第五章：电磁波的传播

第五章：电磁波的传播

- §5.1 电磁波在非导电介质中的传播

第五章：电磁波的传播

- § 5.1 电磁波在非导电介质中的传播
- § 5.2 电磁波在非导电介质界面上的反射和折射

第五章：电磁波的传播

第五章：电磁波的传播

第五章：电磁波的传播

第五章：电磁波的传播

§5.1 电磁波在非导电介质中的传播

§5.1 电磁波在非导电介质中的传播

变化的磁场会产生电场，而变化的电场又会激励磁场，变化的电磁场互相激励，导致即使在无源区，也有电磁场以波动形式存在。

§5.1 电磁波在非导电介质中的传播

变化的磁场会产生电场，而变化的电场又会激励磁场，变化的电磁场互相激励，导致即使在无源区，也有电磁场以波动形式存在。

一、电磁场波动方程

§5.1 电磁波在非导电介质中的传播

变化的磁场会产生电场，而变化的电场又会激励磁场，变化的电磁场互相激励，导致即使在无源区，也有电磁场以波动形式存在。

一、电磁场波动方程

无源区：$\rho_f = 0, \quad \vec{j}_f = 0$，Maxwell 方程退化为：

§ 5.1 电磁波在非导电介质中的传播

变化的磁场会产生电场，而变化的电场又会激励磁场，变化的电磁场互相激励，导致即使在无源区，也有电磁场以波动形式存在。

一、电磁场波动方程

无源区：$\rho_f = 0$, $\vec{j}_f = 0$，Maxwell 方程退化为：

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (1) \qquad\qquad \nabla \cdot \vec{D} = 0 \qquad (2)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (3) \qquad\qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad (4)$$

§5.1 电磁波在非导电介质中的传播

变化的磁场会产生电场，而变化的电场又会激励磁场，变化的电磁场互相激励，导致即使在无源区，也有电磁场以波动形式存在。

一、电磁场波动方程

无源区：$\rho_f=0,\quad \vec{j}_f=0$，Maxwell 方程退化为：

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}=-\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}\qquad(1)\qquad\qquad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}}=0\qquad(2)$$

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}=\frac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t}\qquad(3)\qquad\qquad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0\qquad(4)$$

对均匀线性无色散各向同性介质有：$\vec{\boldsymbol{D}}=\epsilon\vec{\boldsymbol{E}},\quad \vec{\boldsymbol{B}}=\mu\vec{\boldsymbol{H}}$，从而：

§5.1 电磁波在非导电介质中的传播

变化的磁场会产生电场，而变化的电场又会激励磁场，变化的电磁场互相激励，导致即使在无源区，也有电磁场以波动形式存在。

一、电磁场波动方程

无源区：$\rho_f = 0, \quad \vec{j}_f = 0$，Maxwell 方程退化为：

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (1) \qquad\qquad \nabla \cdot \vec{D} = 0 \qquad (2)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (3) \qquad\qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad (4)$$

对均匀线性无色散各向同性介质有：$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$，从而：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

§5.1 电磁波在非导电介质中的传播

变化的磁场会产生电场，而变化的电场又会激励磁场，变化的电磁场互相激励，导致即使在无源区，也有电磁场以波动形式存在。

一、电磁场波动方程

无源区：$\rho_f = 0, \quad \vec{j}_f = 0$，Maxwell 方程退化为：

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (1) \qquad\qquad \nabla \cdot \vec{D} = 0 \qquad (2)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (3) \qquad\qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad (4)$$

对均匀线性无色散各向同性介质有：$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$，从而：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right\} \text{横波条件}$$

§ 5.1 电磁波在非导电介质中的传播

变化的磁场会产生电场，而变化的电场又会激励磁场，变化的电磁场互相激励，导致即使在无源区，也有电磁场以波动形式存在。

一、电磁场波动方程

无源区：$\rho_f = 0, \quad \vec{\boldsymbol{j}}_f = 0$，Maxwell 方程退化为：

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \qquad (1) \qquad\qquad \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = 0 \qquad (2)$$

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}} = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t} \qquad (3) \qquad\qquad \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0 \qquad (4)$$

对均匀线性无色散各向同性介质有：$\vec{\boldsymbol{D}} = \epsilon \vec{\boldsymbol{E}}, \quad \vec{\boldsymbol{B}} = \mu \vec{\boldsymbol{H}}$，从而：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0 \end{array} \right\} \text{横波条件}$$

对方程 (1) 两边求旋度：$\nabla \times (\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu \nabla \times \vec{\boldsymbol{H}}) = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2}$

Let there be light

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu \nabla \times \vec{\boldsymbol{H}}) = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu \nabla \times \vec{\boldsymbol{H}}) = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2}$$

左边 $= \nabla(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}}) - \nabla^2 \vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla^2 \vec{\boldsymbol{E}}$ 　　利用了横波条件：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = 0$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}})=-\frac{\partial}{\partial t}(\mu\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}})=-\mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2}$$

左边 $=\nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}})-\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}}=-\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}}$ 　　利用了横波条件：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}=0$

因此有：$\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}}-\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{E}}=0$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}})=-\frac{\partial}{\partial t}(\mu\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}})=-\mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2}$$

左边 $=\nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}})-\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}}=-\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}}$ 　　利用了横波条件：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}=0$

因此有：$\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{E}}=0$

同理有：$\nabla^2\vec{\boldsymbol{B}}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{B}}=0$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu \nabla \times \vec{\boldsymbol{H}}) = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2}$$

左边 $= \nabla(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}}) - \nabla^2 \vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla^2 \vec{\boldsymbol{E}}$　　利用了横波条件：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{因此有：} \nabla^2 \vec{\boldsymbol{E}} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{E}} = 0 \\ \text{同理有：} \nabla^2 \vec{\boldsymbol{B}} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{B}} = 0 \end{array}\right\}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu \nabla \times \vec{\boldsymbol{H}}) = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2}$$

左边 $= \nabla(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}}) - \nabla^2 \vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla^2 \vec{\boldsymbol{E}}$ 　　利用了横波条件：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{因此有：} \nabla^2 \vec{\boldsymbol{E}} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{E}} = 0 \\[2ex] \text{同理有：} \nabla^2 \vec{\boldsymbol{B}} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{B}} = 0 \end{array}\right\} \quad \text{波动方程} \qquad (1)$$

其中：$v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}) = -\mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2}$$

左边 $=\nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}})-\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}}=-\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}}$ 　　利用了横波条件：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}=0$

因此有：$\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{E}}=0$

同理有：$\nabla^2\vec{\boldsymbol{B}}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{B}}=0$

波动方程 　　(1)

其中：$v=1/\sqrt{\epsilon\mu}$

讨论：

Let there be light

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}})=-\frac{\partial}{\partial t}(\mu\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}})=-\mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2}$$

左边 $=\nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}})-\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}}=-\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}}$　　利用了横波条件：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}=0$

$$\left.\begin{array}{l}\text{因此有：}\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}}-\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{E}}=0\\[2ex]\text{同理有：}\nabla^2\vec{\boldsymbol{B}}-\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{B}}=0\end{array}\right\}\quad\text{波动方程}\qquad(1)$$

其中：$v=1/\sqrt{\epsilon\mu}$

讨论：

(1)　波动方程 (1) 来自 Maxwell 方程，条件是：均匀、线性、各向同性且无色散介质

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}) = -\mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2}$$

左边 $= \nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}) - \nabla^2\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}}$　　利用了横波条件：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}} = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\text{因此有：}\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{E}} = 0 \\ &\text{同理有：}\nabla^2\vec{\boldsymbol{B}} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{B}} = 0 \end{aligned}\right\}\quad \text{波动方程} \qquad (1)$$

其中：$v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$

讨论：

(1) 波动方程 (1) 来自 Maxwell 方程，条件是：均匀、线性、各向同性且无色散介质

对色散介质，其本构关系形如：$\vec{\boldsymbol{D}}(t) = \int_{-\infty}^{t}\epsilon(t-t')\vec{\boldsymbol{E}}(t')\,\mathrm{d}t'$，

从 Maxwell 方程无法导出波动方程 (1)。

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}) = -\mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2}$$

左边 $= \nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}) - \nabla^2\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}}$ 　　利用了横波条件：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}} = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\text{因此有：}\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{E}} = 0 \\ &\text{同理有：}\nabla^2\vec{\boldsymbol{B}} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{B}} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{波动方程} \qquad (1)$$

其中：$v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$

讨论：

(1) 波动方程 (1) 来自 Maxwell 方程，条件是：均匀、线性、各向同性且无色散介质

对色散介质，其本构关系形如：$\vec{\boldsymbol{D}}(t) = \int_{-\infty}^{t}\epsilon(t-t')\vec{\boldsymbol{E}}(t')\,\mathrm{d}t'$，

从 Maxwell 方程无法导出波动方程 (1)。

(2) 对于单色波，即 $\vec{\boldsymbol{E}}$、$\vec{\boldsymbol{B}}$ 等场量都以单一频率变化：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \sum_i E_i(\vec{\boldsymbol{r}})\,\hat{\boldsymbol{e}}_i\cos(\omega t+\phi_i)$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}})=-\frac{\partial}{\partial t}(\mu\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}})=-\mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2}$$

左边 $=\nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}})-\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}}=-\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}}$ 　　利用了横波条件：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}=0$

$$\left.\begin{aligned}&\text{因此有：}\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{E}}=0\\&\text{同理有：}\nabla^2\vec{\boldsymbol{B}}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{B}}=0\end{aligned}\right\}\quad\text{波动方程}\qquad(1)$$

其中：$v=1/\sqrt{\epsilon\mu}$

讨论：

(1) 波动方程 (1) 来自 Maxwell 方程，条件是：均匀、线性、各向同性且无色散介质

对色散介质，其本构关系形如：$\vec{\boldsymbol{D}}(t)=\int_{-\infty}^{t}\epsilon(t-t')\vec{\boldsymbol{E}}(t')\,\mathrm{d}t'$，

从 Maxwell 方程无法导出波动方程 (1)。

(2) 对于单色波，即 $\vec{\boldsymbol{E}}$、$\vec{\boldsymbol{B}}$ 等场量都以单一频率变化：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\sum_i E_i(\vec{\boldsymbol{r}})\,\hat{\boldsymbol{e}}_i\cos(\omega t+\phi_i)$

由于这时的本构关系仍为：$\vec{\boldsymbol{D}}=\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}$ 形式

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}) = -\mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2}$$

左边 $= \nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}) - \nabla^2\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}}$　　利用了横波条件：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}} = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\text{因此有：}\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{E}} = 0 \\ &\text{同理有：}\nabla^2\vec{\boldsymbol{B}} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{B}} = 0 \end{aligned}\right\}\quad \text{波动方程} \qquad (1)$$

其中：$v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$

讨论：

(1)　波动方程 (1) 来自 Maxwell 方程，条件是：均匀、线性、各向同性且无色散介质

对色散介质，其本构关系形如：$\vec{\boldsymbol{D}}(t) = \int_{-\infty}^{t}\epsilon(t-t')\vec{\boldsymbol{E}}(t')\,\mathrm{d}t'$，

从 Maxwell 方程无法导出波动方程 (1)。

(2)　对于单色波，即 $\vec{\boldsymbol{E}}$、$\vec{\boldsymbol{B}}$ 等场量都以单一频率变化：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \sum_i E_i(\vec{\boldsymbol{r}})\,\hat{\boldsymbol{e}}_i\cos(\omega t+\phi_i)$

由于这时的本构关系仍为：$\vec{\boldsymbol{D}} = \epsilon\vec{\boldsymbol{E}}$ 形式

故从 Maxwell 方程仍可导出波动方程 (1)

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}})=-\frac{\partial}{\partial t}(\mu\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}})=-\mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2}$$

左边 $=\nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}})-\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}}=-\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}}$　　利用了横波条件：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}=0$

$$\left.\begin{aligned}&\text{因此有：}\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{E}}=0\\&\text{同理有：}\nabla^2\vec{\boldsymbol{B}}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{B}}=0\end{aligned}\right\}\quad\text{波动方程}\qquad(1)$$

其中：$v=1/\sqrt{\epsilon\mu}$

讨论：

(1)　波动方程 (1) 来自 Maxwell 方程，条件是：均匀、线性、各向同性且无色散介质

对色散介质，其本构关系形如：$\vec{\boldsymbol{D}}(t)=\int_{-\infty}^{t}\epsilon(t-t')\vec{\boldsymbol{E}}(t')\,\mathrm{d}t'$，

从 Maxwell 方程无法导出波动方程 (1)。

(2)　对于单色波，即 $\vec{\boldsymbol{E}}$、$\vec{\boldsymbol{B}}$ 等场量都以单一频率变化：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\sum_i E_i(\vec{\boldsymbol{r}})\,\hat{\boldsymbol{e}}_i\cos(\omega t+\phi_i)$

由于这时的本构关系仍为：$\vec{\boldsymbol{D}}=\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}$ 形式

故从 Maxwell 方程仍可导出波动方程 (1)

任意随时间变化的电磁波均可分解为单色波的叠加，因此常讨论单色波问题。

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}})=-\frac{\partial}{\partial t}(\mu\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}})=-\mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2}$$

左边 $=\nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}})-\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}}=-\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}}$ 　　利用了横波条件：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}=0$

$$\left.\begin{aligned}&\text{因此有：}\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{E}}=0\\ &\text{同理有：}\nabla^2\vec{\boldsymbol{B}}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{B}}=0\end{aligned}\right\}\quad \text{波动方程}\qquad (1)$$

其中：$v=1/\sqrt{\epsilon\mu}$

讨论：

(1) 波动方程 (1) 来自 Maxwell 方程，条件是：均匀、线性、各向同性且无色散介质

对色散介质，其本构关系形如：$\vec{\boldsymbol{D}}(t)=\int_{-\infty}^{t}\epsilon(t-t')\vec{\boldsymbol{E}}(t')\,\mathrm{d}t'$，

从 Maxwell 方程无法导出波动方程 (1)。

(2) 对于单色波，即 $\vec{\boldsymbol{E}}$、$\vec{\boldsymbol{B}}$ 等场量都以单一频率变化：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\sum_i E_i(\vec{\boldsymbol{r}})\,\hat{\boldsymbol{e}}_i\cos(\omega t+\phi_i)$

由于这时的本构关系仍为：$\vec{\boldsymbol{D}}=\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}$ 形式

故从 Maxwell 方程仍可导出波动方程 (1)

任意随时间变化的电磁波均可分解为单色波的叠加，因此常讨论单色波问题。

(3) 波动方程不能取代横波条件，只有满足波动方程和横波条件，才是真正的电磁波解。

(4) 任意随时间变化的场（分量），通过 Fourier 变换，可写成

(4) 任意随时间变化的场（分量），通过 Fourier 变换，可写成

$$F(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega,\qquad \mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\vec{\boldsymbol{r}},t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t$$

(4) 任意随时间变化的场（分量），通过 Fourier 变换，可写成

$$F(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega,\qquad \mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\vec{\boldsymbol{r}},t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t$$

因此，以频率为自变量 [称为在频域 (frequency domain)]，无源区的麦氏方程可写成：

(4) 任意随时间变化的场（分量），通过 Fourier 变换，可写成

$$F(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega,\qquad \mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\vec{\boldsymbol{r}},t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t$$

因此，以频率为自变量 [称为在频域 (frequency domain)]，无源区的麦氏方程可写成：

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=-\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t}$$

(4) 任意随时间变化的场（分量），通过 Fourier 变换，可写成

$$F(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}}, \omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega, \qquad \mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}F(\vec{\boldsymbol{r}}, t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t$$

因此，以频率为自变量 [称为在频域 (frequency domain)]，无源区的麦氏方程可写成：

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = -\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)}{\partial t} \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}, \omega) = i\omega\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}}, \omega)$$

(4) 任意随时间变化的场（分量），通过 Fourier 变换，可写成

$$F(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}}, \omega) e^{-i\omega t} \mathrm{d}\omega, \qquad \mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\vec{\boldsymbol{r}}, t) e^{i\omega t} \mathrm{d}t$$

因此，以频率为自变量 [称为在频域 (frequency domain)]，无源区的麦氏方程可写成：

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)}{\partial t} \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}, \omega) = i\omega \vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}}, \omega)$$

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = 0$$

(4) 任意随时间变化的场（分量），通过 Fourier 变换，可写成

$$F(\vec{r},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(\vec{r},\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega,\qquad \mathcal{F}(\vec{r},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\vec{r},t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t$$

因此，以频率为自变量 [称为在频域 (frequency domain)]，无源区的麦氏方程可写成：

$$\nabla\times\vec{E}(\vec{r},t)=-\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}\qquad\Longrightarrow\qquad\nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},\omega)=i\omega\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},\omega)$$

$$\nabla\cdot\vec{D}(\vec{r},t)=0\qquad\Longrightarrow\qquad\nabla\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r},\omega)=0,$$

(4) 任意随时间变化的场（分量），通过 Fourier 变换，可写成

$$F(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega,\qquad \mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\vec{\boldsymbol{r}},t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t$$

因此，以频率为自变量 [称为在频域 (frequency domain)]，无源区的麦氏方程可写成：

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=-\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t}\qquad\Longrightarrow\qquad\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=i\omega\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)$$

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=0\qquad\Longrightarrow\qquad\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=0,$$

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t}$$

(4) 任意随时间变化的场（分量），通过 Fourier 变换，可写成

$$F(\vec{r},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(\vec{r},\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega,\qquad \mathcal{F}(\vec{r},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\vec{r},t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t$$

因此，以频率为自变量 [称为在频域 (frequency domain)]，无源区的麦氏方程可写成：

$$\nabla\times\vec{E}(\vec{r},t)=-\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}\qquad\Longrightarrow\qquad\nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},\omega)=i\omega\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},\omega)$$

$$\nabla\cdot\vec{D}(\vec{r},t)=0\qquad\Longrightarrow\qquad\nabla\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r},\omega)=0,$$

$$\nabla\times\vec{H}(\vec{r},t)=\frac{\partial\vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t}\qquad\Longrightarrow\qquad\nabla\times\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},\omega)=-i\omega\vec{\mathcal{D}}(\vec{r},\omega),$$

(4) 任意随时间变化的场（分量），通过 Fourier 变换，可写成

$$F(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega,\qquad \mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\vec{\boldsymbol{r}},t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t$$

因此，以频率为自变量 [称为在频域 (frequency domain)]，无源区的麦氏方程可写成：

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=-\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t}\qquad\Longrightarrow\qquad\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=i\omega\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)$$

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=0\qquad\Longrightarrow\qquad\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=0,$$

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t}\qquad\Longrightarrow\qquad\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=-i\omega\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega),$$

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=0$$

(4) 任意随时间变化的场（分量），通过 Fourier 变换，可写成

$$F(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega,\qquad \mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\vec{\boldsymbol{r}},t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t$$

因此，以频率为自变量 [称为在频域 (frequency domain)]，无源区的麦氏方程可写成：

$$\begin{aligned}
\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)&=-\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t} &&\Longrightarrow && \nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=i\omega\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)\\
\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)&=0 &&\Longrightarrow && \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=0,\\
\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)&=\frac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t} &&\Longrightarrow && \nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=-i\omega\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega),\\
\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)&=0 &&\Longrightarrow && \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=0,
\end{aligned}$$

(4) 任意随时间变化的场（分量），通过 Fourier 变换，可写成

$$F(\vec{r},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(\vec{r},\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega,\qquad \mathcal{F}(\vec{r},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\vec{r},t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t$$

因此，以频率为自变量 [称为在频域 (frequency domain)]，无源区的麦氏方程可写成：

$$\begin{aligned}
\nabla\times\vec{E}(\vec{r},t)&=-\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} &\Longrightarrow\quad& \nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},\omega)=i\omega\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},\omega)\\
\nabla\cdot\vec{D}(\vec{r},t)&=0 &\Longrightarrow\quad& \nabla\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r},\omega)=0,\\
\nabla\times\vec{H}(\vec{r},t)&=\frac{\partial\vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t} &\Longrightarrow\quad& \nabla\times\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},\omega)=-i\omega\vec{\mathcal{D}}(\vec{r},\omega),\\
\nabla\cdot\vec{B}(\vec{r},t)&=0 &\Longrightarrow\quad& \nabla\cdot\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},\omega)=0,
\end{aligned}$$

对一般线性色散介质

(4) 任意随时间变化的场（分量），通过 Fourier 变换，可写成

$$F(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega,\qquad \mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\vec{\boldsymbol{r}},t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t$$

因此，以频率为自变量 [称为在频域 (frequency domain)]，无源区的麦氏方程可写成：

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=-\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t}\qquad\Longrightarrow\qquad\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=i\omega\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)$$

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=0\qquad\Longrightarrow\qquad\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=0,$$

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t}\qquad\Longrightarrow\qquad\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=-i\omega\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega),$$

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=0\qquad\Longrightarrow\qquad\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=0,$$

对一般线性色散介质

$$\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\int_{-\infty}^{t}\epsilon(t-t')\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t')\,\mathrm{d}t'$$

(4) 任意随时间变化的场（分量），通过 Fourier 变换，可写成

$$F(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega,\qquad \mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\vec{\boldsymbol{r}},t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t$$

因此，以频率为自变量 [称为在频域 (frequency domain)]，无源区的麦氏方程可写成：

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=-\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t}\qquad\Longrightarrow\qquad\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=i\omega\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)$$

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=0\qquad\Longrightarrow\qquad\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=0,$$

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t}\qquad\Longrightarrow\qquad\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=-i\omega\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega),$$

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=0\qquad\Longrightarrow\qquad\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=0,$$

对一般线性色散介质

$$\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\int_{-\infty}^{t}\epsilon(t-t')\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t')\,\mathrm{d}t'\qquad\Longrightarrow\qquad\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=\epsilon(\omega)\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)$$

(4) 任意随时间变化的场（分量），通过 Fourier 变换，可写成

$$F(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega,\qquad \mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\vec{\boldsymbol{r}},t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t$$

因此，以频率为自变量 [称为在频域 (frequency domain)]，无源区的麦氏方程可写成：

$$\begin{aligned}
\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)&=-\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t} &&\Longrightarrow\quad \nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=i\omega\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)\\
\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)&=0 &&\Longrightarrow\quad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=0,\\
\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)&=\frac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t} &&\Longrightarrow\quad \nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=-i\omega\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega),\\
\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)&=0 &&\Longrightarrow\quad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=0,
\end{aligned}$$

对一般线性色散介质

$$\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\int_{-\infty}^{t}\epsilon(t-t')\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t')\,\mathrm{d}t'\qquad\Longrightarrow\qquad\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=\epsilon(\omega)\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\int_{-\infty}^{t}\mu(t-t')\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t')\,\mathrm{d}t'$$

(4) 任意随时间变化的场（分量），通过 Fourier 变换，可写成

$$F(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega,\qquad \mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\vec{\boldsymbol{r}},t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t$$

因此，以频率为自变量 [称为在频域 (frequency domain)]，无源区的麦氏方程可写成：

$$\begin{aligned}
\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)&=-\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t} &&\Longrightarrow && \nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=i\omega\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)\\
\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)&=0 &&\Longrightarrow && \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=0,\\
\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)&=\frac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t} &&\Longrightarrow && \nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=-i\omega\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega),\\
\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)&=0 &&\Longrightarrow && \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=0,
\end{aligned}$$

对一般线性色散介质

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)&=\int_{-\infty}^{t}\epsilon(t-t')\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t')\,\mathrm{d}t' &&\Longrightarrow && \vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=\epsilon(\omega)\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)\\
\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)&=\int_{-\infty}^{t}\mu(t-t')\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t')\,\mathrm{d}t' &&\Longrightarrow && \vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=\mu(\omega)\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)
\end{aligned}$$

(4) 任意随时间变化的场（分量），通过 Fourier 变换，可写成

$$F(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega,\qquad \mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\vec{\boldsymbol{r}},t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t$$

因此，以频率为自变量 [称为在频域 (frequency domain)]，无源区的麦氏方程可写成：

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=-\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t}\qquad\Longrightarrow\qquad\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=i\omega\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)$$

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=0\qquad\Longrightarrow\qquad\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=0,$$

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t}\qquad\Longrightarrow\qquad\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=-i\omega\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega),$$

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=0\qquad\Longrightarrow\qquad\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=0,$$

对一般线性色散介质

$$\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\int_{-\infty}^{t}\epsilon(t-t')\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t')\,\mathrm{d}t'\qquad\Longrightarrow\qquad\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=\epsilon(\omega)\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\int_{-\infty}^{t}\mu(t-t')\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t')\,\mathrm{d}t'\qquad\Longrightarrow\qquad\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=\mu(\omega)\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)$$

其中：$\epsilon(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\epsilon(t)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t\qquad\epsilon(t)=0\quad\text{if } t<0$

$$\mu(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(t)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t\qquad\mu(t)=0\quad\text{if } t<0$$

(4) 任意随时间变化的场（分量），通过 Fourier 变换，可写成

$$F(\vec{r},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(\vec{r},\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega,\qquad \mathcal{F}(\vec{r},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\vec{r},t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t$$

因此，以频率为自变量 [称为在频域 (frequency domain)]，无源区的麦氏方程可写成：

$$\nabla\times\vec{E}(\vec{r},t)=-\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}\qquad\Longrightarrow\qquad\nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},\omega)=i\omega\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},\omega)$$

$$\nabla\cdot\vec{D}(\vec{r},t)=0\qquad\Longrightarrow\qquad\nabla\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r},\omega)=0,$$

$$\nabla\times\vec{H}(\vec{r},t)=\frac{\partial\vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t}\qquad\Longrightarrow\qquad\nabla\times\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},\omega)=-i\omega\vec{\mathcal{D}}(\vec{r},\omega),$$

$$\nabla\cdot\vec{B}(\vec{r},t)=0\qquad\Longrightarrow\qquad\nabla\cdot\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},\omega)=0,$$

对一般线性色散介质

$$\vec{D}(\vec{r},t)=\int_{-\infty}^{t}\epsilon(t-t')\vec{E}(\vec{r},t')\,\mathrm{d}t'\qquad\Longrightarrow\qquad\vec{\mathcal{D}}(\vec{r},\omega)=\epsilon(\omega)\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},\omega)$$

$$\vec{B}(\vec{r},t)=\int_{-\infty}^{t}\mu(t-t')\vec{H}(\vec{r},t')\,\mathrm{d}t'\qquad\Longrightarrow\qquad\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},\omega)=\mu(\omega)\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},\omega)$$

