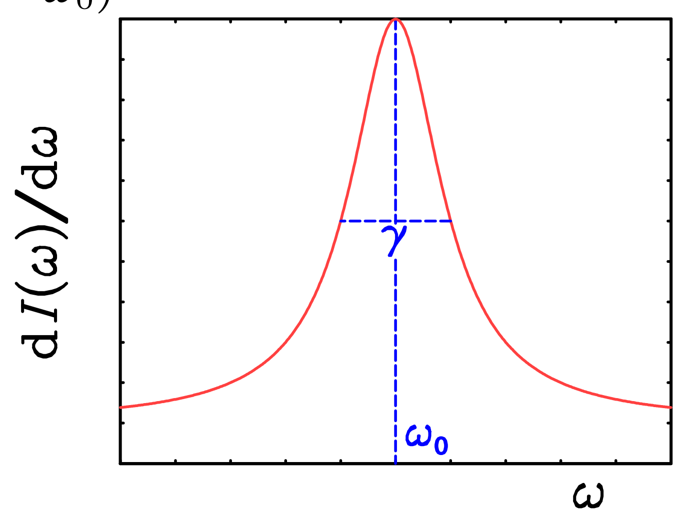
故：$\vec{\boldsymbol{E}}(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \vec{\boldsymbol{E}}_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega_0 t} & t>0 \end{cases}$ 　（假设振动从 $t=0$ 开始。）

频谱分析：$\vec{\boldsymbol{E}}(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^\infty \vec{\boldsymbol{E}}(t) e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\vec{\boldsymbol{E}}_0}{2\pi}\dfrac{1}{\frac{\gamma}{2} - i(\omega-\omega_0)}$

辐射频谱：$\dfrac{\mathrm{d}I(\omega)}{\mathrm{d}\omega} \sim |\vec{\boldsymbol{E}}(\omega)|^2 \sim \dfrac{I_0}{\frac{\gamma^2}{4} + (\omega-\omega_0)^2}$

在 $\omega = \omega_0 \pm \gamma/2$ 处，$\mathrm{d}I(\omega)/\mathrm{d}\omega$ 将为峰值的一半。

$\gamma = \dfrac{e^2\omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$ 　—— 谱线的自然宽度



一级近似运动方程：$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \dfrac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\dfrac{\omega_0^3}{mc^3}\,x$

$$x = x_0 e^{-i\omega t}, \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\frac{\omega_0^3}{mc^3} \implies \omega = \omega_0 - i\frac{\gamma}{2}, \qquad \gamma = \frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$$

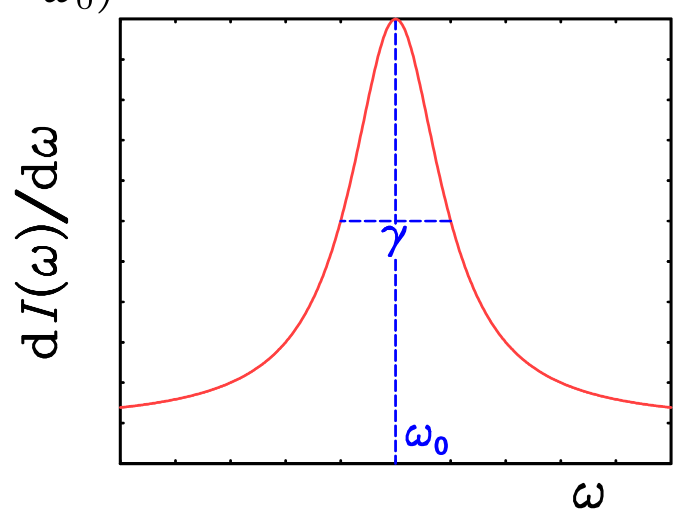
一级近似适用条件：$\left|\dfrac{ie^2}{6\pi\epsilon_0}\dfrac{\omega_0^3}{mc^3}x\right| \ll |\omega_0^2 x| \implies \gamma \ll \omega_0 \implies r_c \ll \dfrac{\lambda_0}{2\pi}$

$x = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{-i\omega_0 t}$　　低速辐射场 (§6.4 p15)：$\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{q|\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q|}{4\pi\epsilon_0 Rc^2}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$

故：$\vec{\boldsymbol{E}}(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \vec{\boldsymbol{E}}_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{-i\omega_0 t} & t>0 \end{cases}$　　（假设振动从 $t=0$ 开始。）

频谱分析：$\vec{\boldsymbol{E}}(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^\infty \vec{\boldsymbol{E}}(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\vec{\boldsymbol{E}}_0}{2\pi}\dfrac{1}{\frac{\gamma}{2} - i(\omega-\omega_0)}$

辐射频谱：$\dfrac{\mathrm{d}I(\omega)}{\mathrm{d}\omega} \sim |\vec{\boldsymbol{E}}(\omega)|^2 \sim \dfrac{I_0}{\frac{\gamma^2}{4} + (\omega-\omega_0)^2}$



在 $\omega = \omega_0 \pm \gamma/2$ 处，$\mathrm{d}I(\omega)/\mathrm{d}\omega$ 将为峰值的一半。

$\gamma = \dfrac{e^2\omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$　　—— 谱线的自然宽度

考虑到二级近似，频谱峰值频率与 ω_0 还有一小偏差。