其中：$\epsilon(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\epsilon(t)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t\qquad\epsilon(t)=0\quad\text{if }t<0$

$$\mu(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(t)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t\qquad\mu(t)=0\quad\text{if }t<0$$

由于 $\epsilon(t)$ 和 $\mu(t)$ 均为实数，故有：$\epsilon(-\omega)=\epsilon^*(\omega),\quad\mu(-\omega)=\mu^*(\omega)$

故，对一般线性色散介质，无源均匀介质区的麦氏方程在频域可写成：

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}, \omega) &= i\omega\mu(\omega)\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}}, \omega), \quad & \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}}, \omega) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}, \omega) = 0 \\ \nabla \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}}, \omega) &= -i\omega\epsilon(\omega)\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}, \omega), \quad & \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}}, \omega) = 0, \quad &\Longrightarrow \quad \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}}, \omega) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

故，对一般线性色散介质，无源均匀介质区的麦氏方程在频域可写成：

$$\begin{array}{llll} \nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=i\omega\mu(\omega)\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega), & \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=0 & \Longrightarrow & \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=0 \\ \nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=-i\omega\epsilon(\omega)\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega), & \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=0, & \Longrightarrow & \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=0 \end{array} \tag{1}$$

对单色波，所有电磁场分量都可以写成如下形式

故，对一般线性色散介质，无源均匀介质区的麦氏方程在频域可写成：

$$\begin{aligned} &\nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},\omega)=i\omega\mu(\omega)\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},\omega), \quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r},\omega)=0 \quad\Longrightarrow\quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},\omega)=0 \\ &\nabla\times\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},\omega)=-i\omega\epsilon(\omega)\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},\omega), \quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},\omega)=0, \quad\Longrightarrow\quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},\omega)=0 \end{aligned} \tag{1}$$

对单色波，所有电磁场分量都可以写成如下形式

$F(\vec{r},t)=F(\vec{r})\cos(\omega_0 t+\phi)=\mathrm{Re}\left[\,\mathcal{F}(\vec{r})e^{-i\omega_0 t}\,\right]$ 其中复数函数 $\mathcal{F}(\vec{r})=F(\vec{r})e^{-i\phi}$

$$F(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\left[\mathcal{F}(\vec{r})e^{-i\omega_0 t}+\mathcal{F}^*(\vec{r})e^{i\omega_0 t}\right]$$

故，对一般线性色散介质，无源均匀介质区的麦氏方程在频域可写成：

$$\begin{aligned}
&\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=i\omega\mu(\omega)\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega), \quad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=0\\
&\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=-i\omega\epsilon(\omega)\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega), \quad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=0, \quad \Longrightarrow \quad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=0
\end{aligned} \tag{1}$$

对单色波，所有电磁场分量都可以写成如下形式

$F(\vec{\boldsymbol{r}},t)=F(\vec{\boldsymbol{r}})\cos(\omega_0 t+\phi)=\mathrm{Re}\left[\,\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega_0 t}\,\right]$ 其中复数函数 $\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})=F(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\phi}$

$F(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{2}\left[\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega_0 t}+\mathcal{F}^*(\vec{\boldsymbol{r}})e^{i\omega_0 t}\right]$ 利用 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega t}\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega)$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\vec{\boldsymbol{r}},t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t=\pi\left[\,\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})\delta(\omega-\omega_0)+\mathcal{F}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\delta(\omega+\omega_0)\,\right]$$

故，对一般线性色散介质，无源均匀介质区的麦氏方程在频域可写成：

$$\begin{aligned}
&\nabla \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r},\omega) = i\omega\mu(\omega)\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},\omega), \quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r},\omega)=0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},\omega)=0 \\
&\nabla \times \vec{\mathcal{H}}(\vec{r},\omega) = -i\omega\epsilon(\omega)\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},\omega), \quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},\omega)=0, \quad \Longrightarrow \quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},\omega)=0
\end{aligned} \tag{1}$$

对单色波，所有电磁场分量都可以写成如下形式

$F(\vec{r},t) = F(\vec{r})\cos(\omega_0 t + \phi) = \mathrm{Re}\left[\,\mathcal{F}(\vec{r})e^{-i\omega_0 t}\right]$ 其中复数函数 $\mathcal{F}(\vec{r}) = F(\vec{r})e^{-i\phi}$

$F(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}(\vec{r})e^{-i\omega_0 t} + \mathcal{F}^*(\vec{r})e^{i\omega_0 t}\right]$ 利用 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\mathrm{d}t = 2\pi\delta(\omega)$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{F}(\vec{r},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\vec{r},t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t = \pi\left[\,\mathcal{F}(\vec{r})\delta(\omega-\omega_0) + \mathcal{F}^*(\vec{r})\delta(\omega+\omega_0)\,\right]$$

单色波：$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\,\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega_0 t}\right]$, $\vec{B}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\,\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})e^{-i\omega_0 t}\right]$, $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}), \vec{\mathcal{B}}(\vec{r})$ 为复矢量

故，对一般线性色散介质，无源均匀介质区的麦氏方程在频域可写成：

$$\begin{aligned}
&\nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},\omega)=i\omega\mu(\omega)\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},\omega), \quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r},\omega)=0 \quad\Longrightarrow\quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},\omega)=0\\
&\nabla\times\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},\omega)=-i\omega\epsilon(\omega)\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},\omega), \quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},\omega)=0, \quad\Longrightarrow\quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},\omega)=0
\end{aligned} \tag{1}$$

对单色波，所有电磁场分量都可以写成如下形式

$F(\vec{r},t)=F(\vec{r})\cos(\omega_0 t+\phi)=\mathrm{Re}\left[\mathcal{F}(\vec{r})e^{-i\omega_0 t}\right]$ 其中复数函数 $\mathcal{F}(\vec{r})=F(\vec{r})e^{-i\phi}$

$F(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\left[\mathcal{F}(\vec{r})e^{-i\omega_0 t}+\mathcal{F}^*(\vec{r})e^{i\omega_0 t}\right]$ 利用 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega t}\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega)$

$$\Longrightarrow\quad \mathcal{F}(\vec{r},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\vec{r},t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t=\pi\left[\mathcal{F}(\vec{r})\delta(\omega-\omega_0)+\mathcal{F}^*(\vec{r})\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

单色波：$\vec{E}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega_0 t}\right]$，$\vec{B}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})e^{-i\omega_0 t}\right]$， $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}), \vec{\mathcal{B}}(\vec{r})$ 为复矢量

$$\Longrightarrow\quad \begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},\omega)&=2\pi\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\delta(\omega-\omega_0)+\vec{\mathcal{E}}^*(\vec{r})\delta(\omega+\omega_0)\right]\\
\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},\omega)&=2\pi\left[\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})\delta(\omega-\omega_0)+\vec{\mathcal{B}}^*(\vec{r})\delta(\omega+\omega_0)\right]
\end{aligned}$$

故，对一般线性色散介质，无源均匀介质区的麦氏方程在频域可写成：

$$
\begin{aligned}
&\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=i\omega\mu(\omega)\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega), \quad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=0 \quad\Longrightarrow\quad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=0\\
&\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=-i\omega\epsilon(\omega)\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega), \quad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=0, \quad\Longrightarrow\quad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

对单色波，所有电磁场分量都可以写成如下形式

$$F(\vec{\boldsymbol{r}},t)=F(\vec{\boldsymbol{r}})\cos(\omega_0 t+\phi)=\mathrm{Re}\left[\,\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega_0 t}\right]$$

其中复数函数 $\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})=F(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\phi}$

$$F(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\tfrac{1}{2}\left[\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega_0 t}+\mathcal{F}^*(\vec{\boldsymbol{r}})e^{i\omega_0 t}\right]$$

利用 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega t}\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega)$

$$\Longrightarrow\quad \mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\vec{\boldsymbol{r}},t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t=\pi\left[\,\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})\delta(\omega-\omega_0)+\mathcal{F}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\delta(\omega+\omega_0)\,\right]$$

单色波：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega_0 t}\right]$，$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega_0 t}\right]$， $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})$, $\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为复矢量

$$
\Longrightarrow\quad
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)&=2\pi\left[\,\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})\delta(\omega-\omega_0)+\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\delta(\omega+\omega_0)\,\right]\\
\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}},\omega)&=2\pi\left[\,\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})\delta(\omega-\omega_0)+\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\delta(\omega+\omega_0)\,\right]
\end{aligned}
$$

代入 (1) 并比较 δ 函数的系数得：

故，对一般线性色散介质，无源均匀介质区的麦氏方程在频域可写成：

$$\begin{aligned}
&\nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},\omega)=i\omega\mu(\omega)\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},\omega), \quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r},\omega)=0 \implies \nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},\omega)=0\\
&\nabla\times\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},\omega)=-i\omega\epsilon(\omega)\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},\omega), \quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},\omega)=0, \implies \nabla\cdot\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},\omega)=0
\end{aligned} \qquad (1)$$

对单色波，所有电磁场分量都可以写成如下形式

$F(\vec{r},t)=F(\vec{r})\cos(\omega_0 t+\phi)=\mathrm{Re}\left[\mathcal{F}(\vec{r})e^{-i\omega_0 t}\right]$ 其中复数函数 $\mathcal{F}(\vec{r})=F(\vec{r})e^{-i\phi}$

$F(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\left[\mathcal{F}(\vec{r})e^{-i\omega_0 t}+\mathcal{F}^*(\vec{r})e^{i\omega_0 t}\right]$ 利用 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega t}\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega)$

$$\implies \mathcal{F}(\vec{r},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\vec{r},t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t=\pi\left[\mathcal{F}(\vec{r})\delta(\omega-\omega_0)+\mathcal{F}^*(\vec{r})\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

单色波：$\vec{E}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega_0 t}\right]$, $\vec{B}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})e^{-i\omega_0 t}\right]$, $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}), \vec{\mathcal{B}}(\vec{r})$ 为复矢量

$$\implies \begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},\omega)&=2\pi\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\delta(\omega-\omega_0)+\vec{\mathcal{E}}^*(\vec{r})\delta(\omega+\omega_0)\right]\\
\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},\omega)&=2\pi\left[\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})\delta(\omega-\omega_0)+\vec{\mathcal{B}}^*(\vec{r})\delta(\omega+\omega_0)\right]
\end{aligned}$$

代入 (1) 并比较 δ 函数的系数得：

无源均匀介质区单色波的麦氏方程：

$$\begin{aligned}
&\nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=i\omega_0\mu(\omega_0)\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}), \quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=0\\
&\nabla\times\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})=-i\omega_0\epsilon(\omega_0)\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}), \quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})=0
\end{aligned}$$

故，对一般线性色散介质，无源均匀介质区的麦氏方程在频域可写成：

$$\nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},\omega)=i\omega\mu(\omega)\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},\omega),\qquad \nabla\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r},\omega)=0\quad\Longrightarrow\quad\nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},\omega)=0$$
$$\nabla\times\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},\omega)=-i\omega\epsilon(\omega)\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},\omega),\qquad \nabla\cdot\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},\omega)=0,\quad\Longrightarrow\quad\nabla\cdot\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},\omega)=0 \qquad (1)$$

对单色波，所有电磁场分量都可以写成如下形式

$$F(\vec{r},t)=F(\vec{r})\cos(\omega_0 t+\phi)=\mathrm{Re}\left[\mathcal{F}(\vec{r})e^{-i\omega_0 t}\right]$$

其中复数函数 $\mathcal{F}(\vec{r})=F(\vec{r})e^{-i\phi}$

$$F(\vec{r},t)=\tfrac{1}{2}\left[\mathcal{F}(\vec{r})e^{-i\omega_0 t}+\mathcal{F}^*(\vec{r})e^{i\omega_0 t}\right]$$

利用 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega t}\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega)$

$$\Longrightarrow\quad\mathcal{F}(\vec{r},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\vec{r},t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t=\pi\left[\mathcal{F}(\vec{r})\delta(\omega-\omega_0)+\mathcal{F}^*(\vec{r})\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

单色波：$\vec{E}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega_0 t}\right]$，$\vec{B}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})e^{-i\omega_0 t}\right]$， $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$, $\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})$ 为复矢量

$$\Longrightarrow\quad\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},\omega)&=2\pi\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\delta(\omega-\omega_0)+\vec{\mathcal{E}}^*(\vec{r})\delta(\omega+\omega_0)\right]\\ \vec{\mathcal{B}}(\vec{r},\omega)&=2\pi\left[\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})\delta(\omega-\omega_0)+\vec{\mathcal{B}}^*(\vec{r})\delta(\omega+\omega_0)\right]\end{aligned}$$

代入 (1) 并比较 δ 函数的系数得：

无源均匀介质区单色波的麦氏方程：

$$\nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=i\omega_0\mu(\omega_0)\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}),\qquad\nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=0$$
$$\nabla\times\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})=-i\omega_0\epsilon(\omega_0)\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}),\qquad\nabla\cdot\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})=0$$

对旋度方程两边再求旋度并利用散度为 0，易得 Helmholtz 方程：

$$\nabla^2\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})+\omega^2\epsilon(\omega_0)\mu(\omega_0)\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=0$$
$$\nabla^2\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})+\omega^2\epsilon(\omega_0)\mu(\omega_0)\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})=0$$

无源均匀区单色波的麦氏方程：

$$\begin{aligned} \nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= i\omega\mu(\omega)\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}}), \quad & \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= 0 \\ \nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= -i\omega\epsilon(\omega)\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}), \quad & \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Let there be light

无源均匀区单色波的麦氏方程：

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = i\omega\mu(\omega)\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}}), \quad \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0$$
$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -i\omega\epsilon(\omega)\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}), \quad \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0 \tag{1}$$

可化为 Helmholtz 方程：

$$\nabla^2\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) + \omega^2\epsilon(\omega)\mu(\omega)\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0$$
$$\nabla^2\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) + \omega^2\epsilon(\omega)\mu(\omega)\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0 \tag{2}$$

Let there be light

无源均匀区单色波的麦氏方程：
$$\nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = i\omega\mu(\omega)\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}), \quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = 0$$
$$\nabla\times\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) = -i\omega\epsilon(\omega)\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}), \quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) = 0 \qquad (1)$$

可化为 Helmholtz 方程：
$$\nabla^2\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) + \omega^2\epsilon(\omega)\mu(\omega)\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = 0$$
$$\nabla^2\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) + \omega^2\epsilon(\omega)\mu(\omega)\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) = 0 \qquad (2)$$

注意实际的物理场为：$\vec{X}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{X}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$ (3)

无源均匀区单色波的麦氏方程：
$$\nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=i\omega\mu(\omega)\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}),\qquad \nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=0$$
$$\nabla\times\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})=-i\omega\epsilon(\omega)\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}),\qquad \nabla\cdot\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})=0 \tag{1}$$

可化为 Helmholtz 方程：
$$\nabla^2\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})+\omega^2\epsilon(\omega)\mu(\omega)\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=0$$
$$\nabla^2\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})+\omega^2\epsilon(\omega)\mu(\omega)\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})=0 \tag{2}$$

注意实际的物理场为：$\vec{X}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{X}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$ (3)

$\vec{X}$ 表示电场强度 $\vec{E}$、电位移矢量 $\vec{D}$、磁感应强度 $\vec{B}$ 或磁场强度 $\vec{H}$，$\vec{\mathcal{X}}$ 为复矢量

无源均匀区单色波的麦氏方程：

$$\nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=i\omega\mu(\omega)\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}),\qquad \nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=0$$
$$\nabla\times\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})=-i\omega\epsilon(\omega)\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}),\qquad \nabla\cdot\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})=0 \tag{1}$$

可化为 Helmholtz 方程：

$$\nabla^2\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})+\omega^2\epsilon(\omega)\mu(\omega)\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=0$$
$$\nabla^2\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})+\omega^2\epsilon(\omega)\mu(\omega)\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})=0 \tag{2}$$

注意实际的物理场为：$\vec{X}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{X}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$ (3)

$\vec{X}$ 表示电场强度 $\vec{E}$、电位移矢量 $\vec{D}$、磁感应强度 $\vec{B}$ 或磁场强度 $\vec{H}$，$\vec{\mathcal{X}}$ 为复矢量

(2) 式两边同乘 $e^{-i\omega t}$ 并利用 $\omega^2\vec{\mathcal{X}}(\vec{r})e^{-i\omega t}=-\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\vec{\mathcal{X}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$ 得

$$\nabla^2\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}-\epsilon(\omega)\mu(\omega)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]=0$$
$$\nabla^2\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})e^{-i\omega t}-\epsilon(\omega)\mu(\omega)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]=0$$

无源均匀区单色波的麦氏方程：
$$\nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = i\omega\mu(\omega)\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}),\qquad \nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = 0$$
$$\nabla\times\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) = -i\omega\epsilon(\omega)\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}),\qquad \nabla\cdot\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) = 0 \tag{1}$$

可化为 Helmholtz 方程：
$$\nabla^2\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) + \omega^2\epsilon(\omega)\mu(\omega)\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = 0$$
$$\nabla^2\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) + \omega^2\epsilon(\omega)\mu(\omega)\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) = 0 \tag{2}$$

注意实际的物理场为：$\vec{X}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{X}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$ (3)

$\vec{X}$ 表示电场强度 $\vec{E}$、电位移矢量 $\vec{D}$、磁感应强度 $\vec{B}$ 或磁场强度 $\vec{H}$，$\vec{\mathcal{X}}$ 为复矢量

(2) 式两边同乘 $e^{-i\omega t}$ 并利用 $\omega^2\vec{\mathcal{X}}(\vec{r})e^{-i\omega t} = -\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\vec{\mathcal{X}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$ 得

$$\nabla^2\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t} - \epsilon(\omega)\mu(\omega)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right] = 0$$
$$\nabla^2\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})e^{-i\omega t} - \epsilon(\omega)\mu(\omega)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right] = 0$$

利用：
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$$

无源均匀区单色波的麦氏方程：
$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})=i\omega\mu(\omega)\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\quad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})=0$$
$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}})=-i\omega\epsilon(\omega)\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\quad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}})=0 \tag{1}$$

可化为 Helmholtz 方程：
$$\nabla^2\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})+\omega^2\epsilon(\omega)\mu(\omega)\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})=0$$
$$\nabla^2\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})+\omega^2\epsilon(\omega)\mu(\omega)\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})=0 \tag{2}$$

注意实际的物理场为：$\vec{\boldsymbol{X}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$ (3)

$\vec{\boldsymbol{X}}$ 表示电场强度 $\vec{\boldsymbol{E}}$、电位移矢量 $\vec{\boldsymbol{D}}$、磁感应强度 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 或磁场强度 $\vec{\boldsymbol{H}}$，$\vec{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$ 为复矢量

(2) 式两边同乘 $e^{-i\omega t}$ 并利用 $\omega^2\vec{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}=-\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$ 得

$$\nabla^2\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}-\epsilon(\omega)\mu(\omega)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]=0$$
$$\nabla^2\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}-\epsilon(\omega)\mu(\omega)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]=0$$

利用：
$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$$
$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$$

方程两边取实部，并利用取实部运算与 ∇、$\partial/\partial t$ 运算可交换次序，得波动方程：

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left\{\begin{array}{c}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\\ \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\end{array}\right\}=0$$

其中：$v=1/\sqrt{\epsilon\mu}$

无源均匀区单色波的麦氏方程：
$$\nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = i\omega\mu(\omega)\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}),\quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = 0$$
$$\nabla\times\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) = -i\omega\epsilon(\omega)\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}),\quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) = 0 \qquad (1)$$

可化为 Helmholtz 方程：
$$\nabla^2\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) + \omega^2\epsilon(\omega)\mu(\omega)\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = 0$$
$$\nabla^2\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) + \omega^2\epsilon(\omega)\mu(\omega)\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) = 0 \qquad (2)$$

注意实际的物理场为：$\vec{X}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{X}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$ (3)

$\vec{X}$ 表示电场强度 $\vec{E}$、电位移矢量 $\vec{D}$、磁感应强度 $\vec{B}$ 或磁场强度 $\vec{H}$，$\vec{\mathcal{X}}$ 为复矢量

(2) 式两边同乘 $e^{-i\omega t}$ 并利用 $\omega^2\vec{\mathcal{X}}(\vec{r})e^{-i\omega t} = -\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\vec{\mathcal{X}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$ 得

$$\nabla^2\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t} - \epsilon(\omega)\mu(\omega)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right] = 0$$
$$\nabla^2\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})e^{-i\omega t} - \epsilon(\omega)\mu(\omega)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right] = 0$$

利用：
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$$

方程两边取实部，并利用取实部运算与 ∇、$\partial/\partial t$ 运算可交换次序，得波动方程：

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left\{\begin{array}{c}\vec{E}(\vec{r},t)\\ \vec{B}(\vec{r},t)\end{array}\right\} = 0$$

其中：$v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$

对单色波，用复数场 (3) 表示实际物理场，对时间的偏导可作代换：$\partial X/\partial t \quad\Longrightarrow\quad -i\omega X$

结论：在线性、均匀、各向同性 $\left\{\begin{array}{c}\text{无色散介质中}\\ \text{或}\\ \text{只讨论单色波}\end{array}\right.$ 电磁波满足

波动方程：$\left(\nabla^2 - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left\{\begin{array}{c}\vec{E}\\ \vec{B}\end{array}\right\} = 0$ 和 横波条件：$\nabla \cdot \left\{\begin{array}{c}\vec{E}\\ \vec{B}\end{array}\right\} = 0$

结论： 在线性、均匀、各向同性 $\left\{\begin{array}{c}\text{无色散介质中} \\ \text{或} \\ \text{只讨论单色波}\end{array}\right.$ 电磁波满足

波动方程： $\left(\nabla^2 - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left\{\begin{array}{c}\vec{\boldsymbol{E}} \\ \vec{\boldsymbol{B}}\end{array}\right\} = 0$ 和 **横波条件：** $\nabla\cdot\left\{\begin{array}{c}\vec{\boldsymbol{E}} \\ \vec{\boldsymbol{B}}\end{array}\right\} = 0$

二、单色电磁波 — Helmholtz 方程

结论：在线性、均匀、各向同性 $\left\{\begin{array}{c}\text{无色散介质中}\\ \text{或}\\ \text{只讨论单色波}\end{array}\right.$ 电磁波满足

波动方程： $\left(\nabla^2 - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left\{\begin{array}{c}\vec{\boldsymbol{E}}\\ \vec{\boldsymbol{B}}\end{array}\right\} = 0$ **和** **横波条件：** $\nabla \cdot \left\{\begin{array}{c}\vec{\boldsymbol{E}}\\ \vec{\boldsymbol{B}}\end{array}\right\} = 0$

二、单色电磁波 — Helmholtz 方程

既然任意随时间变化的电磁波均可分解为单色波的叠加，作为基础，讨论

单色电磁波：

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \sum_i E_i(\vec{\boldsymbol{r}})\,\hat{\boldsymbol{e}}_i\cos(\omega t + \phi_{Ei})\\ \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \sum_i B_i(\vec{\boldsymbol{r}})\,\hat{\boldsymbol{e}}_i\cos(\omega t + \phi_{Bi})\end{aligned} \tag{1}$$

结论： 在线性、均匀、各向同性 $\left\{\begin{array}{c}\text{无色散介质中} \\ \text{或} \\ \text{只讨论单色波}\end{array}\right.$ 电磁波满足

波动方程： $\left(\nabla^2 - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left\{\begin{array}{c}\vec{\boldsymbol{E}} \\ \vec{\boldsymbol{B}}\end{array}\right\} = 0$ 和 **横波条件：** $\nabla\cdot\left\{\begin{array}{c}\vec{\boldsymbol{E}} \\ \vec{\boldsymbol{B}}\end{array}\right\} = 0$

二、单色电磁波 — Helmholtz 方程

既然任意随时间变化的电磁波均可分解为单色波的叠加，作为基础，讨论

单色电磁波：

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \sum_i E_i(\vec{\boldsymbol{r}})\,\hat{\boldsymbol{e}}_i\cos(\omega t+\phi_{Ei}) \\ \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \sum_i B_i(\vec{\boldsymbol{r}})\,\hat{\boldsymbol{e}}_i\cos(\omega t+\phi_{Bi})\end{aligned} \tag{1}$$

为了数学上描述的方便，常用复数形式来表示电磁场：

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right] \\ \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})$，$\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为复数矢量。

结论：在线性、均匀、各向同性 $\left\{\begin{array}{c}\text{无色散介质中}\\ \text{或}\\ \text{只讨论单色波}\end{array}\right.$ 电磁波满足

波动方程：$\left(\nabla^2 - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left\{\begin{array}{c}\vec{\boldsymbol{E}}\\ \vec{\boldsymbol{B}}\end{array}\right\} = 0$ 和 横波条件：$\nabla\cdot\left\{\begin{array}{c}\vec{\boldsymbol{E}}\\ \vec{\boldsymbol{B}}\end{array}\right\} = 0$

二、单色电磁波 — Helmholtz 方程

既然任意随时间变化的电磁波均可分解为单色波的叠加，作为基础，讨论

单色电磁波：

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \sum_i E_i(\vec{\boldsymbol{r}})\,\hat{\boldsymbol{e}}_i\cos(\omega t+\phi_{Ei})\\ \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \sum_i B_i(\vec{\boldsymbol{r}})\,\hat{\boldsymbol{e}}_i\cos(\omega t+\phi_{Bi})\end{aligned} \tag{1}$$

为了数学上描述的方便，常用复数形式来表示电磁场：

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]\\ \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})$，$\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为复数矢量。

只要考虑到实际场是取复数形式 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}$ 的实部

结论： 在线性、均匀、各向同性 $\left\{\begin{array}{c}\text{无色散介质中}\\ \text{或}\\ \text{只讨论单色波}\end{array}\right.$ 电磁波满足

波动方程： $\left(\nabla^2 - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left\{\begin{array}{c}\vec{\boldsymbol{E}}\\ \vec{\boldsymbol{B}}\end{array}\right\} = 0$ 和 **横波条件：** $\nabla\cdot\left\{\begin{array}{c}\vec{\boldsymbol{E}}\\ \vec{\boldsymbol{B}}\end{array}\right\} = 0$

二、单色电磁波 — Helmholtz 方程

既然任意随时间变化的电磁波均可分解为单色波的叠加，作为基础，讨论

单色电磁波：

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \sum_i E_i(\vec{\boldsymbol{r}})\,\hat{\boldsymbol{e}}_i\cos(\omega t + \phi_{Ei})\\ \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \sum_i B_i(\vec{\boldsymbol{r}})\,\hat{\boldsymbol{e}}_i\cos(\omega t + \phi_{Bi})\end{aligned} \qquad (1)$$

为了数学上描述的方便，常用复数形式来表示电磁场：

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]\\ \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]\end{aligned} \qquad (2)$$

其中 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})$，$\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 为复数矢量。

只要考虑到实际场是取复数形式 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}$ 的实部

那么形如(2)的复数形式即可表示任意的单色波 (1)

用复数形式（复数场）来表示电磁场：

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]\\ \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]\end{aligned} \tag{1}$$

几点说明：

用复数形式（复数场）来表示电磁场：

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) &= \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right] \\
\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) &= \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

几点说明：

1. 满足 Maxwell 方程的是真正的物理量。因此，应该是先对复数场取实部，得到真正的物理量

用复数形式（复数场）来表示电磁场：

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) &= \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) e^{-i\omega t}\right] \\
\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) &= \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) e^{-i\omega t}\right]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

几点说明：

1. 满足 Maxwell 方程的是真正的物理量。因此，应该是先对复数场取实部，得到真正的物理量再代入麦氏方程求解。但由于麦氏方程是线性方程，取实部运算和微分运算可交换次序，

用复数形式（复数场）来表示电磁场：

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]\\ \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]\end{aligned} \tag{1}$$

几点说明：

1. 满足 Maxwell 方程的是真正的物理量。因此，应该是先对复数场取实部，得到真正的物理量再代入麦氏方程求解。但由于麦氏方程是线性方程，取实部运算和微分运算可交换次序，因此可以将复数形式代入 Maxwell 方程，求得复数解后，最后再取实部得到真正的物理量

用复数形式（复数场）来表示电磁场：

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) &= \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) e^{-i\omega t}\right] \\
\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) &= \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) e^{-i\omega t}\right]
\end{aligned} \tag{1}
$$

几点说明：

1. 满足 Maxwell 方程的是真正的物理量。因此，应该是先对复数场取实部，得到真正的物理量再代入麦氏方程求解。但由于麦氏方程是线性方程，取实部运算和微分运算可交换次序，因此可以将复数形式代入 Maxwell 方程，求得复数解后，最后再取实部得到真正的物理量
2. 由于时间因子由 $e^{-i\omega t}$ 描述，因此任何物理量都表示为：$X(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \mathcal{X}(\vec{\boldsymbol{r}}) e^{-i\omega t}$

用复数形式（复数场）来表示电磁场：

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]\\ \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]\end{aligned} \qquad (1)$$

几点说明：

1. 满足 Maxwell 方程的是真正的物理量。因此，应该是先对复数场取实部，得到真正的物理量再代入麦氏方程求解。但由于麦氏方程是线性方程，取实部运算和微分运算可交换次序，因此可以将复数形式代入 Maxwell 方程，求得复数解后，最后再取实部得到真正的物理量
2. 由于时间因子由 $e^{-i\omega t}$ 描述，因此任何物理量都表示为：$X(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mathcal{X}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}$
   其对时间的偏微分可写成 $\dfrac{\partial X}{\partial t} = -i\omega\mathcal{X}e^{-i\omega t} = -i\omega X$

用复数形式（复数场）来表示电磁场：

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$$
$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right] \quad (1)$$

几点说明：

1. 满足 Maxwell 方程的是真正的物理量。因此，应该是先对复数场取实部，得到真正的物理量再代入麦氏方程求解。但由于麦氏方程是线性方程，取实部运算和微分运算可交换次序，因此可以将复数形式代入 Maxwell 方程，求得复数解后，最后再取实部得到真正的物理量
2. 由于时间因子由 $e^{-i\omega t}$ 描述，因此任何物理量都表示为：$X(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathcal{X}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}$
   其对时间的偏微分可写成 $\dfrac{\partial X}{\partial t}=-i\omega\mathcal{X}e^{-i\omega t}=-i\omega X$
   而在线性方程中，各项中的 $e^{-i\omega t}$ 可取出消去。

用复数形式（复数场）来表示电磁场：

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right] \\ \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]\end{aligned} \tag{1}$$

几点说明：

1. 满足 Maxwell 方程的是真正的物理量。因此，应该是先对复数场取实部，得到真正的物理量再代入麦氏方程求解。但由于麦氏方程是线性方程，取实部运算和微分运算可交换次序，因此可以将复数形式代入 Maxwell 方程，求得复数解后，最后再取实部得到真正的物理量
2. 由于时间因子由 $e^{-i\omega t}$ 描述，因此任何物理量都表示为：$X(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mathcal{X}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}$

   其对时间的偏微分可写成 $\dfrac{\partial X}{\partial t} = -i\omega\mathcal{X}e^{-i\omega t} = -i\omega X$

   而在线性方程中，各项中的 $e^{-i\omega t}$ 可取出消去。

   因此只要所有 $\dfrac{\partial X}{\partial t}$ 以 $-i\omega X$ 替代，线性方程可写成只包含空间部分 $\mathcal{X}$ 的方程。

用复数形式（复数场）来表示电磁场：

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) &= \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right] \\
\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) &= \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]
\end{aligned} \tag{1}
$$

几点说明：

1. 满足 Maxwell 方程的是真正的物理量。因此，应该是先对复数场取实部，得到真正的物理量再代入麦氏方程求解。但由于麦氏方程是线性方程，取实部运算和微分运算可交换次序，因此可以将复数形式代入 Maxwell 方程，求得复数解后，最后再取实部得到真正的物理量

2. 由于时间因子由 $e^{-i\omega t}$ 描述，因此任何物理量都表示为：$X(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \mathcal{X}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}$

   其对时间的偏微分可写成 $\dfrac{\partial X}{\partial t} = -i\omega \mathcal{X} e^{-i\omega t} = -i\omega X$

   而在线性方程中，各项中的 $e^{-i\omega t}$ 可取出消去。

   因此只要所有 $\dfrac{\partial X}{\partial t}$ 以 $-i\omega X$ 替代，线性方程可写成只包含空间部分 $\mathcal{X}$ 的方程。

   这就是为什么把单色波的电磁场写成复数形式

用复数形式（复数场）来表示电磁场：

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$$
$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right] \quad (1)$$

几点说明：

1. 满足 Maxwell 方程的是真正的物理量。因此，应该是先对复数场取实部，得到真正的物理量再代入麦氏方程求解。但由于麦氏方程是线性方程，取实部运算和微分运算可交换次序，因此可以将复数形式代入 Maxwell 方程，求得复数解后，最后再取实部得到真正的物理量
2. 由于时间因子由 $e^{-i\omega t}$ 描述，因此任何物理量都表示为：$X(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathcal{X}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}$
   其对时间的偏微分可写成 $\dfrac{\partial X}{\partial t}=-i\omega\mathcal{X}e^{-i\omega t}=-i\omega X$
   而在线性方程中，各项中的 $e^{-i\omega t}$ 可取出消去。
   因此只要所有 $\dfrac{\partial X}{\partial t}$ 以 $-i\omega X$ 替代，线性方程可写成只包含空间部分 $\mathcal{X}$ 的方程。
   这就是为什么把单色波的电磁场写成复数形式
3. 电磁场写成复数形式 (1)，表示时间的因子 $e^{-i\omega t}$ 有的书（文献）取为 $e^{+i\omega t}$

用复数形式（复数场）来表示电磁场：

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \text{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \text{Re}\left[\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right] \tag{1}$$

几点说明：

1. 满足 Maxwell 方程的是真正的物理量。因此，应该是先对复数场取实部，得到真正的物理量再代入麦氏方程求解。但由于麦氏方程是线性方程，取实部运算和微分运算可交换次序，因此可以将复数形式代入 Maxwell 方程，求得复数解后，最后再取实部得到真正的物理量

2. 由于时间因子由 $e^{-i\omega t}$ 描述，因此任何物理量都表示为：$X(\vec{r},t) = \mathcal{X}(\vec{r})e^{-i\omega t}$
   其对时间的偏微分可写成 $\dfrac{\partial X}{\partial t} = -i\omega\mathcal{X}e^{-i\omega t} = -i\omega X$
   而在线性方程中，各项中的 $e^{-i\omega t}$ 可取出消去。
   因此只要所有 $\dfrac{\partial X}{\partial t}$ 以 $-i\omega X$ 替代，线性方程可写成只包含空间部分 $\mathcal{X}$ 的方程。
   这就是为什么把单色波的电磁场写成复数形式

3. 电磁场写成复数形式 (1)，表示时间的因子 $e^{-i\omega t}$ 有的书（文献）取为 $e^{+i\omega t}$
   取不同形式，对应的方程形式也可能不同，在阅读不同教材时应注意其时间因子的形式。

用复数场表示单色电磁波（场）

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \text{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \text{Re}\left[\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$$

这时波动方程： $\left(\nabla^2 - \epsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{pmatrix}\vec{E}(\vec{r},t)\\ \vec{B}(\vec{r},t)\end{pmatrix} = 0$ 化为

(以复数场形式代入，$\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow -i\omega$，消去时间因子 $e^{-i\omega t}$ 即得)

$$\nabla^2\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) + \omega^2\epsilon\mu\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = 0$$

$$\nabla^2\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) + \omega^2\epsilon\mu\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) = 0$$

Let there be light

用复数场表示单色电磁波（场）

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \text{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \text{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$$

这时波动方程：$\left(\nabla^2 - \epsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{pmatrix}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\\ \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\end{pmatrix} = 0$ 化为

(以复数场形式代入，$\dfrac{\partial}{\partial t} \Rightarrow -i\omega$，消去时间因子 $e^{-i\omega t}$ 即得)

$$\nabla^2\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) + \omega^2\epsilon\mu\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0$$

$$\nabla^2\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) + \omega^2\epsilon\mu\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0$$

Helmholtz 方程

用复数场表示单色电磁波（场）
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$$

这时波动方程：$\left(\nabla^2 - \epsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{pmatrix}\vec{E}(\vec{r},t)\\ \vec{B}(\vec{r},t)\end{pmatrix} = 0$ 化为

(以复数场形式代入，$\dfrac{\partial}{\partial t} \Rightarrow -i\omega$，消去时间因子 $e^{-i\omega t}$ 即得)

$$\nabla^2\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) + \omega^2\epsilon\mu\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = 0$$
$$\nabla^2\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) + \omega^2\epsilon\mu\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) = 0$$

Helmholtz 方程

故对单色波，由 Helmholtz 方程

$$\nabla^2\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) + \omega^2\epsilon\mu\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = 0$$
$$\nabla^2\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) + \omega^2\epsilon\mu\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) = 0$$

Let there be light

用复数场表示单色电磁波（场）

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \text{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \text{Re}\left[\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$$

这时波动方程： $\left(\nabla^2 - \epsilon\mu\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{pmatrix}\vec{E}(\vec{r},t)\\ \vec{B}(\vec{r},t)\end{pmatrix} = 0$ 化为

(以复数场形式代入，$\dfrac{\partial}{\partial t} \Rightarrow -i\omega$，消去时间因子 $e^{-i\omega t}$ 即得)

$$\nabla^2\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) + \omega^2\epsilon\mu\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = 0$$

$$\nabla^2\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) + \omega^2\epsilon\mu\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) = 0$$

Helmholtz 方程

故对单色波，由 Helmholtz 方程

$$\nabla^2\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) + \omega^2\epsilon\mu\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = 0$$

$$\nabla^2\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) + \omega^2\epsilon\mu\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) = 0$$

联立：

$$\nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = 0$$

$$\nabla\cdot\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) = 0$$

横波条件

用复数场表示单色电磁波（场）

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \text{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \text{Re}\left[\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$$

这时波动方程： $\left(\nabla^2 - \epsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{pmatrix}\vec{E}(\vec{r},t)\\ \vec{B}(\vec{r},t)\end{pmatrix} = 0$ 化为

(以复数场形式代入，$\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow -i\omega$，消去时间因子 $e^{-i\omega t}$ 即得)

$$\nabla^2\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) + \omega^2\epsilon\mu\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = 0$$

$$\nabla^2\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) + \omega^2\epsilon\mu\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) = 0$$

Helmholtz 方程

故对单色波，由 Helmholtz 方程

$$\nabla^2\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) + \omega^2\epsilon\mu\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = 0$$

$$\nabla^2\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) + \omega^2\epsilon\mu\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) = 0$$

联立：

$$\nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = 0$$

$$\nabla\cdot\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) = 0$$

横波条件

即可求解其中一组方程，得 $\vec{\mathcal{E}}$ 或 $\vec{\mathcal{B}}$，再由下式即可求得 $\vec{\mathcal{B}}$ 或 $\vec{\mathcal{E}}$

$$-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \nabla\times\vec{E} \Rightarrow i\omega\vec{\mathcal{B}} = \nabla\times\vec{\mathcal{E}} \quad \text{或} \quad \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \nabla\times\vec{H} \Rightarrow i\omega\epsilon\mu\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\times\vec{\mathcal{B}}$$

三、平面电磁波

三、平面电磁波

在线性均匀各向同性非导电介质，单色波的 $\vec{\mathcal{E}}$ 满足 Helmholtz 方程与横波条件，需要求解

$$\nabla^2\vec{\mathcal{E}}+k^2\vec{\mathcal{E}}=0,\quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}=0,\quad \text{再由}\quad \vec{\mathcal{B}}=\frac{i}{\omega}\nabla\times\vec{\mathcal{E}}\quad \text{得：}\vec{\mathcal{B}}$$

其中 $k^2=\omega^2\epsilon\mu$ 为实常数（实数是因为介质非导电，常数是因为介质均匀）

三、平面电磁波

在线性均匀各向同性非导电介质，单色波的 $\vec{\mathcal{E}}$ 满足 Helmholtz 方程与横波条件，需要求解

$$\nabla^2\vec{\mathcal{E}}+k^2\vec{\mathcal{E}}=0,\quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}=0,\quad \text{再由}\quad \vec{\mathcal{B}}=\frac{i}{\omega}\nabla\times\vec{\mathcal{E}}\quad \text{得：}\vec{\mathcal{B}}$$

其中 $k^2=\omega^2\epsilon\mu$ 为实常数（实数是因为介质非导电，常数是因为介质均匀）

上方程可以有各种形式的解：如球面波解，柱面波解，平面波解。

最简单的是 平面波解：$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=\vec{\mathcal{E}}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

$\vec{\mathcal{E}}_0$ 为复常矢量，$\vec{k}$ 为实矢量

满足：$\boxed{\vec{k}\cdot\vec{k}=k^2=\omega^2\epsilon\mu}$。 (1)

讨论与说明：

三、平面电磁波

在线性均匀各向同性非导电介质，单色波的 $\vec{\mathcal{E}}$ 满足 Helmholtz 方程与横波条件，需要求解

$$\nabla^2\vec{\mathcal{E}}+k^2\vec{\mathcal{E}}=0,\quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}=0,\quad \text{再由}\quad \vec{\mathcal{B}}=\frac{i}{\omega}\nabla\times\vec{\mathcal{E}}\quad \text{得：}\vec{\mathcal{B}}$$

其中 $k^2=\omega^2\epsilon\mu$ 为实常数（实数是因为介质非导电，常数是因为介质均匀）

上方程可以有各种形式的解：如球面波解，柱面波解，平面波解。

最简单的是 平面波解：$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=\vec{\mathcal{E}}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ $\quad$ $\vec{\mathcal{E}}_0$ 为复常矢量，$\vec{k}$ 为实矢量

满足：$\boxed{\vec{k}\cdot\vec{k}=k^2=\omega^2\epsilon\mu}$。 (1)

讨论与说明：

1. 容易验证平面波解 (1) 满足：

$$\nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}),\quad \nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=i\vec{k}\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}),\quad \nabla\,\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=i\vec{k}\,\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}),\quad \boxed{\nabla\Longrightarrow i\vec{k}}$$

三、平面电磁波

在线性均匀各向同性非导电介质，单色波的 $\vec{\mathcal{E}}$ 满足 Helmholtz 方程与横波条件，需要求解

$$\nabla^2\vec{\mathcal{E}}+k^2\vec{\mathcal{E}}=0, \quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}=0, \quad \text{再由} \quad \vec{\mathcal{B}}=\frac{i}{\omega}\nabla\times\vec{\mathcal{E}} \quad \text{得：} \vec{\mathcal{B}}$$

其中 $k^2=\omega^2\epsilon\mu$ 为实常数（实数是因为介质非导电，常数是因为介质均匀）

上方程可以有各种形式的解：如球面波解，柱面波解，平面波解。

$\vec{\mathcal{E}}_0$ 为复常矢量，$\vec{k}$ 为实矢量

最简单的是 平面波解：$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=\vec{\mathcal{E}}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ 满足：$\boxed{\vec{k}\cdot\vec{k}=k^2=\omega^2\epsilon\mu}$。 (1)

讨论与说明：

1. 容易验证平面波解 (1) 满足：

$$\nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}), \quad \nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=i\vec{k}\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}), \quad \nabla\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=i\vec{k}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}), \quad \boxed{\nabla \Longrightarrow i\vec{k}}$$

故：$\nabla^2\vec{\mathcal{E}}=\nabla\cdot(\nabla\vec{\mathcal{E}})=\nabla\cdot(i\vec{k}\vec{\mathcal{E}})=i\vec{k}\cdot\nabla\vec{\mathcal{E}}=i\vec{k}\cdot(i\vec{k}\vec{\mathcal{E}})=-k^2\vec{\mathcal{E}}$

三、平面电磁波

在线性均匀各向同性非导电介质，单色波的 $\vec{\mathcal{E}}$ 满足 Helmholtz 方程与横波条件，需要求解

$$\nabla^2\vec{\mathcal{E}}+k^2\vec{\mathcal{E}}=0,\quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}=0,\quad \text{再由}\quad \vec{\mathcal{B}}=\frac{i}{\omega}\nabla\times\vec{\mathcal{E}}\quad \text{得：}\vec{\mathcal{B}}$$

其中 $k^2=\omega^2\epsilon\mu$ 为实常数（实数是因为介质非导电，常数是因为介质均匀）

上方程可以有各种形式的解：如球面波解，柱面波解，平面波解。

最简单的是 平面波解：$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=\vec{\mathcal{E}}_0e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

$\vec{\mathcal{E}}_0$ 为复常矢量，$\vec{k}$ 为实矢量

满足：$\boxed{\vec{k}\cdot\vec{k}=k^2=\omega^2\epsilon\mu}$。 (1)

讨论与说明：

1. 容易验证平面波解 (1) 满足：

$$\nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}),\quad \nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=i\vec{k}\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}),\quad \nabla\,\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=i\vec{k}\,\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}),\qquad \boxed{\nabla\Longrightarrow i\vec{k}}$$

故：$\nabla^2\vec{\mathcal{E}}=\nabla\cdot(\nabla\vec{\mathcal{E}})=\nabla\cdot(i\vec{k}\vec{\mathcal{E}})=i\vec{k}\cdot\nabla\vec{\mathcal{E}}=i\vec{k}\cdot(i\vec{k}\vec{\mathcal{E}})=-k^2\vec{\mathcal{E}}$

$\Longrightarrow\quad \nabla^2\vec{\mathcal{E}}+k^2\vec{\mathcal{E}}=0$ 　　平面波解 (1) 满足 Helmholtz 方程。

2. 实际物理场 $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \text{Re}\left[\,\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\,\right]$，场的 i 分量为：

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \text{Re}\left[\,\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\,\right] = \text{Re}\left[\,\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}\,\right]$$
$$= |E_{0i}|\cos(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t+\phi_i)$$

其中：$\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 = |E_{0i}|e^{i\phi_i}$

2. 实际物理场 $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \text{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$，场的 i 分量为：

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \text{Re}\left[\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right] = \text{Re}\left[\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}\right]$$

$$= |E_{0i}|\cos(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t+\phi_i)$$

其中：$\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 = |E_{0i}|e^{i\phi_i}$

$|E_{0i}|$：波振幅　　$(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t+\phi_i)=\Phi$：波振动位相（相位）　　ϕ_i：初相

2. 实际物理场 $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \text{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$，场的 i 分量为：

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \text{Re}\left[\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right] = \text{Re}\left[\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}\right]$$

$$= |E_{0i}|\cos(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - \omega t + \phi_i)$$

其中：$\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 = |E_{0i}|e^{i\phi_i}$

$|E_{0i}|$：波振幅　　$(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - \omega t + \phi_i) = \Phi$：波振动位相（相位）　　ϕ_i：初相

某时刻空间位相相同的点满足：$\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} = \text{const.}$

2. 实际物理场 $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mathsf{Re}\left[\, \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t} \,\right]$，场的 i 分量为：

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mathsf{Re}\left[\, \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t} \,\right] = \mathsf{Re}\left[\, \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t} \,\right]$$

$$= |E_{0i}| \cos(\vec{\boldsymbol{k}} \cdot \vec{\boldsymbol{r}} - \omega t + \phi_i)$$

其中：$\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 = |E_{0i}|e^{i\phi_i}$

$|E_{0i}|$：波振幅　　$(\vec{\boldsymbol{k}} \cdot \vec{\boldsymbol{r}} - \omega t + \phi_i) = \Phi$：波振动位相（相位）　　ϕ_i：初相

某时刻空间位相相同的点满足：$\vec{\boldsymbol{k}} \cdot \vec{\boldsymbol{r}} = \mathsf{const.}$　　系平面方程

2. 实际物理场 $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \text{Re}\left[\, \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t} \,\right]$，场的 i 分量为：

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \text{Re}\left[\, \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t} \,\right] = \text{Re}\left[\, \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t} \,\right]$$

$$= |E_{0i}|\cos(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - \omega t + \phi_i)$$

其中：$\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 = |E_{0i}|e^{i\phi_i}$

$|E_{0i}|$：波振幅　　$(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - \omega t + \phi_i) = \Phi$：波振动位相（相位）　　ϕ_i：初相

某时刻空间位相相同的点满足：$\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} = \text{const.}$　　系平面方程

故，空间等相面是平面，因而称为平面波。$\vec{\boldsymbol{k}}$ 为等相面（平面）的法向

2. 实际物理场 $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathrm{Re}\left[\,\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$，场的 i 分量为：

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathrm{Re}\left[\,\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[\,\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}\right]$$
$$=|E_{0i}|\cos(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t+\phi_i)$$

其中：$\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0=|E_{0i}|e^{i\phi_i}$

$|E_{0i}|$：波振幅　　$(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t+\phi_i)=\Phi$：波振动位相（相位）　　ϕ_i：初相

某时刻空间位相相同的点满足：$\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}=\mathrm{const.}$　　系平面方程

故，空间等相面是平面，因而称为平面波。$\vec{\boldsymbol{k}}$ 为等相面（平面）的法向

3. 沿 $\vec{\boldsymbol{k}}$ 方向相位相差 2π 的两个等相面平面相距：$\dfrac{2\pi}{k}$，故波长 $\lambda=\dfrac{2\pi}{k}$

2. 实际物理场 $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mathrm{Re}\left[\,\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\,\right]$，场的 i 分量为：

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mathrm{Re}\left[\,\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\,\right] = \mathrm{Re}\left[\,\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}\,\right]$$

$$= |E_{0i}|\cos(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - \omega t + \phi_i)$$

其中：$\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 = |E_{0i}|e^{i\phi_i}$

$|E_{0i}|$：波振幅　　$(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - \omega t + \phi_i) = \Phi$：波振动位相（相位）　　ϕ_i：初相

某时刻空间位相相同的点满足：$\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} = \mathrm{const.}$　　系平面方程

故，空间等相面是平面，因而称为平面波。$\vec{\boldsymbol{k}}$ 为等相面（平面）的法向

3. 沿 $\vec{\boldsymbol{k}}$ 方向相位相差 2π 的两个等相面平面相距：$\dfrac{2\pi}{k}$，故波长 $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$

实矢量 $\vec{\boldsymbol{k}}$ 称为波矢量，大小与波长有关，方向沿等相面法向

2. 实际物理场 $\vec{E}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\Big[\,\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\,\Big]$，场的 i 分量为：

$$\hat{e}_i\cdot\vec{E}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\Big[\,\hat{e}_i\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\,\Big]=\mathrm{Re}\Big[\,\hat{e}_i\cdot\vec{\mathcal{E}}_0e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}\,\Big]$$

$$=|E_{0i}|\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi_i)\qquad \text{其中：}\ \hat{e}_i\cdot\vec{\mathcal{E}}_0=|E_{0i}|e^{i\phi_i}$$

$|E_{0i}|$：波振幅 $\qquad(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi_i)=\Phi$：波振动位相（相位） $\qquad\phi_i$：初相

某时刻空间位相相同的点满足：$\vec{k}\cdot\vec{r}=\text{const.}$ 系平面方程

故，空间等相面是平面，因而称为平面波。$\vec{k}$ 为等相面（平面）的法向

3. 沿 $\vec{k}$ 方向相位相差 2π 的两个等相面平面相距：$\dfrac{2\pi}{k}$，故波长 $\lambda=\dfrac{2\pi}{k}$

实矢量 $\vec{k}$ 称为波矢量，大小与波长有关，方向沿等相面法向

4. 设某时刻 t，空间 $\vec{r}$ 处的位相是 Φ_1，在 $t+\mathrm{d}t$ 时刻，于 $\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r}$ 处位相为 Φ_1

2. 实际物理场 $\vec{E}(\vec{r},t)=\text{Re}\left[\ \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$，场的 i 分量为：

$$\hat{e}_i\cdot\vec{E}(\vec{r},t)=\text{Re}\left[\ \hat{e}_i\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]=\text{Re}\left[\ \hat{e}_i\cdot\vec{\mathcal{E}}_0e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}\right]$$

$$=|E_{0i}|\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi_i)$$

其中：$\hat{e}_i\cdot\vec{\mathcal{E}}_0=|E_{0i}|e^{i\phi_i}$

$|E_{0i}|$：波振幅　　$(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi_i)=\Phi$：波振动位相（相位）　　ϕ_i：初相

某时刻空间位相相同的点满足：$\vec{k}\cdot\vec{r}=\text{const.}$　　系平面方程

故，空间等相面是平面，因而称为平面波。$\vec{k}$ 为等相面（平面）的法向

3. 沿 $\vec{k}$ 方向相位相差 2π 的两个等相面平面相距：$\dfrac{2\pi}{k}$，故波长 $\lambda=\dfrac{2\pi}{k}$

实矢量 $\vec{k}$ 称为波矢量，大小与波长有关，方向沿等相面法向

4. 设某时刻 t，空间 $\vec{r}$ 处的位相是 Φ_1，在 $t+\text{d}t$ 时刻，于 $\vec{r}+\text{d}\vec{r}$ 处位相为 Φ_1

则：$\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi_i=\vec{k}\cdot(\vec{r}+\text{d}\vec{r})-\omega(t+\text{d}t)+\phi_i=\Phi_1\quad\Longrightarrow\quad\vec{k}\cdot\text{d}\vec{r}=\omega\text{d}t$

$$\Longrightarrow\quad\frac{\text{d}\vec{r}}{\text{d}t}=\frac{\omega}{k}\frac{\vec{k}}{k}$$ 等相面的移动速度 —— 相速度：$\vec{v}_p=\dfrac{\text{d}\vec{r}}{\text{d}t}=\dfrac{\omega}{k^2}\vec{k}=\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}\dfrac{\vec{k}}{k}$

2. 实际物理场 $\vec{E}(\vec{r},t) = \text{Re}\left[\,\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\,\right]$，场的 i 分量为：

$$\hat{e}_i\cdot\vec{E}(\vec{r},t) = \text{Re}\left[\,\hat{e}_i\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\,\right] = \text{Re}\left[\,\hat{e}_i\cdot\vec{\mathcal{E}}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}\,\right]$$

$$= |E_{0i}|\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi_i)$$

其中：$\hat{e}_i\cdot\vec{\mathcal{E}}_0 = |E_{0i}|e^{i\phi_i}$

$|E_{0i}|$：波振幅　　$(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi_i) = \Phi$：波振动位相（相位）　　ϕ_i：初相

某时刻空间位相相同的点满足：$\vec{k}\cdot\vec{r} = \text{const.}$　　系平面方程

故，空间等相面是平面，因而称为平面波。$\vec{k}$ 为等相面（平面）的法向

3. 沿 $\vec{k}$ 方向相位相差 2π 的两个等相面平面相距：$\dfrac{2\pi}{k}$，故波长 $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$

实矢量 $\vec{k}$ 称为波矢量，大小与波长有关，方向沿等相面法向

4. 设某时刻 t，空间 $\vec{r}$ 处的位相是 Φ_1，在 $t+\text{d}t$ 时刻，于 $\vec{r}+\text{d}\vec{r}$ 处位相为 Φ_1

则：$\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi_i = \vec{k}\cdot(\vec{r}+\text{d}\vec{r})-\omega(t+\text{d}t)+\phi_i = \Phi_1 \quad\Longrightarrow\quad \vec{k}\cdot\text{d}\vec{r} = \omega\text{d}t$

$$\Longrightarrow\quad \frac{\text{d}\vec{r}}{\text{d}t} = \frac{\omega}{k}\frac{\vec{k}}{k}$$ 等相面的移动速度 —— 相速度：$\vec{v}_p = \dfrac{\text{d}\vec{r}}{\text{d}t} = \dfrac{\omega}{k^2}\vec{k} = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}\dfrac{\vec{k}}{k}$

$v_p = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$，　方向沿 $\vec{k}$ 方向。对真空：$v_p = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = c$　真空中单色平面波的相速度。

2. 实际物理场 $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathrm{Re}\left[\ \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\ \right]$，场的 i 分量为：

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathrm{Re}\left[\ \hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\ \right]=\mathrm{Re}\left[\ \hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}\ \right]$$

$$=|E_{0i}|\cos(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t+\phi_i)$$

其中：$\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0=|E_{0i}|e^{i\phi_i}$

$|E_{0i}|$：波振幅　　$(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t+\phi_i)=\Phi$：波振动位相（相位）　　ϕ_i：初相

某时刻空间位相相同的点满足：$\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}=\text{const.}$　　系平面方程

故，空间等相面是平面，因而称为平面波。$\vec{\boldsymbol{k}}$ 为等相面（平面）的法向

3. 沿 $\vec{\boldsymbol{k}}$ 方向相位相差 2π 的两个等相面平面相距：$\dfrac{2\pi}{k}$，故波长 $\lambda=\dfrac{2\pi}{k}$

实矢量 $\vec{\boldsymbol{k}}$ 称为波矢量，大小与波长有关，方向沿等相面法向

4. 设某时刻 t，空间 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 处的位相是 Φ_1，在 $t+\mathrm{d}t$ 时刻，于 $\vec{\boldsymbol{r}}+\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}$ 处位相为 Φ_1

则：$\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t+\phi_i=\vec{\boldsymbol{k}}\cdot(\vec{\boldsymbol{r}}+\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}})-\omega(t+\mathrm{d}t)+\phi_i=\Phi_1\quad\Longrightarrow\quad\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}=\omega\mathrm{d}t$

$\Longrightarrow\quad\dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\omega}{k}\dfrac{\vec{\boldsymbol{k}}}{k}$　等相面的移动速度 —— 相速度：$\vec{\boldsymbol{v}}_p=\dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\omega}{k^2}\vec{\boldsymbol{k}}=\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}\dfrac{\vec{\boldsymbol{k}}}{k}$

$v_p=\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$，　方向沿 $\vec{\boldsymbol{k}}$ 方向。对真空：$v_p=\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}=c$　真空中单色平面波的相速度。

5. 就空间某点 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 而言，相位改变 2π 需要的时间为周期，

2. 实际物理场 $\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\, \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t} \,\right]$，场的 i 分量为：

$$\hat{e}_i \cdot \vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\, \hat{e}_i \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t} \,\right] = \mathrm{Re}\left[\, \hat{e}_i \cdot \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t} \,\right]$$
$$= |E_{0i}|\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi_i)$$

其中：$\hat{e}_i \cdot \vec{\mathcal{E}}_0 = |E_{0i}|e^{i\phi_i}$

$|E_{0i}|$：波振幅　　$(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi_i) = \Phi$：波振动位相（相位）　　ϕ_i：初相

某时刻空间位相相同的点满足：$\vec{k}\cdot\vec{r} = \mathrm{const.}$　　系平面方程

故，空间等相面是平面，因而称为平面波。$\vec{k}$ 为等相面（平面）的法向

3. 沿 $\vec{k}$ 方向相位相差 2π 的两个等相面平面相距：$\dfrac{2\pi}{k}$，故波长 $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$

实矢量 $\vec{k}$ 称为波矢量，大小与波长有关，方向沿等相面法向

4. 设某时刻 t，空间 $\vec{r}$ 处的位相是 Φ_1，在 $t + \mathrm{d}t$ 时刻，于 $\vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}$ 处位相为 Φ_1

则：$\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi_i = \vec{k}\cdot(\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r}) - \omega(t+\mathrm{d}t) + \phi_i = \Phi_1 \quad \Longrightarrow \quad \vec{k}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \omega\mathrm{d}t$

$\Longrightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\omega}{k}\dfrac{\vec{k}}{k}$　等相面的移动速度 —— 相速度：$\vec{v}_p = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\omega}{k^2}\vec{k} = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}\dfrac{\vec{k}}{k}$

$v_p = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$，　方向沿 $\vec{k}$ 方向。对真空：$v_p = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = c$　真空中单色平面波的相速度。

5. 就空间某点 $\vec{r}$ 而言，相位改变 2π 需要的时间为周期，$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$，　$\omega = 2\pi/T$　角频率；$\nu = 1/T$　频率

5. 满足 Helmholtz 方程的解不一定满足麦氏方程，为保证满足麦氏方程，还需满足横波条件。

5. 满足 Helmholtz 方程的解不一定满足麦氏方程，为保证满足麦氏方程，还需满足横波条件。

故：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0 \quad\Longrightarrow\quad i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{k}}\cdot\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}e^{-i\omega t}\right]=0$，电场与波矢量垂直。

5. 满足 Helmholtz 方程的解不一定满足麦氏方程，为保证满足麦氏方程，还需满足横波条件。

故：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0 \quad\Longrightarrow\quad i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{k}}\cdot\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}e^{-i\omega t}\right]=0$，电场与波矢量垂直。

$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}=0 \quad\Longrightarrow\quad i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{k}}\cdot\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}e^{-i\omega t}\right]=0$，磁场与波矢量垂直。

5. 满足 Helmholtz 方程的解不一定满足麦氏方程，为保证满足麦氏方程，还需满足横波条件。

故：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0 \quad\Longrightarrow\quad i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{k}}\cdot\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}e^{-i\omega t}\right]=0$，电场与波矢量垂直。

$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}=0 \quad\Longrightarrow\quad i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{k}}\cdot\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}e^{-i\omega t}\right]=0$，磁场与波矢量垂直。

又：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}=-\dfrac{i}{\omega}\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=\dfrac{1}{\omega}\vec{\boldsymbol{k}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$，磁场与波矢量和电场均垂直。

5. 满足 Helmholtz 方程的解不一定满足麦氏方程，为保证满足麦氏方程，还需满足横波条件。

故：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0 \quad\Longrightarrow\quad i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{k}}\cdot\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}e^{-i\omega t}\right]=0$，电场与波矢量垂直。

$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}=0 \quad\Longrightarrow\quad i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{k}}\cdot\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}e^{-i\omega t}\right]=0$，磁场与波矢量垂直。

又：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}=-\dfrac{i}{\omega}\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=\dfrac{1}{\omega}\vec{\boldsymbol{k}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$，磁场与波矢量和电场均垂直。

故：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$, $\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$, $\vec{\boldsymbol{k}}$ 两两垂直，$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ 沿 $\vec{\boldsymbol{k}}$ 方向。且由于 $\vec{\boldsymbol{k}}$, ω 都为实数，电磁场同相。

5. 满足 Helmholtz 方程的解不一定满足麦氏方程，为保证满足麦氏方程，还需满足横波条件。

故：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0 \quad\Longrightarrow\quad i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{k}}\cdot\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}e^{-i\omega t}\right]=0$，电场与波矢量垂直。

$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}=0 \quad\Longrightarrow\quad i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{k}}\cdot\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}e^{-i\omega t}\right]=0$，磁场与波矢量垂直。

又：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}=-\dfrac{i}{\omega}\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=\dfrac{1}{\omega}\vec{\boldsymbol{k}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$，磁场与波矢量和电场均垂直。

故：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$, $\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$, $\vec{\boldsymbol{k}}$ 两两垂直，$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ 沿 $\vec{\boldsymbol{k}}$ 方向。且由于 $\vec{\boldsymbol{k}}$, ω 都为实数，电磁场同相。

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}=\frac{1}{\omega}\vec{\boldsymbol{k}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} \quad\Longrightarrow\quad |\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}|/|\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}|=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}=v_p$$

5. 满足 Helmholtz 方程的解不一定满足麦氏方程，为保证满足麦氏方程，还需满足横波条件。

故：$\nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}=0 \quad\Longrightarrow\quad i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{E}}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{k}\cdot\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}e^{-i\omega t}\right]=0$，电场与波矢量垂直。

$\nabla\cdot\vec{\mathcal{B}}=0 \quad\Longrightarrow\quad i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{B}}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{k}\cdot\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{B}}e^{-i\omega t}\right]=0$，磁场与波矢量垂直。

又：$\vec{\mathcal{B}}=-\frac{i}{\omega}\nabla\times\vec{\mathcal{E}}=\frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{\mathcal{E}}$，磁场与波矢量和电场均垂直。

故：$\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{B}}$, $\vec{k}$ 两两垂直，$\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{B}}$ 沿 $\vec{k}$ 方向。且由于 $\vec{k}$, ω 都为实数，电磁场同相。

$$\vec{\mathcal{B}}=\frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{\mathcal{E}} \quad\Longrightarrow\quad |\vec{\mathcal{E}}|/|\vec{\mathcal{B}}|=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}=v_p$$

四、单色平面电磁波的能量、能流

5. 满足 Helmholtz 方程的解不一定满足麦氏方程，为保证满足麦氏方程，还需满足横波条件。

故：$\nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}=0 \quad\Longrightarrow\quad i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{E}}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{k}\cdot\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}e^{-i\omega t}\right]=0$，电场与波矢量垂直。

$\nabla\cdot\vec{\mathcal{B}}=0 \quad\Longrightarrow\quad i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{B}}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{k}\cdot\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{B}}e^{-i\omega t}\right]=0$，磁场与波矢量垂直。

又：$\vec{\mathcal{B}}=-\dfrac{i}{\omega}\nabla\times\vec{\mathcal{E}}=\dfrac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{\mathcal{E}}$，磁场与波矢量和电场均垂直。

故：$\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{B}}$, $\vec{k}$ 两两垂直，$\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{B}}$ 沿 $\vec{k}$ 方向。且由于 $\vec{k}$, ω 都为实数，电磁场同相。

$$\vec{\mathcal{B}}=\frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{\mathcal{E}} \quad\Longrightarrow\quad |\vec{\mathcal{E}}|/|\vec{\mathcal{B}}|=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}=v_p$$

四、单色平面电磁波的能量、能流

平面波：$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=\vec{\mathcal{E}}_0e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, $\quad\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})=\dfrac{\vec{k}\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})}{\omega}=\vec{\mathcal{B}}_0e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, $\quad\vec{\mathcal{B}}_0=\vec{k}\times\vec{\mathcal{E}}_0/\omega$

5. 满足 Helmholtz 方程的解不一定满足麦氏方程，为保证满足麦氏方程，还需满足横波条件。

故：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0 \quad\Longrightarrow\quad i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{k}}\cdot\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}e^{-i\omega t}\right]=0$，电场与波矢量垂直。

$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}=0 \quad\Longrightarrow\quad i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{k}}\cdot\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}e^{-i\omega t}\right]=0$，磁场与波矢量垂直。

又：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}=-\frac{i}{\omega}\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=\frac{1}{\omega}\vec{\boldsymbol{k}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$，磁场与波矢量和电场均垂直。

故：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$, $\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$, $\vec{\boldsymbol{k}}$ 两两垂直，$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ 沿 $\vec{\boldsymbol{k}}$ 方向。且由于 $\vec{\boldsymbol{k}}$, ω 都为实数，电磁场同相。

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}=\frac{1}{\omega}\vec{\boldsymbol{k}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} \quad\Longrightarrow\quad |\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}|/|\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}|=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}=v_p$$

四、单色平面电磁波的能量、能流

平面波：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}$, $\quad\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\dfrac{\vec{\boldsymbol{k}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})}{\omega}=\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}$, $\quad\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0=\vec{\boldsymbol{k}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0/\omega$

设波矢量 $\vec{\boldsymbol{k}}=k\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$，由于 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 垂直于 $\vec{\boldsymbol{k}}$，因此复常矢量 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0$ 在 x-y 平面内

5. 满足 Helmholtz 方程的解不一定满足麦氏方程，为保证满足麦氏方程，还需满足横波条件。

故：$\nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}=0 \implies i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{E}}=0 \implies \vec{k}\cdot\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}e^{-i\omega t}\right]=0$，电场与波矢量垂直。

$\nabla\cdot\vec{\mathcal{B}}=0 \implies i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{B}}=0 \implies \vec{k}\cdot\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{B}}e^{-i\omega t}\right]=0$，磁场与波矢量垂直。

又：$\vec{\mathcal{B}}=-\frac{i}{\omega}\nabla\times\vec{\mathcal{E}}=\frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{\mathcal{E}}$，磁场与波矢量和电场均垂直。

故：$\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{B}}$, $\vec{k}$ 两两垂直，$\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{B}}$ 沿 $\vec{k}$ 方向。且由于 $\vec{k}$, ω 都为实数，电磁场同相。

$$\vec{\mathcal{B}}=\frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{\mathcal{E}} \implies |\vec{\mathcal{E}}|/|\vec{\mathcal{B}}|=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}=v_p$$

四、单色平面电磁波的能量、能流

平面波：$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=\vec{\mathcal{E}}_0e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, $\quad\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})=\frac{\vec{k}\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})}{\omega}=\vec{\mathcal{B}}_0e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, $\quad\vec{\mathcal{B}}_0=\vec{k}\times\vec{\mathcal{E}}_0/\omega$

设波矢量 $\vec{k}=k\,\hat{e}_z$，由于 $\vec{\mathcal{E}}$ 垂直于 $\vec{k}$，因此复常矢量 $\vec{\mathcal{E}}_0$ 在 x-y 平面内

$$\vec{\mathcal{E}}_0=E_{0x}e^{i\phi_x}\,\hat{e}_x+E_{0y}e^{i\phi_y}\,\hat{e}_y$$

5. 满足 Helmholtz 方程的解不一定满足麦氏方程，为保证满足麦氏方程，还需满足横波条件。

故：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0 \quad\Longrightarrow\quad i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{k}}\cdot\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}e^{-i\omega t}\right]=0$，电场与波矢量垂直。

$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}=0 \quad\Longrightarrow\quad i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{k}}\cdot\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}e^{-i\omega t}\right]=0$，磁场与波矢量垂直。

又：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}=-\dfrac{i}{\omega}\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=\dfrac{1}{\omega}\vec{\boldsymbol{k}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$，磁场与波矢量和电场均垂直。

故：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$, $\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$, $\vec{\boldsymbol{k}}$ 两两垂直，$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ 沿 $\vec{\boldsymbol{k}}$ 方向。且由于 $\vec{\boldsymbol{k}}$, ω 都为实数，电磁场同相。

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}=\frac{1}{\omega}\vec{\boldsymbol{k}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} \quad\Longrightarrow\quad |\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}|/|\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}|=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}=v_p$$

四、单色平面电磁波的能量、能流

平面波：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}$, $\quad\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\dfrac{\vec{\boldsymbol{k}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})}{\omega}=\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}$, $\quad\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0=\vec{\boldsymbol{k}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0/\omega$

设波矢量 $\vec{\boldsymbol{k}}=k\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$，由于 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 垂直于 $\vec{\boldsymbol{k}}$，因此复常矢量 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0$ 在 x-y 平面内

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0=E_{0x}e^{i\phi_x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x+E_{0y}e^{i\phi_y}\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0=\frac{\vec{\boldsymbol{k}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0}{\omega}=\frac{k}{\omega}\left[-E_{0y}e^{i\phi_y}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x+E_{0x}e^{i\phi_x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_y\right]$$

Let there be light

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 = E_{0x} e^{i\phi_x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + E_{0y} e^{i\phi_y}\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 = E_{0x} e^{i\phi_x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + E_{0y} e^{i\phi_y}\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0 = \frac{k}{\omega}\left[-E_{0y} e^{i\phi_y}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + E_{0x} e^{i\phi_x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_y\right]$$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 = E_{0x}e^{i\phi_x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + E_{0y}e^{i\phi_y}\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0 = \frac{k}{\omega}\left[-E_{0y}e^{i\phi_y}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + E_{0x}e^{i\phi_x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_y\right]$$

E_{0x}，E_{0y} 为正实数。实际电磁场：　　($\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 乘 $e^{-i\omega t}$，即：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$ 取实部)

$$E_x = E_{0x}\cos(kz-\omega t+\phi_x)$$

$$E_y = E_{0y}\cos(kz-\omega t+\phi_y)$$

Let there be light

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 = E_{0x} e^{i\phi_x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + E_{0y} e^{i\phi_y}\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0 = \frac{k}{\omega}\left[-E_{0y} e^{i\phi_y}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + E_{0x} e^{i\phi_x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_y\right]$$

E_{0x}，E_{0y} 为正实数。实际电磁场： ($\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 乘 $e^{-i\omega t}$，即：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$ 取实部)

$$E_x = E_{0x}\cos(kz - \omega t + \phi_x) \qquad B_x = -\frac{1}{v_p} E_{0y}\cos(kz - \omega t + \phi_y)$$

$$E_y = E_{0y}\cos(kz - \omega t + \phi_y) \qquad B_y = \frac{1}{v_p} E_{0x}\cos(kz - \omega t + \phi_x)$$

Let there be light

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 = E_{0x} e^{i\phi_x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + E_{0y} e^{i\phi_y}\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0 = \frac{k}{\omega}\left[-E_{0y} e^{i\phi_y}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + E_{0x} e^{i\phi_x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_y\right]$$

E_{0x}，E_{0y} 为正实数。实际电磁场： ($\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 乘 $e^{-i\omega t}$，即：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$ 取实部)

$$E_x = E_{0x}\cos(kz-\omega t+\phi_x) \qquad B_x = -\frac{1}{v_p}E_{0y}\cos(kz-\omega t+\phi_y)$$

$$E_y = E_{0y}\cos(kz-\omega t+\phi_y) \qquad B_y = \frac{1}{v_p}E_{0x}\cos(kz-\omega t+\phi_x)$$

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

能量密度： $$u_{em} = \frac{1}{2}\left[\epsilon\,\vec{\boldsymbol{E}}^{\,2} + \mu^{-1}\vec{\boldsymbol{B}}^{\,2}\right] = \frac{1}{2}\epsilon\left[\vec{\boldsymbol{E}}^{\,2} + v_p^2\vec{\boldsymbol{B}}^{\,2}\right]$$

Let there be light

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 = E_{0x}e^{i\phi_x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + E_{0y}e^{i\phi_y}\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0 = \frac{k}{\omega}\left[-E_{0y}e^{i\phi_y}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + E_{0x}e^{i\phi_x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_y\right]$$

E_{0x}，E_{0y} 为正实数。实际电磁场： ($\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 乘 $e^{-i\omega t}$，即：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$ 取实部)

$$E_x = E_{0x}\cos(kz-\omega t+\phi_x) \qquad B_x = -\frac{1}{v_p}E_{0y}\cos(kz-\omega t+\phi_y)$$

$$E_y = E_{0y}\cos(kz-\omega t+\phi_y) \qquad B_y = \frac{1}{v_p}E_{0x}\cos(kz-\omega t+\phi_x)$$

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

能量密度：

$$\begin{aligned} u_{em} &= \frac{1}{2}\left[\epsilon\,\vec{\boldsymbol{E}}^{\,2} + \mu^{-1}\vec{\boldsymbol{B}}^{\,2}\right] = \frac{1}{2}\epsilon\left[\vec{\boldsymbol{E}}^{\,2} + v_p^2\vec{\boldsymbol{B}}^{\,2}\right] \\ &= \epsilon\Big[E_{0x}^2\cos^2(kz-\omega t+\phi_x) + E_{0y}^2\cos^2(kz-\omega t+\phi_y)\Big] \end{aligned}$$

Let there be light

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 = E_{0x}e^{i\phi_x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + E_{0y}e^{i\phi_y}\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0 = \frac{k}{\omega}\left[-E_{0y}e^{i\phi_y}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + E_{0x}e^{i\phi_x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_y\right]$$

E_{0x}，E_{0y} 为正实数。实际电磁场： ($\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 乘 $e^{-i\omega t}$，即：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$ 取实部)

$$E_x = E_{0x}\cos(kz-\omega t+\phi_x) \qquad B_x = -\frac{1}{v_p}E_{0y}\cos(kz-\omega t+\phi_y)$$

$$E_y = E_{0y}\cos(kz-\omega t+\phi_y) \qquad B_y = \frac{1}{v_p}E_{0x}\cos(kz-\omega t+\phi_x)$$

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

能量密度：
$$\begin{aligned} u_{em} &= \frac{1}{2}\left[\epsilon\,\vec{\boldsymbol{E}}^{\,2} + \mu^{-1}\vec{\boldsymbol{B}}^{\,2}\right] = \frac{1}{2}\epsilon\left[\vec{\boldsymbol{E}}^{\,2} + v_p^2\vec{\boldsymbol{B}}^{\,2}\right] \\ &= \epsilon\left[E_{0x}^2\cos^2(kz-\omega t+\phi_x) + E_{0y}^2\cos^2(kz-\omega t+\phi_y)\right] \end{aligned}$$

易证： $\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}^{\,2} = \mu^{-1}\vec{\boldsymbol{B}}^{\,2}$ 平面电磁波的电场能量和磁场能量相等

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 = E_{0x} e^{i\phi_x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + E_{0y} e^{i\phi_y}\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0 = \frac{k}{\omega}\left[-E_{0y} e^{i\phi_y}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + E_{0x} e^{i\phi_x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_y\right]$$

E_{0x}，E_{0y} 为正实数。实际电磁场： ($\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 乘 $e^{-i\omega t}$，即：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$ 取实部)

$$E_x = E_{0x}\cos(kz-\omega t+\phi_x) \qquad B_x = -\frac{1}{v_p}E_{0y}\cos(kz-\omega t+\phi_y)$$

$$E_y = E_{0y}\cos(kz-\omega t+\phi_y) \qquad B_y = \frac{1}{v_p}E_{0x}\cos(kz-\omega t+\phi_x)$$

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

能量密度：
$$\begin{aligned} u_{em} &= \frac{1}{2}\left[\epsilon\,\vec{\boldsymbol{E}}^{\,2} + \mu^{-1}\vec{\boldsymbol{B}}^{\,2}\right] = \frac{1}{2}\epsilon\left[\vec{\boldsymbol{E}}^{\,2} + v_p^2\vec{\boldsymbol{B}}^{\,2}\right] \\ &= \epsilon\left[E_{0x}^2\cos^2(kz-\omega t+\phi_x) + E_{0y}^2\cos^2(kz-\omega t+\phi_y)\right] \end{aligned}$$

易证： $\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}^{\,2} = \mu^{-1}\vec{\boldsymbol{B}}^{\,2}$ 平面电磁波的电场能量和磁场能量相等

能流密度： $\vec{\boldsymbol{S}} = \mu^{-1}\vec{\boldsymbol{E}}\times\vec{\boldsymbol{B}}$

$$\vec{\mathcal{E}}_0 = E_{0x}e^{i\phi_x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + E_{0y}e^{i\phi_y}\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \quad\Longrightarrow\quad \vec{\mathcal{B}}_0 = \frac{k}{\omega}\left[-E_{0y}e^{i\phi_y}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + E_{0x}e^{i\phi_x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_y\right]$$

E_{0x}，E_{0y} 为正实数。实际电磁场： ($\vec{\mathcal{E}}$ 乘 $e^{-i\omega t}$，即：$\vec{\mathcal{E}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$ 取实部)

$$E_x = E_{0x}\cos(kz-\omega t+\phi_x) \qquad B_x = -\frac{1}{v_p}E_{0y}\cos(kz-\omega t+\phi_y)$$

$$E_y = E_{0y}\cos(kz-\omega t+\phi_y) \qquad B_y = \frac{1}{v_p}E_{0x}\cos(kz-\omega t+\phi_x)$$

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

能量密度：

$$u_{em} = \frac{1}{2}\left[\epsilon\,\vec{\boldsymbol{E}}^{\,2} + \mu^{-1}\vec{\boldsymbol{B}}^{\,2}\right] = \frac{1}{2}\epsilon\left[\vec{\boldsymbol{E}}^{\,2} + v_p^2\vec{\boldsymbol{B}}^{\,2}\right]$$
$$= \epsilon\left[E_{0x}^2\cos^2(kz-\omega t+\phi_x) + E_{0y}^2\cos^2(kz-\omega t+\phi_y)\right]$$

易证： $\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}^{\,2} = \mu^{-1}\vec{\boldsymbol{B}}^{\,2}$ 平面电磁波的电场能量和磁场能量相等

能流密度：

$$\vec{\boldsymbol{S}} = \mu^{-1}\vec{\boldsymbol{E}}\times\vec{\boldsymbol{B}}$$
$$= \frac{1}{\mu v_p}\left[E_{0x}^2\cos^2(kz-\omega t+\phi_x) + E_{0y}^2\cos^2(kz-\omega t+\phi_y)\right]\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 = E_{0x}e^{i\phi_x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + E_{0y}e^{i\phi_y}\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \implies \vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0 = \frac{k}{\omega}\left[-E_{0y}e^{i\phi_y}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + E_{0x}e^{i\phi_x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_y\right]$$

E_{0x}，E_{0y} 为正实数。实际电磁场： ($\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 乘 $e^{-i\omega t}$，即：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$ 取实部)

$$E_x = E_{0x}\cos(kz-\omega t+\phi_x) \qquad B_x = -\frac{1}{v_p}E_{0y}\cos(kz-\omega t+\phi_y)$$

$$E_y = E_{0y}\cos(kz-\omega t+\phi_y) \qquad B_y = \frac{1}{v_p}E_{0x}\cos(kz-\omega t+\phi_x)$$

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

能量密度：
$$\begin{aligned} u_{em} &= \frac{1}{2}\left[\epsilon\,\vec{\boldsymbol{E}}^{\,2} + \mu^{-1}\vec{\boldsymbol{B}}^{\,2}\right] = \frac{1}{2}\epsilon\left[\vec{\boldsymbol{E}}^{\,2} + v_p^2\vec{\boldsymbol{B}}^{\,2}\right] \\ &= \epsilon\left[E_{0x}^2\cos^2(kz-\omega t+\phi_x) + E_{0y}^2\cos^2(kz-\omega t+\phi_y)\right] \end{aligned}$$

易证： $\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}^{\,2} = \mu^{-1}\vec{\boldsymbol{B}}^{\,2}$ 平面电磁波的电场能量和磁场能量相等

能流密度：
$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{S}} &= \mu^{-1}\vec{\boldsymbol{E}}\times\vec{\boldsymbol{B}} \\ &= \frac{1}{\mu v_p}\left[E_{0x}^2\cos^2(kz-\omega t+\phi_x) + E_{0y}^2\cos^2(kz-\omega t+\phi_y)\right]\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \\ &= u_{em}\,v_p\,\hat{\boldsymbol{e}}_z = u_{em}\,\vec{\boldsymbol{v}}_p \end{aligned}$$

平面电磁波能量以相速度传播

由于电磁波能量、能流都随时间变化，通常取一个周期的平均值。

平均能量密度 $$\langle u_{em}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u_{em}\,\mathrm{d}t = \frac{\epsilon}{2}\Big(E_{0x}^2 + E_{0y}^2\Big)$$

由于电磁波能量、能流都随时间变化，通常取一个周期的平均值。

平均能量密度 $\langle u_{em} \rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u_{em}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\epsilon}{2}\left(E_{0x}^2 + E_{0y}^2\right)$

平均能流密度 $\left\langle \vec{\boldsymbol{S}} \right\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \vec{\boldsymbol{S}}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u_{em}\,\vec{\boldsymbol{v}}_p\,\mathrm{d}t = \langle u_{em} \rangle\ \vec{\boldsymbol{v}}_p$

通常定义能量传播速度：$\vec{\boldsymbol{v}}_E = \dfrac{\left\langle \vec{\boldsymbol{S}} \right\rangle}{\langle u_{em} \rangle}$，对平面电磁波

$$\vec{\boldsymbol{v}}_E = \frac{\left\langle \vec{\boldsymbol{S}} \right\rangle}{\langle u_{em} \rangle} = \vec{\boldsymbol{v}}_p$$

平面电磁波能量以相速度传播

五、复二次型时间平均值的计算

由于电磁波能量、能流都随时间变化，通常取一个周期的平均值。

平均能量密度 $\langle u_{em}\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u_{em}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\epsilon}{2}\left(E_{0x}^2 + E_{0y}^2\right)$

平均能流密度 $\left\langle \vec{S}\right\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \vec{S}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u_{em}\,\vec{v}_p\,\mathrm{d}t = \langle u_{em}\rangle\,\vec{v}_p$

通常定义能量传播速度：$\vec{v}_E = \dfrac{\left\langle \vec{S}\right\rangle}{\langle u_{em}\rangle}$，对平面电磁波

$$\vec{v}_E = \frac{\left\langle \vec{S}\right\rangle}{\langle u_{em}\rangle} = \vec{v}_p$$

平面电磁波能量以相速度传播

五、复二次型时间平均值的计算

对能量、能流等物理量，因为涉及场量的二次形式（场量的非线性函数），求实部和乘法运算次序不可交换。必须先求实得到真正的物理场，求得瞬时值，再对一个周期作平均。

有没有简单的算法？

由于电磁波能量、能流都随时间变化，通常取一个周期的平均值。

平均能量密度 $\langle u_{em}\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u_{em}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\epsilon}{2}\left(E_{0x}^2 + E_{0y}^2\right)$

平均能流密度 $\left\langle \vec{S}\right\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \vec{S}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u_{em}\,\vec{v}_p\,\mathrm{d}t = \langle u_{em}\rangle\,\vec{v}_p$

通常定义能量传播速度：$\vec{v}_E = \dfrac{\left\langle \vec{S}\right\rangle}{\langle u_{em}\rangle}$，对平面电磁波

$$\vec{v}_E = \frac{\left\langle \vec{S}\right\rangle}{\langle u_{em}\rangle} = \vec{v}_p$$ 平面电磁波能量以相速度传播

五、复二次型时间平均值的计算

对能量、能流等物理量，因为涉及场量的二次形式（场量的非线性函数），求实部和乘法运算次序不可交换。必须先求实得到真正的物理场，求得瞬时值，再对一个周期作平均。

有没有简单的算法？ — 复二次型时间平均值的计算

设实函数 $F(\vec{\boldsymbol{r}},t)$，$G(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ 可表示为：

$$F(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mathrm{Re}\left[\,\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\,\right]$$
$$G(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mathrm{Re}\left[\,\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\,\right]$$

$\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})$，$\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 与时间无关的复数

则有：$\langle F(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,G(\vec{\boldsymbol{r}},t)\rangle \equiv \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T F(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,G(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,\mathrm{d}t$

设实函数 $F(\vec{\boldsymbol{r}},t)$，$G(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ 可表示为：

$$F(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mathrm{Re}\left[\,\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\,\right]$$
$$G(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mathrm{Re}\left[\,\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\,\right]$$

$\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})$，$\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 与时间无关的复数

则有：$\langle F(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,G(\vec{\boldsymbol{r}},t)\rangle \equiv \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T F(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,G(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\,\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\,\right]$

设实函数 $F(\vec{\boldsymbol{r}},t)$，$G(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ 可表示为：

$$F(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mathrm{Re}\left[\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$$
$$G(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mathrm{Re}\left[\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$$

$\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})$，$\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 与时间无关的复数

则有：$\langle F(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,G(\vec{\boldsymbol{r}},t)\rangle \equiv \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T F(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,G(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\right]$ 其中 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

设实函数 $F(\vec{\boldsymbol{r}},t)$，$G(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ 可表示为：

$$F(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mathrm{Re}\left[\,\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\,\right]$$
$$G(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mathrm{Re}\left[\,\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\,\right]$$

$\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})$，$\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 与时间无关的复数

则有：$\langle F(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,G(\vec{\boldsymbol{r}},t)\rangle \equiv \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T F(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,G(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\,\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\,\right]$ 其中 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$$\langle X\rangle \quad = \frac{1}{T}\int_0^T F(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,G(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,\mathrm{d}t$$

设实函数 $F(\vec{\boldsymbol{r}},t)$，$G(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ 可表示为：

$$F(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathsf{Re}\left[\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$$
$$G(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathsf{Re}\left[\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$$

$\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})$，$\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 与时间无关的复数

则有：$\langle F(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,G(\vec{\boldsymbol{r}},t)\rangle\equiv\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T F(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,G(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\mathsf{Re}\left[\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\right]$ 其中 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$

$$\begin{aligned}\langle X\rangle &=\frac{1}{T}\int_0^T F(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,G(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\Big[\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}+\mathcal{F}^*(\vec{\boldsymbol{r}})e^{i\omega t}\Big]\,\frac{1}{2}\Big[\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}+\mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol{r}})e^{i\omega t}\Big]\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

设实函数 $F(\vec{\boldsymbol{r}},t)$，$G(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ 可表示为：

$$F(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mathrm{Re}\left[\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$$
$$G(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mathrm{Re}\left[\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$$

$\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})$，$\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 与时间无关的复数

则有：$\langle F(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,G(\vec{\boldsymbol{r}},t)\rangle \equiv \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T F(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,G(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\right]$ 其中 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$$\begin{aligned}\langle X\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T F(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,G(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\Big[\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t} + \mathcal{F}^*(\vec{\boldsymbol{r}})e^{i\omega t}\Big]\,\frac{1}{2}\Big[\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t} + \mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol{r}})e^{i\omega t}\Big]\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4T}\int_0^T \Big[\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-2i\omega t} + \mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})\mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol{r}}) + \mathcal{F}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}}) + \mathcal{F}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol{r}})e^{2i\omega t}\Big]\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

设实函数 $F(\vec{\boldsymbol{r}},t)$，$G(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ 可表示为：

$$F(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mathrm{Re}\left[\,\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\,\right]$$
$$G(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mathrm{Re}\left[\,\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\,\right]$$

$\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})$，$\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 与时间无关的复数

则有：$\langle F(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,G(\vec{\boldsymbol{r}},t)\rangle \equiv \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T F(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,G(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\,\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\,\right]$　　其中 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$$\begin{aligned}
\langle X\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T F(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,G(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\Big[\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t} + \mathcal{F}^*(\vec{\boldsymbol{r}})e^{i\omega t}\Big]\,\frac{1}{2}\Big[\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t} + \mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol{r}})e^{i\omega t}\Big]\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4T}\int_0^T \Big[\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-2i\omega t} + \mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})\mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol{r}}) + \mathcal{F}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}}) + \mathcal{F}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol{r}})e^{2i\omega t}\Big]\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

利用 $\displaystyle\int_0^T e^{\pm 2i\omega t}\,\mathrm{d}t = 0$

设实函数 $F(\vec{\boldsymbol r},t)$，$G(\vec{\boldsymbol r},t)$ 可表示为：

$$F(\vec{\boldsymbol r},t)=\mathrm{Re}\left[\,\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol r})e^{-i\omega t}\,\right]$$
$$G(\vec{\boldsymbol r},t)=\mathrm{Re}\left[\,\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol r})e^{-i\omega t}\,\right]$$

$\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol r})$，$\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol r})$ 与时间无关的复数

则有：$\langle F(\vec{\boldsymbol r},t)\,G(\vec{\boldsymbol r},t)\rangle\equiv\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T F(\vec{\boldsymbol r},t)\,G(\vec{\boldsymbol r},t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\,\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol r})\,\mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol r})\,\right]$ 其中 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$

$$\begin{aligned}
\langle X\rangle &=\frac{1}{T}\int_0^T F(\vec{\boldsymbol r},t)\,G(\vec{\boldsymbol r},t)\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\Big[\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol r})e^{-i\omega t}+\mathcal{F}^*(\vec{\boldsymbol r})e^{i\omega t}\Big]\,\frac{1}{2}\Big[\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol r})e^{-i\omega t}+\mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol r})e^{i\omega t}\Big]\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{4T}\int_0^T \Big[\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol r})\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol r})e^{-2i\omega t}+\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol r})\mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol r})+\mathcal{F}^*(\vec{\boldsymbol r})\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol r})+\mathcal{F}^*(\vec{\boldsymbol r})\mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol r})e^{2i\omega t}\Big]\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{4T}\int_0^T \Big[\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol r})\mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol r})+\mathcal{F}^*(\vec{\boldsymbol r})\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol r})\Big]\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

利用 $\displaystyle\int_0^T e^{\pm 2i\omega t}\,\mathrm{d}t=0$

设实函数 $F(\vec{\boldsymbol{r}},t)$，$G(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ 可表示为：

$$F(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mathrm{Re}\left[\,\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\,\right]$$
$$G(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mathrm{Re}\left[\,\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\,\right]$$

$\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})$，$\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 与时间无关的复数

则有：$\langle F(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,G(\vec{\boldsymbol{r}},t)\rangle \equiv \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T F(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,G(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\,\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\,\right]$ 其中 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$$\begin{aligned}
\langle X\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T F(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,G(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\Big[\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t} + \mathcal{F}^*(\vec{\boldsymbol{r}})e^{i\omega t}\Big]\,\frac{1}{2}\Big[\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t} + \mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol{r}})e^{i\omega t}\Big]\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4T}\int_0^T \Big[\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-2i\omega t} + \mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})\mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol{r}}) + \mathcal{F}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}}) + \mathcal{F}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol{r}})e^{2i\omega t}\Big]\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4T}\int_0^T \Big[\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})\mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol{r}}) + \mathcal{F}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})\Big]\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2T}\int_0^T \mathrm{Re}\left[\,\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})\mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\,\right]\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

利用 $\displaystyle\int_0^T e^{\pm 2i\omega t}\,\mathrm{d}t = 0$

设实函数 $F(\vec{\boldsymbol{r}},t)$，$G(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ 可表示为：

$$F(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mathrm{Re}\left[\,\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\,\right]$$
$$G(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mathrm{Re}\left[\,\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\,\right]$$

$\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})$，$\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})$ 与时间无关的复数

则有：$\langle F(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,G(\vec{\boldsymbol{r}},t)\rangle \equiv \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T F(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,G(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\,\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\,\right]$　　其中 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$$\begin{aligned}
\langle X\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T F(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,G(\vec{\boldsymbol{r}},t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\Big[\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t} + \mathcal{F}^*(\vec{\boldsymbol{r}})e^{i\omega t}\Big]\;\frac{1}{2}\Big[\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t} + \mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol{r}})e^{i\omega t}\Big]\;\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4T}\int_0^T \Big[\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-2i\omega t} + \mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})\mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol{r}}) + \mathcal{F}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}}) + \mathcal{F}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol{r}})e^{2i\omega t}\Big]\;\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4T}\int_0^T \Big[\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})\mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol{r}}) + \mathcal{F}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\mathcal{G}(\vec{\boldsymbol{r}})\Big]\;\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2T}\int_0^T \mathrm{Re}\left[\,\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})\mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\,\right]\;\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\,\mathcal{F}(\vec{\boldsymbol{r}})\mathcal{G}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\,\right] \qquad \text{qed}
\end{aligned}$$

利用 $\displaystyle\int_0^T e^{\pm 2i\omega t}\,\mathrm{d}t = 0$

Let there be light

对于单色电磁波：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$，$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$

对于单色电磁波：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$，$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$

平均能量密度

$$\langle u_{em}\rangle=\left\langle\frac{1}{2}\,\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)+\frac{1}{2}\,\mu^{-1}\,\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\cdot\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\right\rangle$$

对于单色电磁波：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$，$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$

平均能量密度

$$\langle u_{em}\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) + \frac{1}{2}\mu^{-1}\,\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\cdot\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\right\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\epsilon\,\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^*(\vec{\boldsymbol{r}}) + \frac{1}{2}\mu^{-1}\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\right]$$

利用 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}$

对于单色电磁波：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$，$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$

平均能量密度

$$\begin{aligned}
\langle u_{em}\rangle &= \left\langle \frac{1}{2}\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) + \frac{1}{2}\mu^{-1}\,\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\cdot\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\epsilon\,\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^*(\vec{\boldsymbol{r}}) + \frac{1}{2}\mu^{-1}\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\right] \\
&= \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left[\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0^* + \mu^{-1}\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0^*\right] = \frac{1}{2}\epsilon|\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0|^2
\end{aligned}$$

利用 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}$

利用了 $\dfrac{|\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0|}{|\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0|} = v_p = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$

对于单色电磁波：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$，$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$

平均能量密度

$$\langle u_{em}\rangle=\left\langle\frac{1}{2}\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)+\frac{1}{2}\mu^{-1}\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\cdot\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\right\rangle$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\epsilon\,\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^*(\vec{\boldsymbol{r}})+\frac{1}{2}\mu^{-1}\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\right]$$

利用 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}$

$$=\frac{1}{4}\mathrm{Re}\left[\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0^*+\mu^{-1}\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0^*\right]=\frac{1}{2}\epsilon|\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0|^2$$

利用了 $\dfrac{|\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0|}{|\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0|}=v_p=\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$

$$\left\langle\vec{\boldsymbol{S}}\right\rangle=\left\langle\mu^{-1}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\times\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\right\rangle$$

对于单色电磁波：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\text{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$，$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\text{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$

平均能量密度

$$\langle u_{em}\rangle=\left\langle\frac{1}{2}\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)+\frac{1}{2}\mu^{-1}\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\cdot\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\right\rangle$$

$$=\frac{1}{2}\text{Re}\left[\frac{1}{2}\epsilon\,\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^*(\vec{\boldsymbol{r}})+\frac{1}{2}\mu^{-1}\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\right]$$

利用 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}$

$$=\frac{1}{4}\text{Re}\left[\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0^*+\mu^{-1}\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0^*\right]=\frac{1}{2}\epsilon|\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0|^2$$

利用了 $\dfrac{|\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0|}{|\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0|}=v_p=\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$

$$\left\langle\vec{\boldsymbol{S}}\right\rangle=\left\langle\mu^{-1}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\times\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\right\rangle=\frac{1}{2}\mu^{-1}\text{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^*\right]$$

利用 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}$

对于单色电磁波：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$，$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$

平均能量密度

$$\langle u_{em}\rangle=\left\langle\frac{1}{2}\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)+\frac{1}{2}\mu^{-1}\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\cdot\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\right\rangle$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\epsilon\,\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^*(\vec{\boldsymbol{r}})+\frac{1}{2}\mu^{-1}\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\right]$$

利用 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}$

$$=\frac{1}{4}\mathrm{Re}\left[\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0^*+\mu^{-1}\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0^*\right]=\frac{1}{2}\epsilon|\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0|^2$$

利用了 $\dfrac{|\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0|}{|\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0|}=v_p=\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$

$$\left\langle\vec{\boldsymbol{S}}\right\rangle=\left\langle\mu^{-1}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\times\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\right\rangle=\frac{1}{2}\mu^{-1}\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^*\right]$$

利用 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}$

$$=\frac{1}{2}\mu^{-1}\,\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0\times\frac{1}{\omega}(\vec{\boldsymbol{k}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0^*)\right]$$

利用了 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0=\dfrac{\vec{\boldsymbol{k}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0}{\omega}$,

对于单色电磁波：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\text{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$，$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\text{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$

平均能量密度

$$\langle u_{em}\rangle=\left\langle\frac{1}{2}\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)+\frac{1}{2}\mu^{-1}\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\cdot\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\right\rangle$$

$$=\frac{1}{2}\text{Re}\left[\frac{1}{2}\epsilon\,\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^*(\vec{\boldsymbol{r}})+\frac{1}{2}\mu^{-1}\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^*(\vec{\boldsymbol{r}})\right]$$

利用 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}$

$$=\frac{1}{4}\text{Re}\left[\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0^*+\mu^{-1}\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0^*\right]=\frac{1}{2}\epsilon|\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0|^2$$

利用了 $\dfrac{|\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0|}{|\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0|}=v_p=\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$

$$\left\langle\vec{\boldsymbol{S}}\right\rangle=\left\langle\mu^{-1}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\times\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\right\rangle=\frac{1}{2}\mu^{-1}\text{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^*\right]$$

利用 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}$

$$=\frac{1}{2}\mu^{-1}\,\text{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0\times\frac{1}{\omega}(\vec{\boldsymbol{k}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0^*)\right]$$

利用了 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0=\dfrac{\vec{\boldsymbol{k}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0}{\omega}$，再利用 $\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0$

对于单色电磁波：$\vec{E}(\vec{r},t) = \text{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$，$\vec{B}(\vec{r},t) = \text{Re}\left[\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$

平均能量密度

$$\langle u_{em}\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\epsilon\vec{E}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{1}{2}\mu^{-1}\vec{B}(\vec{r},t)\cdot\vec{B}(\vec{r},t)\right\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\text{Re}\left[\frac{1}{2}\epsilon\,\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\cdot\vec{\mathcal{E}}^*(\vec{r}) + \frac{1}{2}\mu^{-1}\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})\cdot\vec{\mathcal{B}}^*(\vec{r})\right]$$

利用 $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

$$= \frac{1}{4}\text{Re}\left[\epsilon\vec{\mathcal{E}}_0\cdot\vec{\mathcal{E}}_0^* + \mu^{-1}\vec{\mathcal{B}}_0\cdot\vec{\mathcal{B}}_0^*\right] = \frac{1}{2}\epsilon|\vec{\mathcal{E}}_0|^2$$

利用了 $\dfrac{|\vec{\mathcal{E}}_0|}{|\vec{\mathcal{B}}_0|} = v_p = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$

$$\left\langle\vec{S}\right\rangle = \left\langle\mu^{-1}\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)\right\rangle = \frac{1}{2}\mu^{-1}\text{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{B}}^*\right]$$

利用 $\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) = \vec{\mathcal{B}}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

$$= \frac{1}{2}\mu^{-1}\,\text{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}_0\times\frac{1}{\omega}(\vec{k}\times\vec{\mathcal{E}}_0^*)\right]$$

利用了 $\vec{\mathcal{B}}_0 = \dfrac{\vec{k}\times\vec{\mathcal{E}}_0}{\omega}$，再利用 $\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{E}} = 0$

$$= \frac{1}{2\mu\omega}\text{Re}\left[|\vec{\mathcal{E}}_0|^2\vec{k}\right] = \langle u_{em}\rangle\,\vec{v}_p = \frac{1}{2}\epsilon|\vec{\mathcal{E}}_0|^2\,\vec{v}_p$$

六、复玻印亭定理

六、复玻印亭定理

对单色场，

无源均匀区的 Maxwell 方程：
$$\begin{aligned} \nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= i\omega\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}}), & \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= 0 \\ \nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= -i\omega\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}}), & \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

六、复玻印亭定理

对单色场，

无源均匀区的 Maxwell 方程：
$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}})=i\omega\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\qquad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}})=0$$
$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}})=-i\omega\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\quad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}})=0 \tag{1}$$

实际的物理场：$\vec{\boldsymbol{X}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$　　$\vec{\boldsymbol{X}}$ 可以是 $\vec{\boldsymbol{E}}$、$\vec{\boldsymbol{D}}$、$\vec{\boldsymbol{B}}$ 或 $\vec{\boldsymbol{H}}$ (3)

六、复玻印亭定理

对单色场，

无源均匀区的 Maxwell 方程：
$$\begin{aligned} \nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= i\omega\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}}), \qquad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0 \\ \nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= -i\omega\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{\boldsymbol{r}}), \quad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

实际的物理场：$\vec{\boldsymbol{X}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega t}\right]$ $\quad$ $\vec{\boldsymbol{X}}$ 可以是 $\vec{\boldsymbol{E}}$、$\vec{\boldsymbol{D}}$、$\vec{\boldsymbol{B}}$ 或 $\vec{\boldsymbol{H}}$ $\quad$ (3)

瞬时能流密度：$\vec{\boldsymbol{S}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\times\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)$

六、复玻印亭定理

对单色场，

无源均匀区的 Maxwell 方程：

$$\begin{aligned} &\nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = i\omega\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}), && \nabla\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}) = 0 \\ &\nabla\times\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) = -i\omega\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}), && \nabla\cdot\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

实际的物理场：$\vec{X}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{X}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$　　$\vec{X}$ 可以是 $\vec{E}$、$\vec{D}$、$\vec{B}$ 或 $\vec{H}$　　(3)

瞬时能流密度：$\vec{S}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]\times\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$

六、复玻印亭定理

对单色场，

无源均匀区的 Maxwell 方程：
$$\nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = i\omega\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}),\qquad \nabla\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}) = 0$$
$$\nabla\times\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) = -i\omega\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}),\quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) = 0 \tag{1}$$

实际的物理场：$\vec{X}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{X}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$ $\vec{X}$ 可以是 $\vec{E}$、$\vec{D}$、$\vec{B}$ 或 $\vec{H}$ (3)

瞬时能流密度：
$$\vec{S}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]\times\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^{*}\right] + \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[(\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}})\,e^{-2i\omega t}\right]$$

六、复玻印亭定理

对单色场，

无源均匀区的 Maxwell 方程：
$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{r}) = i\omega\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{r}), \qquad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{r}) = 0$$
$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{r}) = -i\omega\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{r}), \quad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{r}) = 0 \tag{1}$$

实际的物理场：$\vec{\boldsymbol{X}}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$ $\qquad \vec{\boldsymbol{X}}$ 可以是 $\vec{\boldsymbol{E}}$、$\vec{\boldsymbol{D}}$、$\vec{\boldsymbol{B}}$ 或 $\vec{\boldsymbol{H}}$ (3)

瞬时能流密度：
$$\vec{\boldsymbol{S}}(\vec{r},t) = \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{r},t)\times\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]\times\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^*\right] + \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}})\,e^{-2i\omega t}\right]$$

周期平均：
$$\left\langle\vec{\boldsymbol{S}}\right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^*\right]$$

六、复玻印亭定理

对单色场，

无源均匀区的 Maxwell 方程：
$$\begin{aligned} &\nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = i\omega\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}), &&\nabla\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}) = 0 \\ &\nabla\times\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) = -i\omega\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}), &&\nabla\cdot\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

实际的物理场：$\vec{X}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{X}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$ $\vec{X}$ 可以是 $\vec{E}$、$\vec{D}$、$\vec{B}$ 或 $\vec{H}$ (3)

瞬时能流密度：$\vec{S}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]\times\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$

$$= \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^*\right] + \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[(\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}})\,e^{-2i\omega t}\right]$$

周期平均：$\left\langle\vec{S}\right\rangle = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^*\right] \Longrightarrow$ 定义复玻印亭矢量：$\boxed{\vec{\mathcal{S}} = \dfrac{1}{2}\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^*}$

六、复玻印亭定理

对单色场，

无源均匀区的 Maxwell 方程：
$$\nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=i\omega\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}),\qquad \nabla\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r})=0$$
$$\nabla\times\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})=-i\omega\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}),\quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})=0 \tag{1}$$

实际的物理场：$\vec{X}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{X}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$　　$\vec{X}$ 可以是 $\vec{E}$、$\vec{D}$、$\vec{B}$ 或 $\vec{H}$　　(3)

瞬时能流密度：
$$\vec{S}(\vec{r},t)=\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]\times\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$$
$$=\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^*\right]+\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[(\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}})\,e^{-2i\omega t}\right]$$

周期平均：$\left\langle\vec{S}\right\rangle=\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^*\right]\quad\Longrightarrow$ 定义复玻印亭矢量：$\boxed{\vec{\mathcal{S}}=\dfrac{1}{2}\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^*}$

显然，复玻印亭矢量的实部为平均能流密度矢量，复玻印亭矢量本身是否提供新的物理意义？

六、复玻印亭定理

对单色场，

无源均匀区的 Maxwell 方程：

$$\begin{aligned} &\nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = i\omega\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}), \qquad \nabla\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}) = 0 \\ &\nabla\times\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) = -i\omega\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}), \quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

实际的物理场：$\vec{X}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{X}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$ $\quad$ $\vec{X}$ 可以是 $\vec{E}$、$\vec{D}$、$\vec{B}$ 或 $\vec{H}$ $\quad$ (3)

瞬时能流密度：$\vec{S}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]\times\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$

$$= \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^*\right] + \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[(\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}})\,e^{-2i\omega t}\right]$$

周期平均：$\left\langle\vec{S}\right\rangle = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^*\right] \quad\Longrightarrow$ 定义复玻印亭矢量：$\boxed{\vec{\mathcal{S}} = \dfrac{1}{2}\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^*}$

显然，复玻印亭矢量的实部为平均能流密度矢量，复玻印亭矢量本身是否提供新的物理意义？

利用 (1)，可得：$\vec{\mathcal{H}}^*\cdot(\nabla\times\vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{E}}\cdot(\nabla\times\vec{\mathcal{H}}^*) = i\omega\left(\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}} - \vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^*\right)$

六、复玻印亭定理

对单色场，

无源均匀区的 Maxwell 方程：
$$\begin{aligned} &\nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=i\omega\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}), &&\nabla\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r})=0\\ &\nabla\times\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})=-i\omega\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}), &&\nabla\cdot\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})=0 \end{aligned}\qquad(1)$$

实际的物理场：$\vec{X}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{X}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$　　$\vec{X}$ 可以是 $\vec{E}$、$\vec{D}$、$\vec{B}$ 或 $\vec{H}$　　(3)

瞬时能流密度：$\vec{S}(\vec{r},t)=\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]\times\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$

$$=\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^*\right]+\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[(\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}})\,e^{-2i\omega t}\right]$$

周期平均：　$\left\langle\vec{S}\right\rangle=\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^*\right]\implies$ 定义复玻印亭矢量：$\boxed{\vec{\mathcal{S}}=\dfrac{1}{2}\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^*}$

显然，复玻印亭矢量的实部为平均能流密度矢量，复玻印亭矢量本身是否提供新的物理意义？

利用 (1)，可得：$\vec{\mathcal{H}}^*\cdot(\nabla\times\vec{\mathcal{E}})-\vec{\mathcal{E}}\cdot(\nabla\times\vec{\mathcal{H}}^*)=i\omega\left(\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}}-\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^*\right)$

上式左边刚好为：$\nabla\cdot(\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^*)=2\nabla\cdot\vec{\mathcal{S}}$，从而有：

六、复玻印亭定理

对单色场，

无源均匀区的 Maxwell 方程：
$$\begin{aligned} &\nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=i\omega\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}), &&\nabla\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r})=0\\ &\nabla\times\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})=-i\omega\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}), &&\nabla\cdot\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})=0 \end{aligned} \tag{1}$$

实际的物理场：$\vec{X}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{X}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$　　$\vec{X}$ 可以是 $\vec{E}$、$\vec{D}$、$\vec{B}$ 或 $\vec{H}$　　(3)

瞬时能流密度：$\vec{S}(\vec{r},t)=\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]\times\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$
$$=\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^*\right]+\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[(\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}})\,e^{-2i\omega t}\right]$$

周期平均：$\left\langle\vec{S}\right\rangle=\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^*\right]\Longrightarrow$ 定义复玻印亭矢量：$\boxed{\vec{\mathcal{S}}=\dfrac{1}{2}\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^*}$

显然，复玻印亭矢量的实部为平均能流密度矢量，复玻印亭矢量本身是否提供新的物理意义？

利用 (1)，可得：$\vec{\mathcal{H}}^*\cdot(\nabla\times\vec{\mathcal{E}})-\vec{\mathcal{E}}\cdot(\nabla\times\vec{\mathcal{H}}^*)=i\omega\left(\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}}-\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^*\right)$

上式左边刚好为：$\nabla\cdot(\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^*)=2\nabla\cdot\vec{\mathcal{S}}$，从而有：

$$\boxed{-\nabla\cdot\vec{\mathcal{S}}=\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^*-\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})}$$

六、复玻印亭定理

对单色场，

无源均匀区的 Maxwell 方程：
$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{r})=i\omega\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{r}),\quad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{r})=0$$
$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{r})=-i\omega\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\vec{r}),\quad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\vec{r})=0 \qquad (1)$$

实际的物理场：$\vec{X}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$　　$\vec{X}$ 可以是 $\vec{E}$、$\vec{D}$、$\vec{B}$ 或 $\vec{H}$　　(3)

瞬时能流密度：
$$\vec{S}(\vec{r},t)=\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]\times\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$$
$$=\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^*\right]+\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}})\,e^{-2i\omega t}\right]$$

周期平均：$\left\langle\vec{S}\right\rangle=\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^*\right]\Longrightarrow$ 定义复玻印亭矢量：$\boxed{\vec{\boldsymbol{\mathcal{S}}}=\dfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^*}$

显然，复玻印亭矢量的实部为平均能流密度矢量，复玻印亭矢量本身是否提供新的物理意义？

利用 (1)，可得：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^*\cdot(\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}})-\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\cdot(\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^*)=i\omega\left(\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^*\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}-\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^*\right)$

上式左边刚好为：$\nabla\cdot(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^*)=2\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{S}}}$，从而有：

$$\boxed{-\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{S}}}=\frac{i\omega}{2}\left(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^*-\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^*\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\right)}\quad\text{—— 复玻印亭定理}$$

六、复玻印亭定理

对单色场，

无源均匀区的 Maxwell 方程：

$$\nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})=i\omega\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}),\qquad \nabla\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r})=0$$
$$\nabla\times\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})=-i\omega\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}),\quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})=0 \tag{1}$$

实际的物理场：$\vec{X}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{X}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$ $\qquad$ $\vec{X}$ 可以是 $\vec{E}$、$\vec{D}$、$\vec{B}$ 或 $\vec{H}$ (3)

瞬时能流密度：$\vec{S}(\vec{r},t)=\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]\times\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$

$$=\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^*\right]+\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[(\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}})\,e^{-2i\omega t}\right]$$

周期平均： $\left\langle\vec{S}\right\rangle=\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^*\right]$ $\Longrightarrow$ 定义复玻印亭矢量：$\boxed{\vec{\mathcal{S}}=\dfrac{1}{2}\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^*}$

显然，复玻印亭矢量的实部为平均能流密度矢量，复玻印亭矢量本身是否提供新的物理意义？

利用 (1)，可得：$\vec{\mathcal{H}}^*\cdot(\nabla\times\vec{\mathcal{E}})-\vec{\mathcal{E}}\cdot(\nabla\times\vec{\mathcal{H}}^*)=i\omega\left(\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}}-\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^*\right)$

上式左边刚好为：$\nabla\cdot(\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^*)=2\nabla\cdot\vec{\mathcal{S}}$，从而有：

$$\boxed{-\nabla\cdot\vec{\mathcal{S}}=\frac{i\omega}{2}\left(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^*-\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}}\right)}$$

—— 复玻印亭定理

求实部并注意到 $\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{S}}\right]=\left\langle\vec{S}\right\rangle$ 得：$-\nabla\cdot\left\langle\vec{S}\right\rangle=\mathrm{Re}\left[\dfrac{i\omega}{2}\left(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^*-\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}}\right)\right]$

Let there be light

$$-\nabla \cdot \left\langle \vec{\boldsymbol{S}} \right\rangle = \mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2} \left(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^{*} - \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{*} \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}} \right) \right]$$

$$-\nabla\cdot\left\langle\vec{S}\right\rangle=\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^{*}-\vec{\mathcal{H}}^{*}\cdot\vec{\mathcal{B}})\right]$$

左边表示平均单位时间流进某点的能量，

$$-\nabla\cdot\left\langle\vec{\boldsymbol{S}}\right\rangle=\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}\left(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^{*}-\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{*}\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\right)\right]$$

左边表示平均单位时间流进某点的能量，也就是介质的热损耗，因此

$$-\nabla\cdot\left\langle\vec{\boldsymbol{S}}\right\rangle = \mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^*-\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^*\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}})\right]$$

左边表示平均单位时间流进某点的能量，也就是介质的热损耗，因此

$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^*-\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^*\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}})\right]$ 描述介质的热损耗

$$-\nabla\cdot\left\langle\vec{S}\right\rangle=\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^*-\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})\right]$$

左边表示平均单位时间流进某点的能量，也就是介质的热损耗，因此

$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^*-\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})\right]$ 描述介质的热损耗

讨论：

(1) 若介质有耗：$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^*-\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})\right]>0$，无耗：$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^*-\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})\right]=0$

$$-\nabla \cdot \left\langle \vec{S} \right\rangle = \text{Re}\left[\frac{i\omega}{2} (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}^* - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot \vec{\mathcal{B}}) \right]$$

左边表示平均单位时间流进某点的能量，也就是介质的热损耗，因此

$\text{Re}\left[\frac{i\omega}{2} (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}^* - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot \vec{\mathcal{B}}) \right]$ 描述介质的热损耗

讨论：

(1) 若介质有耗：$\text{Re}\left[\frac{i\omega}{2} (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}^* - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot \vec{\mathcal{B}}) \right] > 0$，无耗：$\text{Re}\left[\frac{i\omega}{2} (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}^* - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot \vec{\mathcal{B}}) \right] = 0$

(2) 对各向同性线性介质，如单色场表示为：$\vec{X}(\vec{r}, t) = \text{Re}\left[\vec{\mathcal{X}}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \right]$，则

若介质的介电常数和磁导率的虚部大于零，则介质是有耗介质

若介质的介电常数和磁导率的虚部等于零，则是无耗介质

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}}, \ \vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}},$$

$$-\nabla\cdot\left\langle\vec{S}\right\rangle=\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^*-\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})\right]$$

左边表示平均单位时间流进某点的能量，也就是介质的热损耗，因此

$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^*-\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})\right]$ 描述介质的热损耗

讨论：

(1) 若介质有耗：$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^*-\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})\right]>0$，无耗：$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^*-\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})\right]=0$

(2) 对各向同性线性介质，如单色场表示为：$\vec{X}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{X}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$，则

若介质的介电常数和磁导率的虚部大于零，则介质是有耗介质

若介质的介电常数和磁导率的虚部等于零，则是无耗介质

$$\vec{\mathcal{D}}=\epsilon\,\vec{\mathcal{E}},\ \vec{\mathcal{B}}=\mu\,\vec{\mathcal{H}},\ \Rightarrow\ \mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^*-\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})\right]=\frac{\omega}{2}\left[\,\mathrm{Im}(\epsilon)\,|\vec{\mathcal{E}}|^2+\mathrm{Im}(\mu)\,|\vec{\mathcal{H}}|^2\right]$$

$$-\nabla\cdot\left\langle\vec{S}\right\rangle = \mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^*-\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})\right]$$

左边表示平均单位时间流进某点的能量，也就是介质的热损耗，因此

$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^*-\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})\right]$ 描述介质的热损耗

讨论：

(1) 若介质有耗：$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^*-\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})\right] > 0$，无耗：$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^*-\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})\right] = 0$

(2) 对各向同性线性介质，如单色场表示为：$\vec{X}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{X}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$，则

若介质的介电常数和磁导率的虚部大于零，则介质是有耗介质

若介质的介电常数和磁导率的虚部等于零，则是无耗介质

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon\,\vec{\mathcal{E}},\ \vec{\mathcal{B}} = \mu\,\vec{\mathcal{H}},\ \Rightarrow\ \mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^*-\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})\right] = \frac{\omega}{2}\left[\,\mathrm{Im}(\epsilon)\,|\vec{\mathcal{E}}|^2+\mathrm{Im}(\mu)\,|\vec{\mathcal{H}}|^2\right]$$

故，如果 $\mathrm{Im}(\epsilon)>0$ 或 $\mathrm{Im}(\mu)>0$，则介质是有耗的

思考：若单色场表示为 $\vec{X}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{X}}(\vec{r})e^{i\omega t}\right]$ 如何？

$$-\nabla\cdot\left\langle\vec{S}\right\rangle=\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^*-\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})\right]$$

左边表示平均单位时间流进某点的能量，也就是介质的热损耗，因此

$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^*-\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})\right]$ 描述介质的热损耗

讨论：

(1) 若介质有耗：$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^*-\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})\right]>0$，无耗：$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^*-\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})\right]=0$

(2) 对各向同性线性介质，如单色场表示为：$\vec{X}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{X}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$，则

若介质的介电常数和磁导率的虚部大于零，则介质是有耗介质

若介质的介电常数和磁导率的虚部等于零，则是无耗介质

$$\vec{\mathcal{D}}=\epsilon\,\vec{\mathcal{E}},\ \vec{\mathcal{B}}=\mu\,\vec{\mathcal{H}},\ \Rightarrow\ \mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^*-\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})\right]=\frac{\omega}{2}\left[\mathrm{Im}(\epsilon)\,|\vec{\mathcal{E}}|^2+\mathrm{Im}(\mu)\,|\vec{\mathcal{H}}|^2\right]$$

故，如果 $\mathrm{Im}(\epsilon)>0$ 或 $\mathrm{Im}(\mu)>0$，则介质是有耗的

思考：若单色场表示为 $\vec{X}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{X}}(\vec{r})e^{i\omega t}\right]$ 如何？

(3) 对各向异性线性无耗介质，介电常数和磁导率张量是厄密的，

$$-\nabla\cdot\left\langle\vec{S}\right\rangle = \mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^* - \vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})\right]$$

左边表示平均单位时间流进某点的能量，也就是介质的热损耗，因此

$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^* - \vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})\right]$ 描述介质的热损耗

讨论：

(1) 若介质有耗：$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^* - \vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})\right] > 0$，无耗：$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^* - \vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})\right] = 0$

(2) 对各向同性线性介质，如单色场表示为：$\vec{X}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{X}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right]$，则

若介质的介电常数和磁导率的虚部大于零，则介质是有耗介质

若介质的介电常数和磁导率的虚部等于零，则是无耗介质

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon\,\vec{\mathcal{E}},\ \vec{\mathcal{B}} = \mu\,\vec{\mathcal{H}},\ \Rightarrow\ \mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^* - \vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})\right] = \frac{\omega}{2}\left[\mathrm{Im}(\epsilon)\,|\vec{\mathcal{E}}|^2 + \mathrm{Im}(\mu)\,|\vec{\mathcal{H}}|^2\right]$$

故，如果 $\mathrm{Im}(\epsilon) > 0$ 或 $\mathrm{Im}(\mu) > 0$，则介质是有耗的

思考：若单色场表示为 $\vec{X}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{X}}(\vec{r})e^{i\omega t}\right]$ 如何？

(3) 对各向异性线性无耗介质，介电常数和磁导率张量是厄密的，$\overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger = \overleftrightarrow{\epsilon}$，$\overleftrightarrow{\mu}^\dagger = \overleftrightarrow{\mu}$

对各向异性线性介质：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}, \qquad \vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{\mu}} \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$

对各向异性线性介质：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}} = \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}, \qquad \vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = \overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^* - \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^* \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}})\right]$$

对各向异性线性介质：$\vec{\mathcal{D}} = \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}, \qquad \vec{\mathcal{B}} = \overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}^* - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot \vec{\mathcal{B}})\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}\left[\vec{\mathcal{E}} \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon}^* \cdot \vec{\mathcal{E}}^*) - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}})\right]\right]$$

对各向异性线性介质：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}} = \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}, \qquad \vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = \overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^* - \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^* \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}})\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon}^* \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^*) - \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}})\right]\right]$$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon}^* \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^*) - \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}) - \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}) + \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} \cdot (\overleftrightarrow{\mu}^* \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^*)\right]$$

对各向异性线性介质：$\vec{\mathcal{D}} = \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}, \qquad \vec{\mathcal{B}} = \overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}^* - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot \vec{\mathcal{B}})\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}\left[\vec{\mathcal{E}} \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon}^* \cdot \vec{\mathcal{E}}^*) - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}})\right]\right]$$

$$= \quad \frac{i\omega}{4}\left[\vec{\mathcal{E}} \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon}^* \cdot \vec{\mathcal{E}}^*) - \vec{\mathcal{E}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}) + \vec{\mathcal{H}} \cdot (\overleftrightarrow{\mu}^* \cdot \vec{\mathcal{H}}^*)\right]$$

利用：$\overleftrightarrow{t} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \overleftrightarrow{t}^T$

对各向异性线性介质：$\vec{\mathcal{D}} = \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}, \qquad \vec{\mathcal{B}} = \overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}^* - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot \vec{\mathcal{B}})\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}\left[\vec{\mathcal{E}} \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon}^* \cdot \vec{\mathcal{E}}^*) - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}})\right]\right]$$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[\vec{\mathcal{E}} \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon}^* \cdot \vec{\mathcal{E}}^*) - \vec{\mathcal{E}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}) + \vec{\mathcal{H}} \cdot (\overleftrightarrow{\mu}^* \cdot \vec{\mathcal{H}}^*)\right]$$

利用：$\overleftrightarrow{t} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \overleftrightarrow{t}^T$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[\vec{\mathcal{E}} \cdot (\vec{\mathcal{E}}^* \cdot \overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger) - \vec{\mathcal{E}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}) + \vec{\mathcal{H}} \cdot (\vec{\mathcal{H}}^* \cdot \overleftrightarrow{\mu}^\dagger)\right]$$

对各向异性线性介质：$\vec{\mathcal{D}} = \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}, \qquad \vec{\mathcal{B}} = \overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}^* - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot \vec{\mathcal{B}})\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}[\vec{\mathcal{E}} \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon}^* \cdot \vec{\mathcal{E}}^*) - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}})]\right]$$

$$= \frac{i\omega}{4}[\vec{\mathcal{E}} \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon}^* \cdot \vec{\mathcal{E}}^*) - \vec{\mathcal{E}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}) + \vec{\mathcal{H}} \cdot (\overleftrightarrow{\mu}^* \cdot \vec{\mathcal{H}}^*)]$$

利用：$\overleftrightarrow{t} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \overleftrightarrow{t}^T$

$$= \frac{i\omega}{4}[\vec{\mathcal{E}} \cdot (\vec{\mathcal{E}}^* \cdot \overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger) - \vec{\mathcal{E}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}) + \vec{\mathcal{H}} \cdot (\vec{\mathcal{H}}^* \cdot \overleftrightarrow{\mu}^\dagger)]$$

利用：$\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \overleftrightarrow{t}) = (\vec{b} \cdot \overleftrightarrow{t}) \cdot \vec{a} = (\vec{a}\vec{b}) : \overleftrightarrow{t}$

对各向异性线性介质：$\vec{\mathcal{D}} = \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}, \qquad \vec{\mathcal{B}} = \overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}^* - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot \vec{\mathcal{B}})\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}\left[\vec{\mathcal{E}} \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon}^* \cdot \vec{\mathcal{E}}^*) - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}})\right]\right]$$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[\vec{\mathcal{E}} \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon}^* \cdot \vec{\mathcal{E}}^*) - \vec{\mathcal{E}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}) + \vec{\mathcal{H}} \cdot (\overleftrightarrow{\mu}^* \cdot \vec{\mathcal{H}}^*)\right]$$

利用：$\overleftrightarrow{t} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \overleftrightarrow{t}^T$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[\vec{\mathcal{E}} \cdot (\vec{\mathcal{E}}^* \cdot \overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger) - \vec{\mathcal{E}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}) + \vec{\mathcal{H}} \cdot (\vec{\mathcal{H}}^* \cdot \overleftrightarrow{\mu}^\dagger)\right]$$

利用：$\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \overleftrightarrow{t}) = (\vec{b} \cdot \overleftrightarrow{t}) \cdot \vec{a} = (\vec{a}\vec{b}) : \overleftrightarrow{t}$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[(\vec{\mathcal{E}}\vec{\mathcal{E}}^*) : \overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger - (\vec{\mathcal{E}}\vec{\mathcal{E}}^*) : \overleftrightarrow{\epsilon} - (\vec{\mathcal{H}}\vec{\mathcal{H}}^*) : \overleftrightarrow{\mu} + (\vec{\mathcal{H}}\vec{\mathcal{H}}^*) : \overleftrightarrow{\mu}^\dagger\right]$$

对各向异性线性介质：$\vec{\mathcal{D}} = \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}, \qquad \vec{\mathcal{B}} = \overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}^* - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot \vec{\mathcal{B}})\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}\left[\,\vec{\mathcal{E}} \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon}^* \cdot \vec{\mathcal{E}}^*) - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}})\,\right]\right]$$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[\,\vec{\mathcal{E}} \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon}^* \cdot \vec{\mathcal{E}}^*) - \vec{\mathcal{E}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}) + \vec{\mathcal{H}} \cdot (\overleftrightarrow{\mu}^* \cdot \vec{\mathcal{H}}^*)\,\right]$$

利用：$\overleftrightarrow{t} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \overleftrightarrow{t}^T$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[\,\vec{\mathcal{E}} \cdot (\vec{\mathcal{E}}^* \cdot \overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger) - \vec{\mathcal{E}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}) + \vec{\mathcal{H}} \cdot (\vec{\mathcal{H}}^* \cdot \overleftrightarrow{\mu}^\dagger)\,\right]$$

利用：$\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \overleftrightarrow{t}) = (\vec{b} \cdot \overleftrightarrow{t}) \cdot \vec{a} = (\vec{a}\vec{b}) : \overleftrightarrow{t}$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[\,(\vec{\mathcal{E}}\vec{\mathcal{E}}^*) : \overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger - (\vec{\mathcal{E}}\vec{\mathcal{E}}^*) : \overleftrightarrow{\epsilon} - (\vec{\mathcal{H}}\vec{\mathcal{H}}^*) : \overleftrightarrow{\mu} + (\vec{\mathcal{H}}\vec{\mathcal{H}}^*) : \overleftrightarrow{\mu}^\dagger\,\right]$$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[\,(\vec{\mathcal{E}}\vec{\mathcal{E}}^*) : (\overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger - \overleftrightarrow{\epsilon}) + (\vec{\mathcal{H}}\vec{\mathcal{H}}^*) : (\overleftrightarrow{\mu}^\dagger - \overleftrightarrow{\mu})\,\right]$$

对各向异性线性介质：$\vec{\mathcal{D}} = \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}, \qquad \vec{\mathcal{B}} = \overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}^* - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot \vec{\mathcal{B}})\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}\left[\vec{\mathcal{E}} \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon}^* \cdot \vec{\mathcal{E}}^*) - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}})\right]\right]$$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[\vec{\mathcal{E}} \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon}^* \cdot \vec{\mathcal{E}}^*) - \vec{\mathcal{E}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}) + \vec{\mathcal{H}} \cdot (\overleftrightarrow{\mu}^* \cdot \vec{\mathcal{H}}^*)\right]$$

利用：$\overleftrightarrow{t} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \overleftrightarrow{t}^T$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[\vec{\mathcal{E}} \cdot (\vec{\mathcal{E}}^* \cdot \overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger) - \vec{\mathcal{E}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}) + \vec{\mathcal{H}} \cdot (\vec{\mathcal{H}}^* \cdot \overleftrightarrow{\mu}^\dagger)\right]$$

利用：$\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \overleftrightarrow{t}) = (\vec{b} \cdot \overleftrightarrow{t}) \cdot \vec{a} = (\vec{a}\vec{b}) : \overleftrightarrow{t}$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[(\vec{\mathcal{E}}\vec{\mathcal{E}}^*) : \overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger - (\vec{\mathcal{E}}\vec{\mathcal{E}}^*) : \overleftrightarrow{\epsilon} - (\vec{\mathcal{H}}\vec{\mathcal{H}}^*) : \overleftrightarrow{\mu} + (\vec{\mathcal{H}}\vec{\mathcal{H}}^*) : \overleftrightarrow{\mu}^\dagger\right]$$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[(\vec{\mathcal{E}}\vec{\mathcal{E}}^*) : (\overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger - \overleftrightarrow{\epsilon}) + (\vec{\mathcal{H}}\vec{\mathcal{H}}^*) : (\overleftrightarrow{\mu}^\dagger - \overleftrightarrow{\mu})\right] = 0$$

最后一步利用了介质是无耗的

对各向异性线性介质：$\vec{\mathcal{D}} = \overleftrightarrow{\epsilon}\cdot\vec{\mathcal{E}}, \qquad \vec{\mathcal{B}} = \overleftrightarrow{\mu}\cdot\vec{\mathcal{H}}$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^* - \vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}\left[\vec{\mathcal{E}}\cdot(\overleftrightarrow{\epsilon}^*\cdot\vec{\mathcal{E}}^*) - \vec{\mathcal{H}}^*\cdot(\overleftrightarrow{\mu}\cdot\vec{\mathcal{H}})\right]\right]$$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[\vec{\mathcal{E}}\cdot(\overleftrightarrow{\epsilon}^*\cdot\vec{\mathcal{E}}^*) - \vec{\mathcal{E}}^*\cdot(\overleftrightarrow{\epsilon}\cdot\vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{H}}^*\cdot(\overleftrightarrow{\mu}\cdot\vec{\mathcal{H}}) + \vec{\mathcal{H}}\cdot(\overleftrightarrow{\mu}^*\cdot\vec{\mathcal{H}}^*)\right]$$

利用：$\overleftrightarrow{t}\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot\overleftrightarrow{t}^T$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[\vec{\mathcal{E}}\cdot(\vec{\mathcal{E}}^*\cdot\overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger) - \vec{\mathcal{E}}^*\cdot(\overleftrightarrow{\epsilon}\cdot\vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{H}}^*\cdot(\overleftrightarrow{\mu}\cdot\vec{\mathcal{H}}) + \vec{\mathcal{H}}\cdot(\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\overleftrightarrow{\mu}^\dagger)\right]$$

利用：$\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\overleftrightarrow{t}) = (\vec{b}\cdot\overleftrightarrow{t})\cdot\vec{a} = (\vec{a}\vec{b}):\overleftrightarrow{t}$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[(\vec{\mathcal{E}}\vec{\mathcal{E}}^*):\overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger - (\vec{\mathcal{E}}\vec{\mathcal{E}}^*):\overleftrightarrow{\epsilon} - (\vec{\mathcal{H}}\vec{\mathcal{H}}^*):\overleftrightarrow{\mu} + (\vec{\mathcal{H}}\vec{\mathcal{H}}^*):\overleftrightarrow{\mu}^\dagger\right]$$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[(\vec{\mathcal{E}}\vec{\mathcal{E}}^*):(\overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger - \overleftrightarrow{\epsilon}) + (\vec{\mathcal{H}}\vec{\mathcal{H}}^*):(\overleftrightarrow{\mu}^\dagger - \overleftrightarrow{\mu})\right] = 0$$ 最后一步利用了介质是无耗的

$\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$ 是任意复矢量

对各向异性线性介质：$\vec{\mathcal{D}} = \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}, \qquad \vec{\mathcal{B}} = \overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^* - \vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}[\,\vec{\mathcal{E}}\cdot(\overleftrightarrow{\epsilon}^*\cdot\vec{\mathcal{E}}^*) - \vec{\mathcal{H}}^*\cdot(\overleftrightarrow{\mu}\cdot\vec{\mathcal{H}})\,]\right]$$

$$= \frac{i\omega}{4}[\,\vec{\mathcal{E}}\cdot(\overleftrightarrow{\epsilon}^*\cdot\vec{\mathcal{E}}^*) - \vec{\mathcal{E}}^*\cdot(\overleftrightarrow{\epsilon}\cdot\vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{H}}^*\cdot(\overleftrightarrow{\mu}\cdot\vec{\mathcal{H}}) + \vec{\mathcal{H}}\cdot(\overleftrightarrow{\mu}^*\cdot\vec{\mathcal{H}}^*)\,]$$

利用：$\overleftrightarrow{t}\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot\overleftrightarrow{t}^T$

$$= \frac{i\omega}{4}[\,\vec{\mathcal{E}}\cdot(\vec{\mathcal{E}}^*\cdot\overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger) - \vec{\mathcal{E}}^*\cdot(\overleftrightarrow{\epsilon}\cdot\vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{H}}^*\cdot(\overleftrightarrow{\mu}\cdot\vec{\mathcal{H}}) + \vec{\mathcal{H}}\cdot(\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\overleftrightarrow{\mu}^\dagger)\,]$$

利用：$\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\overleftrightarrow{t}) = (\vec{b}\cdot\overleftrightarrow{t})\cdot\vec{a} = (\vec{a}\vec{b}) : \overleftrightarrow{t}$

$$= \frac{i\omega}{4}[\,(\vec{\mathcal{E}}\vec{\mathcal{E}}^*) : \overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger - (\vec{\mathcal{E}}\vec{\mathcal{E}}^*) : \overleftrightarrow{\epsilon} - (\vec{\mathcal{H}}\vec{\mathcal{H}}^*) : \overleftrightarrow{\mu} + (\vec{\mathcal{H}}\vec{\mathcal{H}}^*) : \overleftrightarrow{\mu}^\dagger\,]$$

$$= \frac{i\omega}{4}[\,(\vec{\mathcal{E}}\vec{\mathcal{E}}^*) : (\overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger - \overleftrightarrow{\epsilon}) + (\vec{\mathcal{H}}\vec{\mathcal{H}}^*) : (\overleftrightarrow{\mu}^\dagger - \overleftrightarrow{\mu})\,] = 0$$ 最后一步利用了介质是无耗的

$\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$ 是任意复矢量 $\Longrightarrow \quad \overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger = \overleftrightarrow{\epsilon}, \quad \overleftrightarrow{\mu}^\dagger = \overleftrightarrow{\mu}$

对各向异性线性介质：$\vec{\mathcal{D}} = \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}, \qquad \vec{\mathcal{B}} = \overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}^* - \vec{\mathcal{H}}^*\cdot\vec{\mathcal{B}})\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}\left[\vec{\mathcal{E}}\cdot(\overleftrightarrow{\epsilon}^*\cdot\vec{\mathcal{E}}^*) - \vec{\mathcal{H}}^*\cdot(\overleftrightarrow{\mu}\cdot\vec{\mathcal{H}})\right]\right]$$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[\vec{\mathcal{E}}\cdot(\overleftrightarrow{\epsilon}^*\cdot\vec{\mathcal{E}}^*) - \vec{\mathcal{E}}^*\cdot(\overleftrightarrow{\epsilon}\cdot\vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{H}}^*\cdot(\overleftrightarrow{\mu}\cdot\vec{\mathcal{H}}) + \vec{\mathcal{H}}\cdot(\overleftrightarrow{\mu}^*\cdot\vec{\mathcal{H}}^*)\right]$$

利用：$\overleftrightarrow{t}\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot\overleftrightarrow{t}^T$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[\vec{\mathcal{E}}\cdot(\vec{\mathcal{E}}^*\cdot\overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger) - \vec{\mathcal{E}}^*\cdot(\overleftrightarrow{\epsilon}\cdot\vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{H}}^*\cdot(\overleftrightarrow{\mu}\cdot\vec{\mathcal{H}}) + \vec{\mathcal{H}}\cdot(\vec{\mathcal{H}}^*\cdot\overleftrightarrow{\mu}^\dagger)\right]$$

利用：$\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\overleftrightarrow{t}) = (\vec{b}\cdot\overleftrightarrow{t})\cdot\vec{a} = (\vec{a}\vec{b}) : \overleftrightarrow{t}$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[(\vec{\mathcal{E}}\vec{\mathcal{E}}^*) : \overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger - (\vec{\mathcal{E}}\vec{\mathcal{E}}^*) : \overleftrightarrow{\epsilon} - (\vec{\mathcal{H}}\vec{\mathcal{H}}^*) : \overleftrightarrow{\mu} + (\vec{\mathcal{H}}\vec{\mathcal{H}}^*) : \overleftrightarrow{\mu}^\dagger\right]$$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[(\vec{\mathcal{E}}\vec{\mathcal{E}}^*) : (\overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger - \overleftrightarrow{\epsilon}) + (\vec{\mathcal{H}}\vec{\mathcal{H}}^*) : (\overleftrightarrow{\mu}^\dagger - \overleftrightarrow{\mu})\right] = 0$$ 最后一步利用了介质是无耗的

$\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$ 是任意复矢量 $\Longrightarrow \overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger = \overleftrightarrow{\epsilon}, \quad \overleftrightarrow{\mu}^\dagger = \overleftrightarrow{\mu}$

对非色散介质，如果介电常数和磁导率张量实的，则无耗意味着它们是对称的

对各向异性线性介质：$\vec{\mathcal{D}} = \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}, \qquad \vec{\mathcal{B}} = \overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}^* - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot \vec{\mathcal{B}})\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}\left[\vec{\mathcal{E}} \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon}^* \cdot \vec{\mathcal{E}}^*) - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}})\right]\right]$$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[\vec{\mathcal{E}} \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon}^* \cdot \vec{\mathcal{E}}^*) - \vec{\mathcal{E}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}) + \vec{\mathcal{H}} \cdot (\overleftrightarrow{\mu}^* \cdot \vec{\mathcal{H}}^*)\right]$$

利用：$\overleftrightarrow{t} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \overleftrightarrow{t}^T$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[\vec{\mathcal{E}} \cdot (\vec{\mathcal{E}}^* \cdot \overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger) - \vec{\mathcal{E}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}) + \vec{\mathcal{H}} \cdot (\vec{\mathcal{H}}^* \cdot \overleftrightarrow{\mu}^\dagger)\right]$$

利用：$\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \overleftrightarrow{t}) = (\vec{b} \cdot \overleftrightarrow{t}) \cdot \vec{a} = (\vec{a}\vec{b}) : \overleftrightarrow{t}$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[(\vec{\mathcal{E}}\vec{\mathcal{E}}^*) : \overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger - (\vec{\mathcal{E}}\vec{\mathcal{E}}^*) : \overleftrightarrow{\epsilon} - (\vec{\mathcal{H}}\vec{\mathcal{H}}^*) : \overleftrightarrow{\mu} + (\vec{\mathcal{H}}\vec{\mathcal{H}}^*) : \overleftrightarrow{\mu}^\dagger\right]$$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[(\vec{\mathcal{E}}\vec{\mathcal{E}}^*) : (\overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger - \overleftrightarrow{\epsilon}) + (\vec{\mathcal{H}}\vec{\mathcal{H}}^*) : (\overleftrightarrow{\mu}^\dagger - \overleftrightarrow{\mu})\right] = 0$$ 最后一步利用了介质是无耗的

$\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$ 是任意复矢量 $\Longrightarrow \quad \overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger = \overleftrightarrow{\epsilon}, \quad \overleftrightarrow{\mu}^\dagger = \overleftrightarrow{\mu}$

对非色散介质，如果介电常数和磁导率张量实的，则无耗意味着它们是对称的

(4) 复玻印亭定理：$-\nabla \cdot \vec{\mathcal{S}} = \frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}^* - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot \vec{\mathcal{B}})$ 两边取虚部再积分

对各向异性线性介质：$\vec{\mathcal{D}} = \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}, \qquad \vec{\mathcal{B}} = \overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}^* - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot \vec{\mathcal{B}})\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}\left[\vec{\mathcal{E}} \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon}^* \cdot \vec{\mathcal{E}}^*) - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}})\right]\right]$$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[\vec{\mathcal{E}} \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon}^* \cdot \vec{\mathcal{E}}^*) - \vec{\mathcal{E}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}) + \vec{\mathcal{H}} \cdot (\overleftrightarrow{\mu}^* \cdot \vec{\mathcal{H}}^*)\right]$$

利用：$\overleftrightarrow{t} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \overleftrightarrow{t}^T$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[\vec{\mathcal{E}} \cdot (\vec{\mathcal{E}}^* \cdot \overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger) - \vec{\mathcal{E}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot (\overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}) + \vec{\mathcal{H}} \cdot (\vec{\mathcal{H}}^* \cdot \overleftrightarrow{\mu}^\dagger)\right]$$

利用：$\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \overleftrightarrow{t}) = (\vec{b} \cdot \overleftrightarrow{t}) \cdot \vec{a} = (\vec{a}\vec{b}) : \overleftrightarrow{t}$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[(\vec{\mathcal{E}}\vec{\mathcal{E}}^*) : \overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger - (\vec{\mathcal{E}}\vec{\mathcal{E}}^*) : \overleftrightarrow{\epsilon} - (\vec{\mathcal{H}}\vec{\mathcal{H}}^*) : \overleftrightarrow{\mu} + (\vec{\mathcal{H}}\vec{\mathcal{H}}^*) : \overleftrightarrow{\mu}^\dagger\right]$$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[(\vec{\mathcal{E}}\vec{\mathcal{E}}^*) : (\overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger - \overleftrightarrow{\epsilon}) + (\vec{\mathcal{H}}\vec{\mathcal{H}}^*) : (\overleftrightarrow{\mu}^\dagger - \overleftrightarrow{\mu})\right] = 0$$ 最后一步利用了介质是无耗的

$\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$ 是任意复矢量 $\Longrightarrow \quad \overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger = \overleftrightarrow{\epsilon}, \quad \overleftrightarrow{\mu}^\dagger = \overleftrightarrow{\mu}$

对非色散介质，如果介电常数和磁导率张量实的，则无耗意味着它们是对称的

(4) 复玻印亭定理：$-\nabla \cdot \vec{\mathcal{S}} = \frac{i\omega}{2}(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}^* - \vec{\mathcal{H}}^* \cdot \vec{\mathcal{B}})$ 两边取虚部再积分

$$\oint \vec{n} \cdot \mathrm{Im}[\vec{\mathcal{S}}]\, d\sigma = -2\omega \int \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}^* - \frac{1}{2}\vec{\mathcal{H}}^* \cdot \vec{\mathcal{B}}\right] d\tau = 2\omega \times \text{磁能电能差的平均值}$$

七、平面波的极化（偏振）

七、平面波的极化（偏振）

电磁波的偏振（极化）：

七、平面波的极化（偏振）

电磁波的偏振（极化）：空间上固定一点的电场强度矢量 $\vec{E}$ 的末端随时间的变化而扫出的曲线轨迹。

七、平面波的极化（偏振）

电磁波的偏振（极化）：空间上固定一点的电场强度矢量 $\vec{E}$ 的末端随时间的变化而扫出的曲线轨迹。

对平面电磁波，$\vec{E} \perp \vec{k}$，故 $\vec{E}$ 在垂直于 $\vec{k}$ 的平面内，有两个独立分量。

七、平面波的极化（偏振）

电磁波的偏振（极化）：空间上固定一点的电场强度矢量 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 的末端随时间的变化而扫出的曲线轨迹。

对平面电磁波，$\vec{\boldsymbol{E}} \perp \vec{\boldsymbol{k}}$，故 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 在垂直于 $\vec{\boldsymbol{k}}$ 的平面内，有两个独立分量。

取 $\vec{\boldsymbol{k}} = k\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$，则对平面电磁波 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0$ 为：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 = (\mathcal{E}_1\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \mathcal{E}_2\,\hat{\boldsymbol{e}}_2)$，

七、平面波的极化（偏振）

电磁波的偏振（极化）：空间上固定一点的电场强度矢量 $\vec{E}$ 的末端随时间的变化而扫出的曲线轨迹。

对平面电磁波，$\vec{E}\perp\vec{k}$，故 $\vec{E}$ 在垂直于 $\vec{k}$ 的平面内，有两个独立分量。

取 $\vec{k}=k\,\hat{e}_z$，则对平面电磁波 $\vec{\mathcal{E}}_0$ 为：$\vec{\mathcal{E}}_0=(\mathcal{E}_1\,\hat{e}_1+\mathcal{E}_2\,\hat{e}_2)$，实际电场

$$\vec{E}(\vec{r},t)\quad=\mathrm{Re}\left[(\mathcal{E}_1\,\hat{e}_1+\mathcal{E}_2\,\hat{e}_2)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right]$$

七、平面波的极化（偏振）

电磁波的偏振（极化）：空间上固定一点的电场强度矢量 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 的末端随时间的变化而扫出的曲线轨迹。

对平面电磁波，$\vec{\boldsymbol{E}} \perp \vec{\boldsymbol{k}}$，故 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 在垂直于 $\vec{\boldsymbol{k}}$ 的平面内，有两个独立分量。

取 $\vec{\boldsymbol{k}} = k\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$，则对平面电磁波 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0$ 为：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 = (\mathcal{E}_1\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \mathcal{E}_2\,\hat{\boldsymbol{e}}_2)$，实际电场

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \mathrm{Re}\left[(\mathcal{E}_1\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \mathcal{E}_2\,\hat{\boldsymbol{e}}_2)e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - \omega t)}\right] = \mathrm{Re}\left[(\mathcal{E}_+\,\hat{\boldsymbol{e}}_+ + \mathcal{E}_-\,\hat{\boldsymbol{e}}_-)e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - \omega t)}\right]$$

七、平面波的极化（偏振）

电磁波的偏振（极化）：空间上固定一点的电场强度矢量 $\vec{E}$ 的末端随时间的变化而扫出的曲线轨迹。

对平面电磁波，$\vec{E} \perp \vec{k}$，故 $\vec{E}$ 在垂直于 $\vec{k}$ 的平面内，有两个独立分量。

取 $\vec{k} = k\,\hat{e}_z$，则对平面电磁波 $\vec{\mathcal{E}}_0$ 为：$\vec{\mathcal{E}}_0 = (\mathcal{E}_1\,\hat{e}_1 + \mathcal{E}_2\,\hat{e}_2)$，实际电场

$$\vec{E}(\vec{r},t) \quad = \mathrm{Re}\left[(\mathcal{E}_1\,\hat{e}_1 + \mathcal{E}_2\,\hat{e}_2)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right] = \mathrm{Re}\left[(\mathcal{E}_+\,\hat{e}_+ + \mathcal{E}_-\,\hat{e}_-)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right]$$

其中　实单位矢量 $\hat{e}_1$，$\hat{e}_2$ 和复单位矢量 $\hat{e}_+$，$\hat{e}_-$ 满足：

七、平面波的极化（偏振）

电磁波的偏振（极化）：空间上固定一点的电场强度矢量 $\vec{E}$ 的末端随时间的变化而扫出的曲线轨迹。

对平面电磁波，$\vec{E} \perp \vec{k}$，故 $\vec{E}$ 在垂直于 $\vec{k}$ 的平面内，有两个独立分量。

取 $\vec{k} = k\,\hat{e}_z$，则对平面电磁波 $\vec{\mathcal{E}}_0$ 为：$\vec{\mathcal{E}}_0 = (\mathcal{E}_1\,\hat{e}_1 + \mathcal{E}_2\,\hat{e}_2)$，实际电场

$$\vec{E}(\vec{r},t) \quad = \mathrm{Re}\left[(\mathcal{E}_1\,\hat{e}_1 + \mathcal{E}_2\,\hat{e}_2)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right] = \mathrm{Re}\left[(\mathcal{E}_+\,\hat{e}_+ + \mathcal{E}_-\,\hat{e}_-)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right]$$

其中 实单位矢量 $\hat{e}_1$，$\hat{e}_2$ 和复单位矢量 $\hat{e}_+$，$\hat{e}_-$ 满足：

$$\hat{e}_1\cdot\hat{e}_2 = 0,\ \hat{e}_1\times\hat{e}_2 = \hat{e}_z || \vec{k}, \quad \hat{e}_+\cdot\hat{e}_-^* = \hat{e}_+\cdot\hat{e}_+ = 0, \begin{cases}\hat{e}_+\cdot\hat{e}_+^* = 1\\ \hat{e}_-\cdot\hat{e}_-^* = 1\end{cases}$$

七、平面波的极化（偏振）

电磁波的偏振（极化）：空间上固定一点的电场强度矢量 $\vec{E}$ 的末端随时间的变化而扫出的曲线轨迹。

对平面电磁波，$\vec{E} \perp \vec{k}$，故 $\vec{E}$ 在垂直于 $\vec{k}$ 的平面内，有两个独立分量。

取 $\vec{k} = k\,\hat{e}_z$，则对平面电磁波 $\vec{\mathcal{E}}_0$ 为：$\vec{\mathcal{E}}_0 = (\mathcal{E}_1\,\hat{e}_1 + \mathcal{E}_2\,\hat{e}_2)$，实际电场

$$\vec{E}(\vec{r},t) \quad = \mathrm{Re}\left[(\mathcal{E}_1\,\hat{e}_1 + \mathcal{E}_2\,\hat{e}_2)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right] = \mathrm{Re}\left[(\mathcal{E}_+\,\hat{e}_+ + \mathcal{E}_-\,\hat{e}_-)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right]$$

其中　实单位矢量 $\hat{e}_1$，$\hat{e}_2$ 和复单位矢量 $\hat{e}_+$，$\hat{e}_-$ 满足：

$$\hat{e}_1\cdot\hat{e}_2 = 0,\ \ \hat{e}_1\times\hat{e}_2 = \hat{e}_z||\vec{k},\quad \hat{e}_+\cdot\hat{e}_-^* = \hat{e}_+\cdot\hat{e}_+ = 0,\ \begin{cases}\hat{e}_+\cdot\hat{e}_+^* = 1\\ \hat{e}_-\cdot\hat{e}_-^* = 1\end{cases}$$

$$\hat{e}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_1 \pm i\,\hat{e}_2),\quad \hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_+ + \hat{e}_-),\quad \hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\,i}(\hat{e}_+ - \hat{e}_-)$$

七、平面波的极化（偏振）

电磁波的偏振（极化）：空间上固定一点的电场强度矢量 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 的末端随时间的变化而扫出的曲线轨迹。

对平面电磁波，$\vec{\boldsymbol{E}} \perp \vec{\boldsymbol{k}}$，故 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 在垂直于 $\vec{\boldsymbol{k}}$ 的平面内，有两个独立分量。

取 $\vec{\boldsymbol{k}} = k\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$，则对平面电磁波 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0$ 为：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 = (\mathcal{E}_1\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \mathcal{E}_2\,\hat{\boldsymbol{e}}_2)$，实际电场

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) \quad = \mathrm{Re}\left[(\mathcal{E}_1\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \mathcal{E}_2\,\hat{\boldsymbol{e}}_2)e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t)}\right] = \mathrm{Re}\left[(\mathcal{E}_+\,\hat{\boldsymbol{e}}_+ + \mathcal{E}_-\,\hat{\boldsymbol{e}}_-)e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t)}\right]$$

其中　实单位矢量 $\hat{\boldsymbol{e}}_1$，$\hat{\boldsymbol{e}}_2$ 和复单位矢量 $\hat{\boldsymbol{e}}_+$，$\hat{\boldsymbol{e}}_-$ 满足：

$$\hat{\boldsymbol{e}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_2 = 0,\ \hat{\boldsymbol{e}}_1 \times \hat{\boldsymbol{e}}_2 = \hat{\boldsymbol{e}}_z || \vec{\boldsymbol{k}}, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_+ \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_-^* = \hat{\boldsymbol{e}}_+ \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_+ = 0, \begin{cases} \hat{\boldsymbol{e}}_+ \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_+^* = 1 \\ \hat{\boldsymbol{e}}_- \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_-^* = 1 \end{cases}$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\boldsymbol{e}}_1 \pm i\,\hat{\boldsymbol{e}}_2), \quad \hat{\boldsymbol{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\boldsymbol{e}}_+ + \hat{\boldsymbol{e}}_-), \quad \hat{\boldsymbol{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\,i}(\hat{\boldsymbol{e}}_+ - \hat{\boldsymbol{e}}_-)$$

$$\mathcal{E}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{E}_1 \mp i\mathcal{E}_2), \quad \mathcal{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{E}_+ + \mathcal{E}_-), \quad \mathcal{E}_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\mathcal{E}_+ - \mathcal{E}_-)$$

七、平面波的极化（偏振）

电磁波的偏振（极化）：空间上固定一点的电场强度矢量 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 的末端随时间的变化而扫出的曲线轨迹。

对平面电磁波，$\vec{\boldsymbol{E}} \perp \vec{\boldsymbol{k}}$，故 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 在垂直于 $\vec{\boldsymbol{k}}$ 的平面内，有两个独立分量。

取 $\vec{\boldsymbol{k}} = k\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$，则对平面电磁波 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0$ 为：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 = (\mathcal{E}_1\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \mathcal{E}_2\,\hat{\boldsymbol{e}}_2)$，实际电场

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) \quad = \mathrm{Re}\left[(\mathcal{E}_1\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \mathcal{E}_2\,\hat{\boldsymbol{e}}_2) e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - \omega t)}\right] = \mathrm{Re}\left[(\mathcal{E}_+\,\hat{\boldsymbol{e}}_+ + \mathcal{E}_-\,\hat{\boldsymbol{e}}_-) e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - \omega t)}\right]$$

其中　实单位矢量 $\hat{\boldsymbol{e}}_1$，$\hat{\boldsymbol{e}}_2$ 和复单位矢量 $\hat{\boldsymbol{e}}_+$，$\hat{\boldsymbol{e}}_-$ 满足：

$$\hat{\boldsymbol{e}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_2 = 0, \ \hat{\boldsymbol{e}}_1 \times \hat{\boldsymbol{e}}_2 = \hat{\boldsymbol{e}}_z || \vec{\boldsymbol{k}}, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_+ \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_-^* = \hat{\boldsymbol{e}}_+ \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_+ = 0, \ \begin{cases} \hat{\boldsymbol{e}}_+ \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_+^* = 1 \\ \hat{\boldsymbol{e}}_- \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_-^* = 1 \end{cases}$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\boldsymbol{e}}_1 \pm i\,\hat{\boldsymbol{e}}_2), \quad \hat{\boldsymbol{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\boldsymbol{e}}_+ + \hat{\boldsymbol{e}}_-), \quad \hat{\boldsymbol{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\,i}(\hat{\boldsymbol{e}}_+ - \hat{\boldsymbol{e}}_-)$$

$$\mathcal{E}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{E}_1 \mp i\mathcal{E}_2), \quad \mathcal{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{E}_+ + \mathcal{E}_-), \quad \mathcal{E}_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\mathcal{E}_+ - \mathcal{E}_-)$$

$\mathcal{E}_{1,2}$，$\mathcal{E}_\pm$ 为复数

Let there be light

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) \quad = \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t)}\right]$$

$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 \perp \vec{\boldsymbol{k}}$，$(\hat{\boldsymbol{e}}_1 \times \hat{\boldsymbol{e}}_2) \,||\, \vec{\boldsymbol{k}}$，$\mathcal{E}_{1,2}$，$\mathcal{E}_\pm$ 为复数

Let there be light

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right]$$

$\vec{\mathcal{E}}_0 \perp \vec{k}$，$(\hat{e}_1 \times \hat{e}_2) \,||\, \vec{k}$，$\mathcal{E}_{1,2}$，$\mathcal{E}_{\pm}$ 为复数

$$= \mathrm{Re}\left[(\mathcal{E}_1\,\hat{e}_1 + \mathcal{E}_2\,\hat{e}_2)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right] = \mathrm{Re}\left[(\mathcal{E}_+\,\hat{e}_+ + \mathcal{E}_-\,\hat{e}_-)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right]$$

Let there be light

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right]$$

$\vec{\mathcal{E}}_0 \perp \vec{k}$， $(\hat{e}_1 \times \hat{e}_2) \,||\, \vec{k}$， $\mathcal{E}_{1,2}$， $\mathcal{E}_\pm$ 为复数

$$= \mathrm{Re}\left[(\mathcal{E}_1 \hat{e}_1 + \mathcal{E}_2 \hat{e}_2) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right] = \mathrm{Re}\left[(\mathcal{E}_+ \hat{e}_+ + \mathcal{E}_- \hat{e}_-) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right]$$

讨论：

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right] \qquad \vec{\mathcal{E}}_0 \perp \vec{k},\ (\hat{e}_1 \times \hat{e}_2)\,||\,\vec{k},\ \mathcal{E}_{1,2},\ \mathcal{E}_{\pm}\ \text{为复数}$$

$$= \mathrm{Re}\left[(\mathcal{E}_1\,\hat{e}_1 + \mathcal{E}_2\,\hat{e}_2)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right] = \mathrm{Re}\left[(\mathcal{E}_+\,\hat{e}_+ + \mathcal{E}_-\,\hat{e}_-)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right]$$

讨论：

1. 若 $\mathcal{E}_1 = 0$ 或 $\mathcal{E}_2 = 0$，线偏振

   设 $\mathcal{E}_2 = 0$，则：$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\mathcal{E}_1\,\hat{e}_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right] = |\mathcal{E}_1|\,\hat{e}_1\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi_1)$

   电场矢量末端始终在一直线上。因此，$\mathcal{E}_1$、$\mathcal{E}_2$ 描述波的线偏振分量

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right] = \mathrm{Re}\left[(\mathcal{E}_1\,\hat{e}_1 + \mathcal{E}_2\,\hat{e}_2)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right] = \mathrm{Re}\left[(\mathcal{E}_+\,\hat{e}_+ + \mathcal{E}_-\,\hat{e}_-)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right]$$

$\vec{\mathcal{E}}_0 \perp \vec{k}$，$(\hat{e}_1 \times \hat{e}_2)\,||\,\vec{k}$，$\mathcal{E}_{1,2}$，$\mathcal{E}_\pm$ 为复数

讨论：

1. 若 $\mathcal{E}_1 = 0$ 或 $\mathcal{E}_2 = 0$，线偏振

   设 $\mathcal{E}_2 = 0$，则：$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\mathcal{E}_1\,\hat{e}_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right] = |\mathcal{E}_1|\,\hat{e}_1\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi_1)$

   电场矢量末端始终在一直线上。因此，$\mathcal{E}_1$、$\mathcal{E}_2$ 描述波的线偏振分量

2. 若 $\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1 = \tan\alpha =$实数，仍然是线偏振

   $\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[(\mathcal{E}_1\,\hat{e}_1 + \mathcal{E}_2\,\hat{e}_2)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right] = |\mathcal{E}_1|(\hat{e}_1 + \tan\alpha\,\hat{e}_2)\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi_1)$

   电场矢量末端仍始终在一直线上。两初相位相同的线偏振波的合成波仍为线偏振波

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t)}\right] \\ &= \mathrm{Re}\left[(\mathcal{E}_1\,\hat{\boldsymbol{e}}_1+\mathcal{E}_2\,\hat{\boldsymbol{e}}_2)e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t)}\right] = \mathrm{Re}\left[(\mathcal{E}_+\,\hat{\boldsymbol{e}}_+ + \mathcal{E}_-\,\hat{\boldsymbol{e}}_-)e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t)}\right]\end{aligned}$$

$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 \perp \vec{\boldsymbol{k}}$，$(\hat{\boldsymbol{e}}_1 \times \hat{\boldsymbol{e}}_2)\,||\,\vec{\boldsymbol{k}}$，$\mathcal{E}_{1,2}$，$\mathcal{E}_\pm$ 为复数

讨论：

1. 若 $\mathcal{E}_1=0$ 或 $\mathcal{E}_2=0$，线偏振

   设 $\mathcal{E}_2=0$，则：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathrm{Re}\left[\mathcal{E}_1\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t)}\right] = |\mathcal{E}_1|\,\hat{\boldsymbol{e}}_1\cos(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t+\phi_1)$

   电场矢量末端始终在一直线上。因此，$\mathcal{E}_1$、$\mathcal{E}_2$ 描述波的线偏振分量

2. 若 $\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1=\tan\alpha=$实数，仍然是线偏振

   $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\mathrm{Re}\left[(\mathcal{E}_1\,\hat{\boldsymbol{e}}_1+\mathcal{E}_2\,\hat{\boldsymbol{e}}_2)e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t)}\right] = |\mathcal{E}_1|(\hat{\boldsymbol{e}}_1+\tan\alpha\;\hat{\boldsymbol{e}}_2)\cos(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t+\phi_1)$

   电场矢量末端仍始终在一直线上。两初相位相同的线偏振波的合成波仍为线偏振波

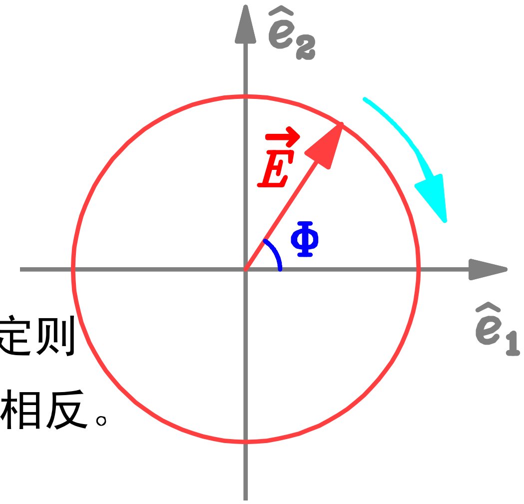
3. 若 $\mathcal{E}_+=0$，右旋圆偏振，（$\mathcal{E}_-=0$，左旋圆偏振）

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \mathrm{Re}\left[\mathcal{E}_-\,\hat{\boldsymbol{e}}_- e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t)}\right] = \frac{|\mathcal{E}_-|}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Re}\left[(\hat{\boldsymbol{e}}_1 - i\,\hat{\boldsymbol{e}}_2)e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t+\phi_-)}\right] \\ &= \frac{|\mathcal{E}_-|}{\sqrt{2}}\left[\cos\underbrace{(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t+\phi_-)}_{\Phi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_1+\sin\underbrace{(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t+\phi_-)}_{\Phi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_2\right]\end{aligned}$$

   电场矢量末端划出一个圆。迎着电磁波看，电场矢量是顺时针旋转，称为右旋圆偏振。

   类似地，$\mathcal{E}_-=0$、$\mathcal{E}_+\neq 0$ 对应于左旋圆偏振。$\mathcal{E}_+$、$\mathcal{E}_-$ 分别描述波的左右旋圆偏振分量。

3. $\mathcal{E}_+ = 0$，$\mathcal{E}_- \neq 0$



$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{|\mathcal{E}_-|}{\sqrt{2}}\Big[\cos\Phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \sin\Phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_2\Big], \quad \Phi = (\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - \omega t + \phi_-)$$

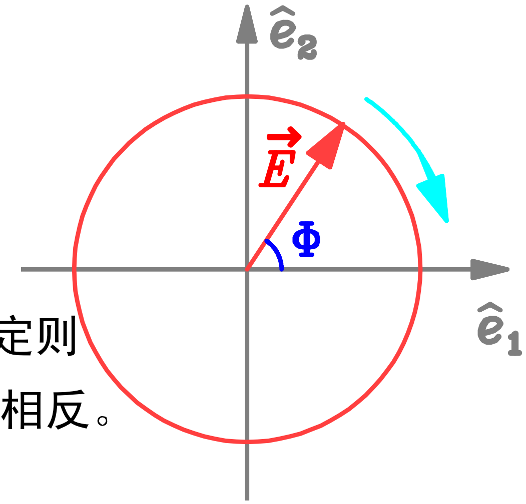
如图所示，电场矢量是顺时针旋转，在光学中称为右旋圆偏振。

据 IEEE 的定义，若 $\vec{\boldsymbol{k}}$ 方向与电场矢量旋转方向满足左（右）手螺旋定则则称为左（右）旋圆偏振。如图是左旋圆偏振，与经典光学中的定义相反。

教材遵循经典光学的定义。

综合以上得知：任意平面电磁波都可分解为两个线偏振波的叠加，或两个圆偏振波的叠加。

3. $\mathcal{E}_+ = 0$，$\mathcal{E}_- \neq 0$



$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{|\mathcal{E}_-|}{\sqrt{2}}\Big[\cos\Phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \sin\Phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_2\Big], \quad \Phi = (\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - \omega t + \phi_-)$$

如图所示，电场矢量是顺时针旋转，在光学中称为右旋圆偏振。

据 IEEE 的定义，若 $\vec{\boldsymbol{k}}$ 方向与电场矢量旋转方向满足左（右）手螺旋定则则称为左（右）旋圆偏振。如图是左旋圆偏振，与经典光学中的定义相反。

教材遵循经典光学的定义。

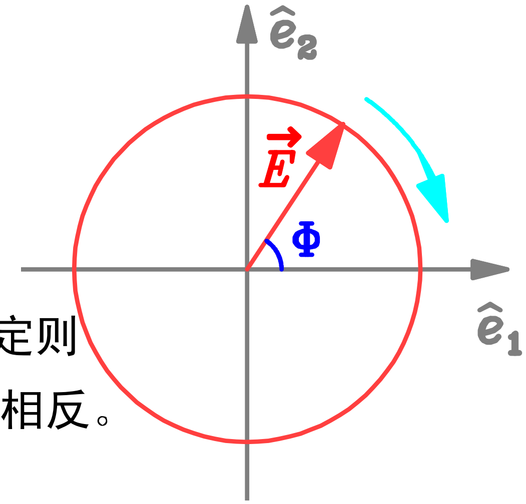
综合以上得知：任意平面电磁波都可分解为两个线偏振波的叠加，或两个圆偏振波的叠加。

4. 任意平面电磁波都可分解为两个线偏振波或两个圆偏振波的叠加。

任意平面电磁波：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t)} = (\mathcal{E}_1\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \mathcal{E}_2\,\hat{\boldsymbol{e}}_2)e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t)} = (\mathcal{E}_+\,\hat{\boldsymbol{e}}_+ + \mathcal{E}_-\,\hat{\boldsymbol{e}}_-)e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t)}$

3. $\mathcal{E}_+ = 0$，$\mathcal{E}_- \neq 0$

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{|\mathcal{E}_-|}{\sqrt{2}}\Big[\cos\Phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \sin\Phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_2\Big], \quad \Phi = (\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - \omega t + \phi_-)$$



如图所示，电场矢量是顺时针旋转，在光学中称为右旋圆偏振。

据 IEEE 的定义，若 $\vec{\boldsymbol{k}}$ 方向与电场矢量旋转方向满足左（右）手螺旋定则则称为左（右）旋圆偏振。如图是左旋圆偏振，与经典光学中的定义相反。

教材遵循经典光学的定义。

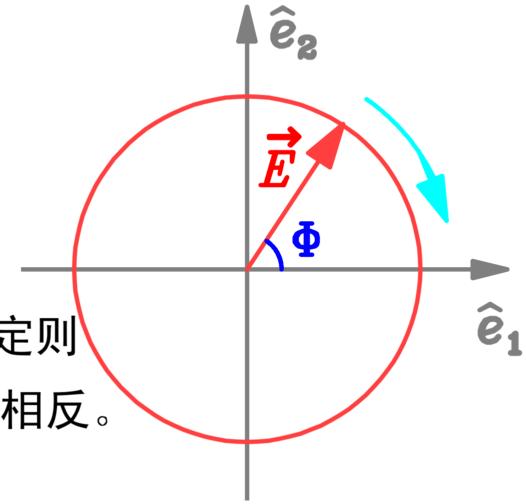
综合以上得知：任意平面电磁波都可分解为两个线偏振波的叠加，或两个圆偏振波的叠加。

4. 任意平面电磁波都可分解为两个线偏振波或两个圆偏振波的叠加。

任意平面电磁波：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t)} = (\mathcal{E}_1\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \mathcal{E}_2\,\hat{\boldsymbol{e}}_2)e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t)} = (\mathcal{E}_+\,\hat{\boldsymbol{e}}_+ + \mathcal{E}_-\,\hat{\boldsymbol{e}}_-)e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t)}$

两线偏振分量：$\mathcal{E}_1 = \hat{\boldsymbol{e}}_1\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0$，$\quad \mathcal{E}_2 = \hat{\boldsymbol{e}}_2\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0$，

3. $\mathcal{E}_+ = 0$，$\mathcal{E}_- \neq 0$



$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{|\mathcal{E}_-|}{\sqrt{2}}\Big[\cos\Phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \sin\Phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_2\Big], \quad \Phi = (\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - \omega t + \phi_-)$$

如图所示，电场矢量是顺时针旋转，在光学中称为右旋圆偏振。

据 IEEE 的定义，若 $\vec{\boldsymbol{k}}$ 方向与电场矢量旋转方向满足左（右）手螺旋定则则称为左（右）旋圆偏振。如图是左旋圆偏振，与经典光学中的定义相反。

教材遵循经典光学的定义。

综合以上得知：任意平面电磁波都可分解为两个线偏振波的叠加，或两个圆偏振波的叠加。

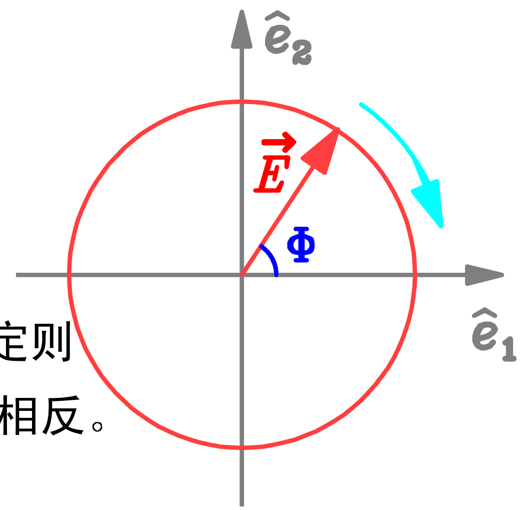
4. 任意平面电磁波都可分解为两个线偏振波或两个圆偏振波的叠加。

任意平面电磁波：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t)} = (\mathcal{E}_1\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \mathcal{E}_2\,\hat{\boldsymbol{e}}_2)e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t)} = (\mathcal{E}_+\,\hat{\boldsymbol{e}}_+ + \mathcal{E}_-\,\hat{\boldsymbol{e}}_-)e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t)}$

两线偏振分量：$\mathcal{E}_1 = \hat{\boldsymbol{e}}_1\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0$， $\mathcal{E}_2 = \hat{\boldsymbol{e}}_2\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0$，

左右旋圆偏振分量：$\mathcal{E}_\pm = \hat{\boldsymbol{e}}^*_\pm\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0$ （$\mathcal{E}_+$ 为左旋分量）

3. $\mathcal{E}_+ = 0$，$\mathcal{E}_- \neq 0$



$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{|\mathcal{E}_-|}{\sqrt{2}}\Big[\cos\Phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \sin\Phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_2\Big], \quad \Phi = (\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - \omega t + \phi_-)$$

如图所示，电场矢量是顺时针旋转，在光学中称为右旋圆偏振。

据 IEEE 的定义，若 $\vec{\boldsymbol{k}}$ 方向与电场矢量旋转方向满足左（右）手螺旋定则则称为左（右）旋圆偏振。如图是左旋圆偏振，与经典光学中的定义相反。

教材遵循经典光学的定义。

综合以上得知：任意平面电磁波都可分解为两个线偏振波的叠加，或两个圆偏振波的叠加。

4. 任意平面电磁波都可分解为两个线偏振波或两个圆偏振波的叠加。

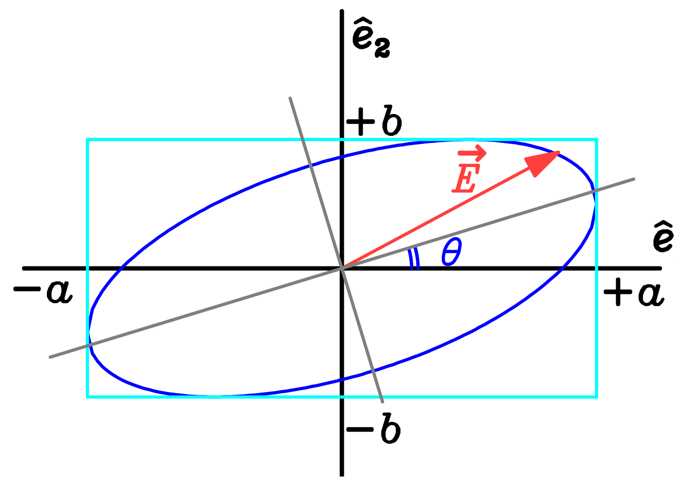
任意平面电磁波：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t)} = (\mathcal{E}_1\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \mathcal{E}_2\,\hat{\boldsymbol{e}}_2)e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t)} = (\mathcal{E}_+\,\hat{\boldsymbol{e}}_+ + \mathcal{E}_-\,\hat{\boldsymbol{e}}_-)e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t)}$

两线偏振分量：$\mathcal{E}_1 = \hat{\boldsymbol{e}}_1\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0$，$\mathcal{E}_2 = \hat{\boldsymbol{e}}_2\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0$，

左右旋圆偏振分量：$\mathcal{E}_\pm = \hat{e}^*_\pm\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0$ 　　($\mathcal{E}_+$ 为左旋分量)

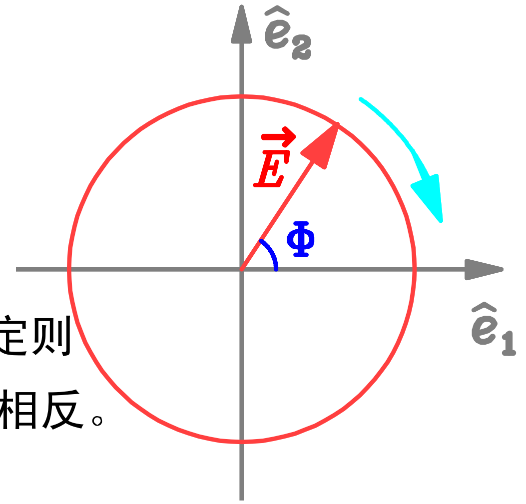
5. 任意两垂直线偏振波的叠加

任意平面电磁波：$\mathcal{E}_1 = ae^{i\phi_1}$，$\mathcal{E}_2 = be^{i\phi_2}$，　$\delta = \phi_2 - \phi_1$



3. $\mathcal{E}_+ = 0$，$\mathcal{E}_- \neq 0$

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{|\mathcal{E}_-|}{\sqrt{2}}\Big[\cos\Phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \sin\Phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_2\Big], \quad \Phi = (\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - \omega t + \phi_-)$$



如图所示，电场矢量是顺时针旋转，在光学中称为右旋圆偏振。

据 IEEE 的定义，若 $\vec{\boldsymbol{k}}$ 方向与电场矢量旋转方向满足左（右）手螺旋定则则称为左（右）旋圆偏振。如图是左旋圆偏振，与经典光学中的定义相反。

教材遵循经典光学的定义。

综合以上得知：任意平面电磁波都可分解为两个线偏振波的叠加，或两个圆偏振波的叠加。

4. 任意平面电磁波都可分解为两个线偏振波或两个圆偏振波的叠加。

任意平面电磁波：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t)} = (\mathcal{E}_1\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \mathcal{E}_2\,\hat{\boldsymbol{e}}_2)e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t)} = (\mathcal{E}_+\,\hat{\boldsymbol{e}}_+ + \mathcal{E}_-\,\hat{\boldsymbol{e}}_-)e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t)}$

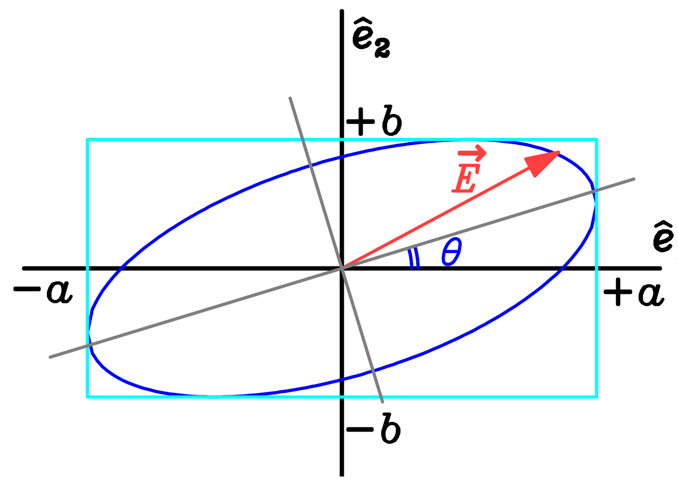
两线偏振分量：$\mathcal{E}_1 = \hat{\boldsymbol{e}}_1\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0$，$\mathcal{E}_2 = \hat{\boldsymbol{e}}_2\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0$，

左右旋圆偏振分量：$\mathcal{E}_\pm = \hat{\boldsymbol{e}}^*_\pm\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0$　　($\mathcal{E}_+$ 为左旋分量)

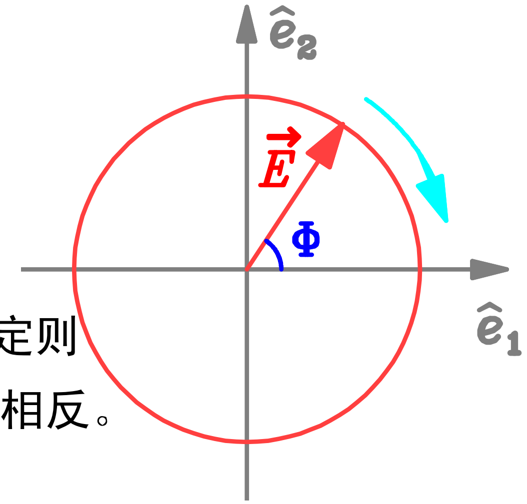
5. 任意两垂直线偏振波的叠加

任意平面电磁波：$\mathcal{E}_1 = a e^{i\phi_1}$，$\mathcal{E}_2 = b e^{i\phi_2}$，　$\delta = \phi_2 - \phi_1$

电场划出椭圆：$\left(\dfrac{x_1}{a}\right)^2 - 2\,\dfrac{x_1}{a}\,\dfrac{x_2}{b}\cos\delta + \left(\dfrac{x_2}{b}\right)^2 = \sin^2\delta$



3. $\mathcal{E}_+ = 0$，$\mathcal{E}_- \neq 0$



$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{|\mathcal{E}_-|}{\sqrt{2}}\left[\cos\Phi\,\hat{e}_1 + \sin\Phi\,\hat{e}_2\right], \quad \Phi = (\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi_-)$$

如图所示，电场矢量是顺时针旋转，在光学中称为右旋圆偏振。

据 IEEE 的定义，若 $\vec{k}$ 方向与电场矢量旋转方向满足左（右）手螺旋定则则称为左（右）旋圆偏振。如图是左旋圆偏振，与经典光学中的定义相反。

教材遵循经典光学的定义。

综合以上得知：任意平面电磁波都可分解为两个线偏振波的叠加，或两个圆偏振波的叠加。

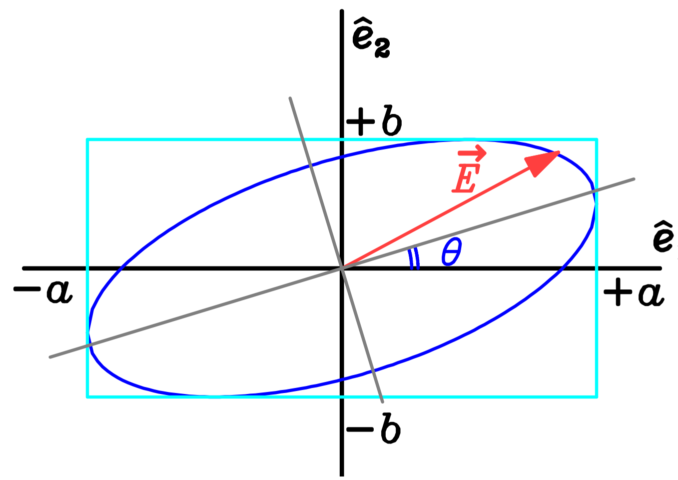
4. 任意平面电磁波都可分解为两个线偏振波或两个圆偏振波的叠加。

任意平面电磁波：$\vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = (\mathcal{E}_1\,\hat{e}_1 + \mathcal{E}_2\,\hat{e}_2)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = (\mathcal{E}_+\,\hat{e}_+ + \mathcal{E}_-\,\hat{e}_-)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

两线偏振分量：$\mathcal{E}_1 = \hat{e}_1\cdot\vec{\mathcal{E}}_0, \quad \mathcal{E}_2 = \hat{e}_2\cdot\vec{\mathcal{E}}_0,$

左右旋圆偏振分量：$\mathcal{E}_\pm = \hat{e}^*_\pm\cdot\vec{\mathcal{E}}_0$ 　　($\mathcal{E}_+$ 为左旋分量)

5. 任意两垂直线偏振波的叠加



任意平面电磁波：$\mathcal{E}_1 = ae^{i\phi_1}$，$\mathcal{E}_2 = be^{i\phi_2}$，　$\delta = \phi_2 - \phi_1$

电场划出椭圆：$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - 2\,\frac{x_1}{a}\,\frac{x_2}{b}\cos\delta + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = \sin^2\delta$

椭圆主轴与 $\hat{e}_1$ 夹角 θ 满足：$\tan 2\theta = \dfrac{2ab\,\cos\delta}{a^2 - b^2}$　左右旋?